UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

NOTAS SOBRE
CONVERGÊNCIA DE SEQÜÊNCIAS E SÉRIES
DE FUNÇÕES

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES
CLAUDIO MARTINS MENDES

Nº 37

NOTAS DIDÁTICAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

NOTAS SOBRE CONVERGÊNCIA DE SEQÜÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES
CLAUDIO MARTINS MENDES

Nº 37

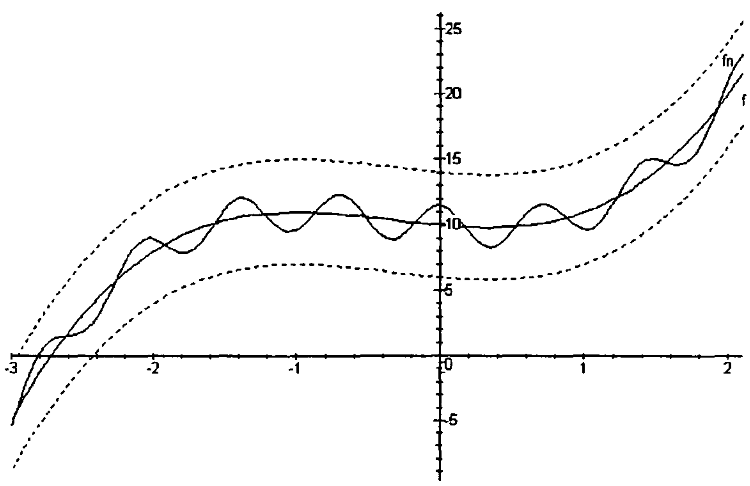
NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

São Carlos
Mai./1999

Notas sobre

Convergência de Seqüências e Séries de Funções

Wagner Vieira Leite Nunes & Claudio Martins Mendes



ICMSC/USP - São Carlos - 1999

O objetivo destas notas é introduzir os diversos conceitos de convergência de seqüências e séries de funções.

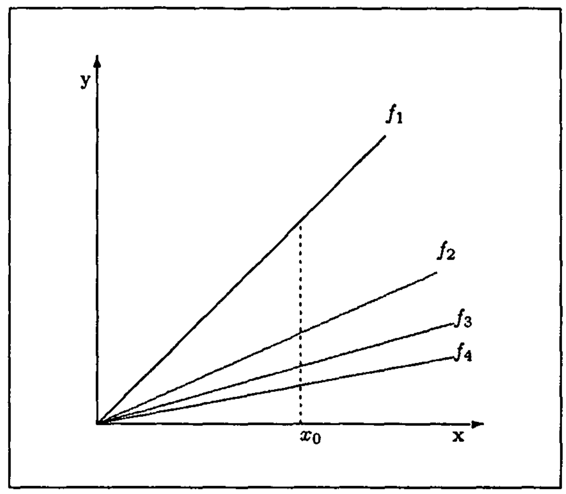
Iniciaremos com seqüências de funções e depois trataremos das séries de funções.

1. SEQÜÊNCIA DE FUNÇÕES

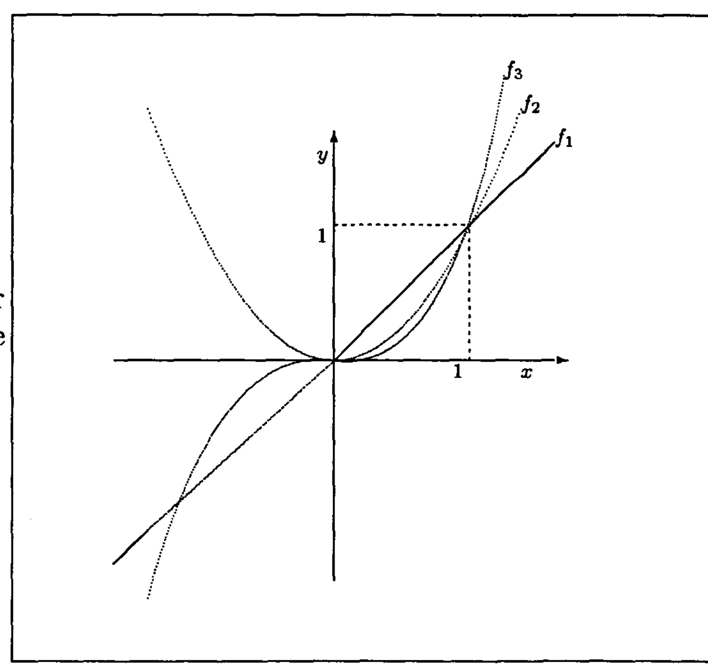
Definição 1.1. Seja A um subconjunto de R. Se a cada natural n fizermos corresponder uma função f_n, definida em A (isto é, $f_n : A \to R$), então (f_n) será dita **seqüência de funções** .

Exemplos. Consideremos os seguintes exemplos:

1. Considere $A = [0, \infty)$ e $f_n : A \to R$ dadas por $f_n(x) = \frac{x}{n}$, cujos gráficos dos quatro primeiros termos estão na figura ao lado.



2. Considere $A = R$ e $f_n : R \to R$ dadas por $f_n(x) = x^n$, $x \in R$ cujos gráficos de f_1, f_2 e f_3 encontram-se na figura ao lado.



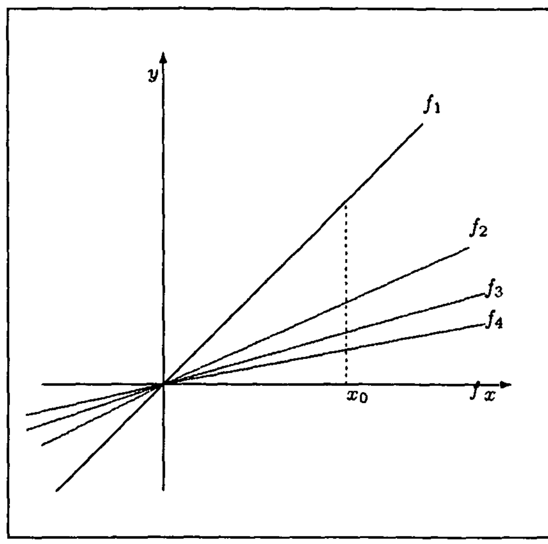
Observação. Fixando-se $x_0 \in A$ obtemos uma seqüência numérica $(f_n(x_0))$ que pode ou não ser uma seqüência numérica convergente. Com isto temos a seguinte definição:

Definição 1.2. Seja (f_n) uma seqüência de funções definidas em A, subconjunto de R. Seja $B \subset A$ e f função definida em B (isto é, $f : B \to R$). Dizemos que a seqüência (f_n) **converge em B para** f se para cada $x \in B$, fixo, a seqüência numérica $(f_n(x))$ converge para $f(x)$. Neste caso chamaremos a função f de **limite**, sobre B, da seqüência (f_n) e denotaremos por: $f_n \to f$ em B ou $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

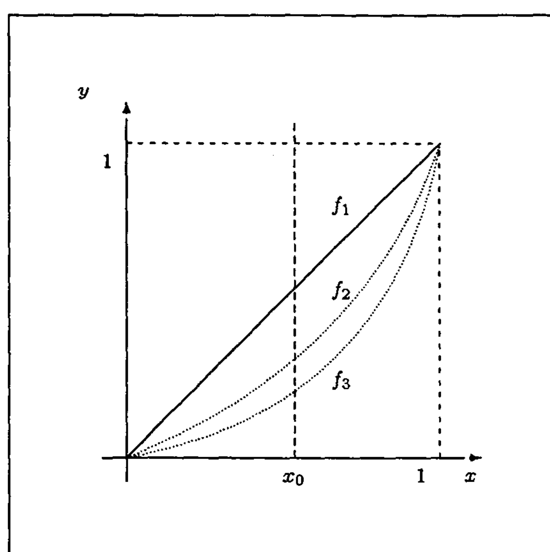
Observação.
1. Observemos que f está univocamente determinada, isto é, é de fato uma função.
2. $f_n \to f$ em $B \Leftrightarrow$ Para cada $x \in B$ e para cada $\epsilon > 0$, $\exists N_0 \in N$, $N_0 = N_0(\epsilon, x)$, tal que para $n \geq N_0$ temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
3. Este tipo de convergência de seqüência de funções é chamada de **convergência pontual** ou **ponto a ponto**.

Exemplos.

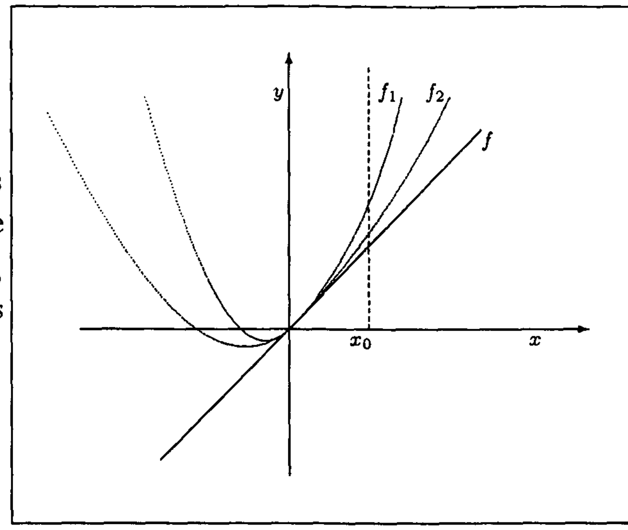
1. Considere $A = R$ e $f_n : R \to R$ dadas por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Fixado $x \in R$ temos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$. Logo, tomando-se $f : R \to R$ dada por $f(x) = 0$, temos que $f_n \to f$ em $B = R$ pontualmente.



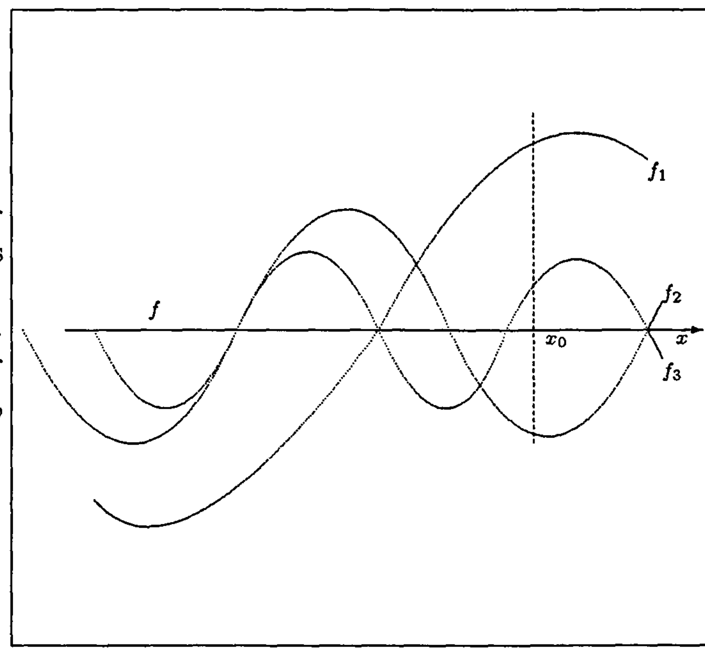
2. Considere $A = [0,1]$ e $f_n : A \to R$ dadas por $f_n(x) = x^n$. Fixado $x \in A$ temos que
(i) Se $x = 1$ então $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.
(ii) Se $0 \leq x < 1$ então $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.
Logo, tomando-se $f : A \to R$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$$
temos que $f_n \to f$ em $B = A = [0,1]$, pontualmente.



3. Considere $A = R$ e $f_n : R \to R$ dadas por $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$. Fixado $x \in R$ temos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} + x = x$. Logo, tomando-se $f : R \to R$ dada por $f(x) = x$, temos que $f_n \to f$ em $B = R$, pontualmente.



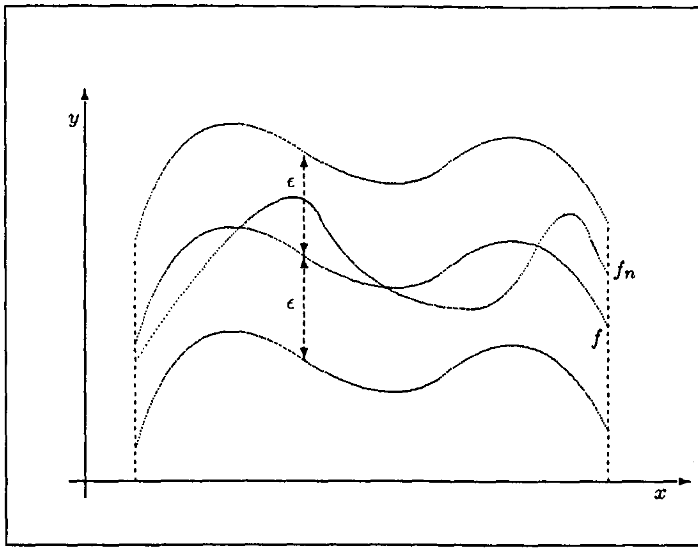
4. Considere $A = R$ e $f_n : R \to R$ dadas por $f_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx+n)$. Fixado $x \in R$ temos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx+n) = 0$. Logo, tomando-se $f : R \to R$ dada por $f(x) = 0$, temos que $f_n \to f$ em $B = R$, pontualmente.



Um outro tipo de convergência para uma seqüência de funções é o seguinte:

Definição 1.3. Uma seqüência de funções (f_n) definidas em $A \subset R$ (isto é, $f_n : A \to R$), **converge uniformemente** em $B \subset A$ para uma função $f : B \to R$ se dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\epsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall x \in B$.

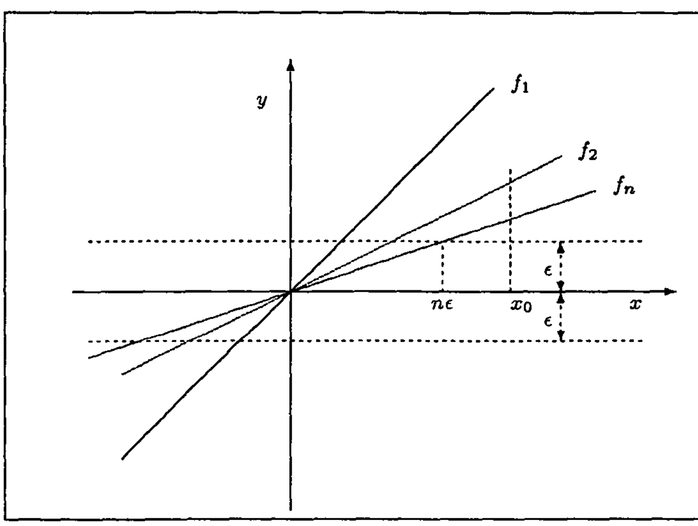
Observação.



1. Notemos que escrever $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ é equivalente a escrever $-\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon$ ou ainda $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$. Assim, f_n satisfaz a condição acima se e somente se seu gráfico está contido no " tubinho " de raio ϵ em torno do gráfico da função f (vide figura ao lado).

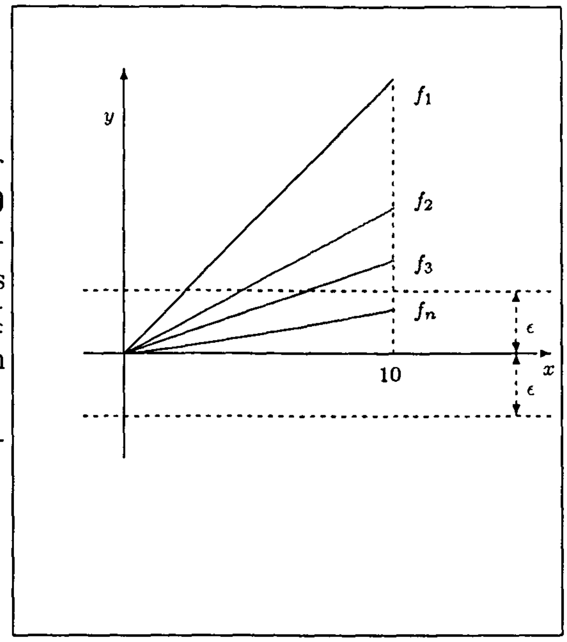
2. Segue imediatamente das definições que convergência uniforme implica em convergência pontual, isto é, se uma seqüência de funções (f_n) converge uniformemente em B para uma função f então (f_n) converge pontualmente para f em B . A recíproca é falsa, como mostram os seguintes exemplos:

Exemplos.



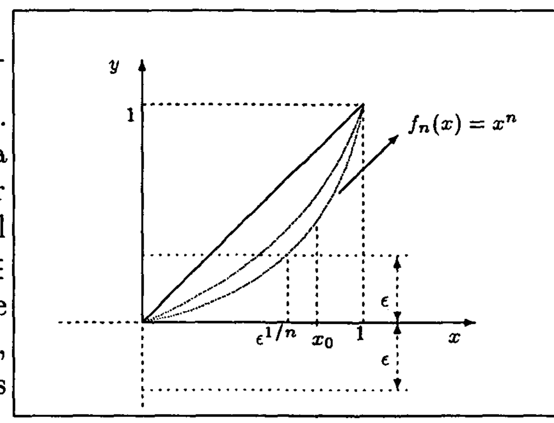
1. Sejam $A = R$ e $f_n : R \to R$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Observe que $f_n \to 0$ quando $n \to \infty$, isto é, a seqüência (f_n) converge pontualmente para a função $f(x) = 0$ em R. Porém a convergência não é uniforme em R. De fato, suponhamos, por absurdo, que a $f_n \to 0$ uniformemente em R. Então, dado $\epsilon = 1$, deve existir um $N_0 \in N$ tal que se $n \geq N_0$ então $|\frac{x}{n} - 0| < 1$, para todo $x \in R$. Em particular $|\frac{x}{N_0}| < 1$, $\forall x \in R$ ou equivalentemente $|x| < N_0$, $\forall x \in R$, o que é um absurdo. Portanto não existe um $N_0 \in N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon = 1$, $\forall x \in R$. Logo a convergência não é uniforme.

Observe que se no exemplo acima considerarmos $A = [a, b]$ então a convergência será uniforme, como mostra o exemplo a seguir.

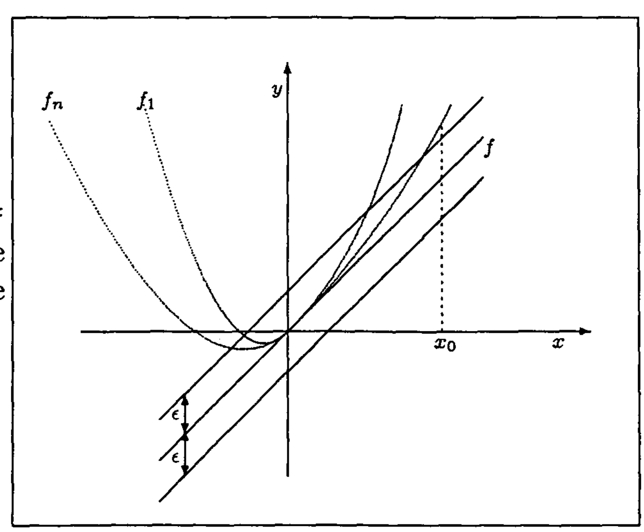


2. Considere $A = [0,10]$ e $f_n : A \to R$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Observe que como no caso acima $f_n \to f = 0$ pontualmente em $A = [0,10]$. Analisemos se a convergência é uniforme. Para isto, dado $\epsilon > 0$ tomemos $N_0 > \frac{10}{\epsilon}$. Então, se $n > N_0$ temos $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x}{n}| \leq \frac{10}{n} \leq \frac{10}{N_0} < \epsilon$ mostrando que $f_n \to f$ uniformemente em $A = [0,10]$.
Poderíamos desenvolver o mesmo raciocínio considerando $A = [a,b]$ qualquer.

3. Considere $A = [0,1]$, $f_n : A \to R$,dada por $f_n(x) = x^n$ e $f : A \to R$, definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < 1 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}$ Observe que $f_n \to f$ pontualmente em $A = [0,1]$, mas a convergência não é uniforme. De fato, suponhamos, por absurdo, que a convergência seja uniforme. Escolhamos ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, por exemplo $\epsilon = \frac{1}{3}$. Então, deve existir um $N_0 \in N$, tal que se $n \geq N_0$ temos $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon = \frac{1}{3}$, $\forall x \in A = [0,1]$. Observe que para qualquer $n \in N$ existe $x_0 \in [0,1)$ tal que $\epsilon^{1/n} = \frac{1}{3^n} < x_0 < 1$, pois $\frac{1}{3^n} < 1$, para todo $n \in N$. Assim, para $\frac{1}{3^n} < x_0 < 1$, temos $|f_n(x_0) - f(x_0)| = |x_0^n - 0| = x_0^n > (\frac{1}{3^n})^n = \frac{1}{3} = \epsilon$. Portanto, a convergência não é uniforme.

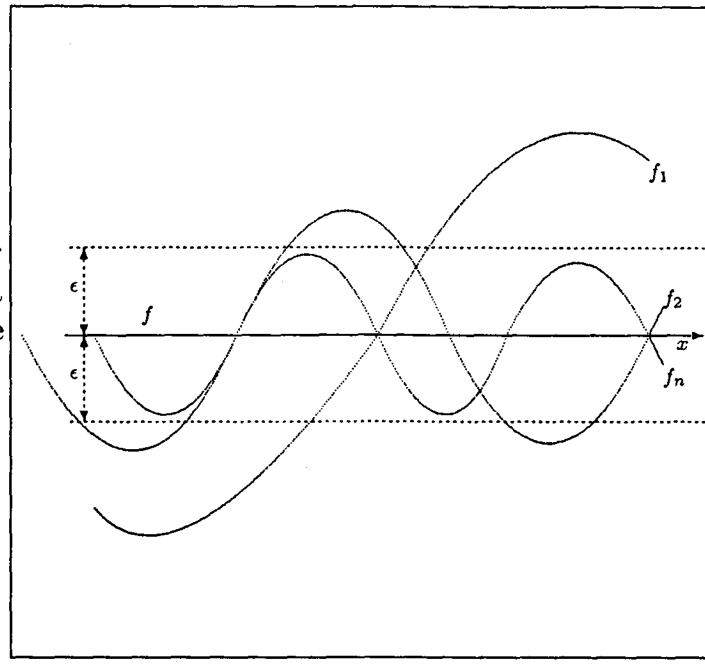


Mais adiante veremos novamente, usando outro procedimento, que esta convergência não pode ser uniforme.

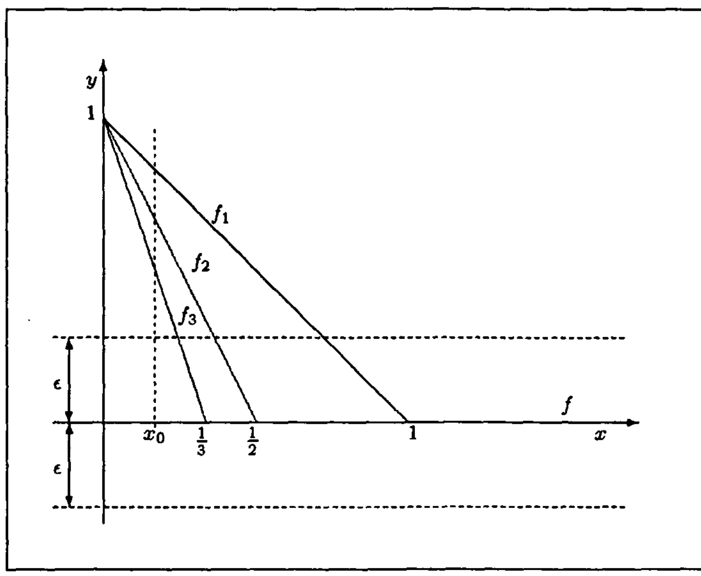


4. Considere $A = R$, $f_n : R \to R$ dada por $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$ e $f : R \to R$ definida por $f(x) = x$. Observe que $f_n \to f$ pontualmente em R mas não converge uniformemente (exercício).

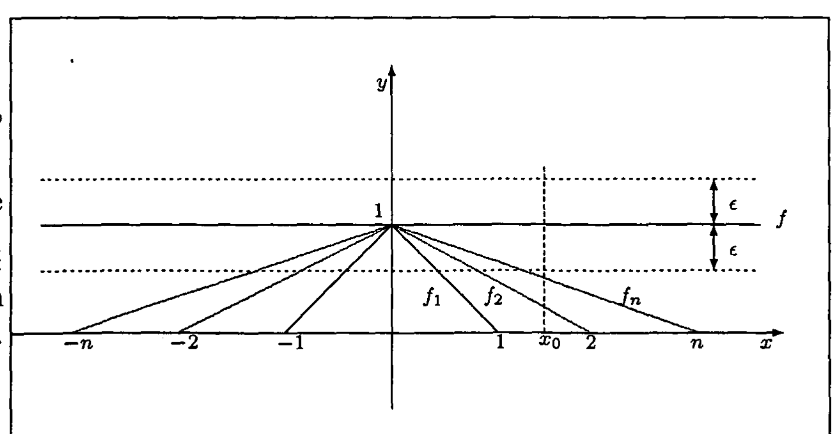
5. Considere $A = R$, $f_n : R \to R$, dada por $f_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx+n)$ e $f : R \to R$, definida por $f(x) = 0$. Então $f_n \to f$ uniformemente em $A = R$ (exercício).
Sugestão: $|\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(nx+n)| \leq \frac{1}{n}$, $\forall x \in R$.



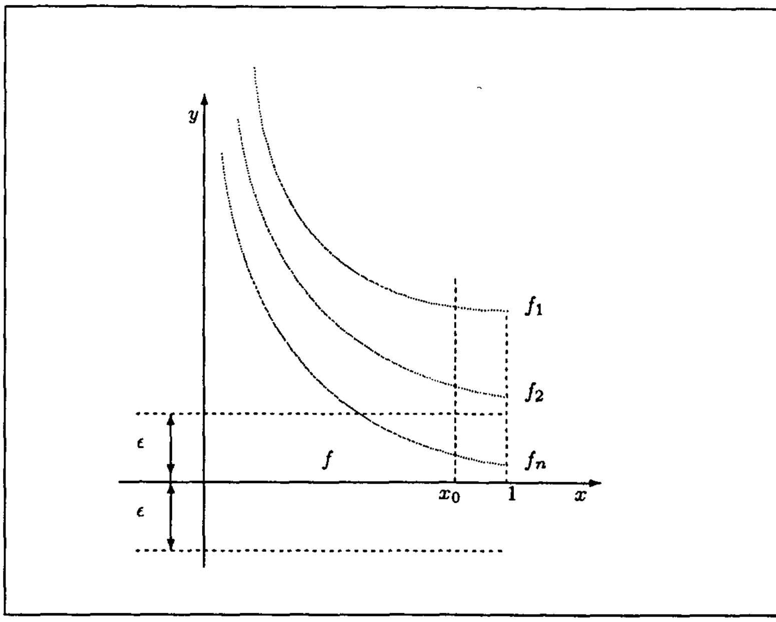
6. Sejam $A = [0, \infty)$, $f_n : A \to R$, dadas pelos gráficos ao lado e $f : A \to R$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$
Neste caso, $f_n \to f$ pontualmente em A, mas a convergência não é uniforme. Isto será provado mais adiante.



7. Sejam $A = R$ e $f_n : R \to R$, definida por
$$f_{(}x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & , \text{ se } |x| < n \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq n \end{cases} \quad \text{e}$$
$f : R \to R$ dada por $f(x) = 1$, $\forall x \in R$. Então $f_n \to f$ pontualmente em R, mas não uniformemente em R. Isto será mostrado mais adiante.



8. Considere $A = (0,1]$, $f_n : A \to R$, dada por $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ e $f : A \to R$, definida por $f(x) = 0$, para todo $x \in A$. Então $f_n \to f$ pontualmente em A, mas não converge uniformemente em A.
De fato, suponhamos, por absurdo, que a convergência fosse uniforme. Logo, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existiria um $N_0 \in N$ tal que para todo $n \geq N_0$ teríamos $|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ para todo $x \in A = (0,1]$, isto é, $|\frac{1}{nx}| < \frac{1}{2}$ $\forall x \in A = (0,1]$. Em particular, $|\frac{1}{N_0 x}| < \frac{1}{2}$ $\forall x \in A = (0,1]$. Assim, $0 < 1/x < N_0/2$, $\forall x \in (0,1]$, o que é um absurdo. Logo não existe tal N_0, isto é, a convergência não é uniforme.



A seguir daremos algumas aplicações importantes da convergência uniforme de seqüências de funções. Começaremos com um resultado que nos dá condições suficientes para podermos "trocar" o limite com uma integral, isto é,

Teorema 1.4. *Suponhamos que (f_n) seja uma seqüência de funções integráveis em $[a,b]$ e que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$, com f integrável em $[a,b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

ou seja

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Demonstração:
Como $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$, dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\epsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ para todo $x \in [a,b]$. Logo, se $n \geq N_0$, temos:

$$|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx| = |\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \epsilon$$

Isto é, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

A seguir daremos um resultado que nos diz que o limite uniforme de seqüência de funções contínuas é uma função contínua. Mais claramente:

Teorema 1.5. *Suponhamos que (f_n) seja uma seqüência de funções contínuas em $[a,b]$ que converge uniformemente para f em $[a,b]$. Então f é contínua em $[a,b]$. Isto é,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou ainda:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Demonstração:
Precisamos mostrar que f é contínua para cada $x \in [a, b]$. Faremos a demonstração quando $x \in (a, b)$. Os casos $x = a$ ou $x = b$ são simples adaptações do caso que faremos. Por isso serão deixados como exercício.

Dado $\epsilon > 0$, do fato que $f_n \to f$ uniformemente em $[a, b]$, segue que existe $N_0 = N_0(\epsilon) \in N$ tal que se $n \geq N_0$ temos $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall y \in [a, b]$. Em particular,
$|f_{N_0}(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, $\forall y \in [a, b]$.
Como f_{N_0} é contínua em x, existe $\delta > 0$ tal que se $|h| < \delta$ então $|f_{N_0}(x + h) - f_{N_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.
Assim, se $|h| < \delta$ temos:

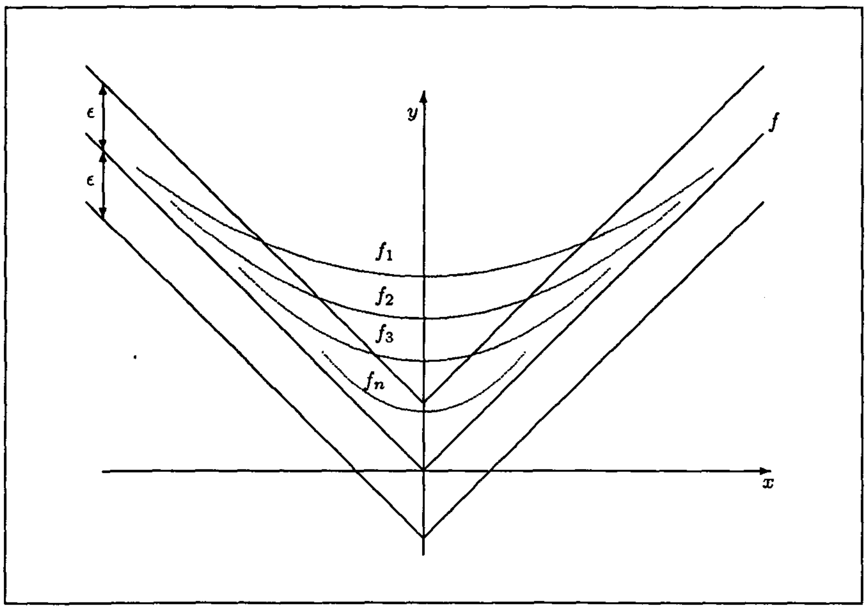
$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f_{N_0}(x+h) + f_{N_0}(x+h) - f_{N_0}(x) + f_{N_0}(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x+h) - f_{N_0}(x+h)| + |f_{N_0}(x+h) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x) - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$, isto é, f é contínua em x.

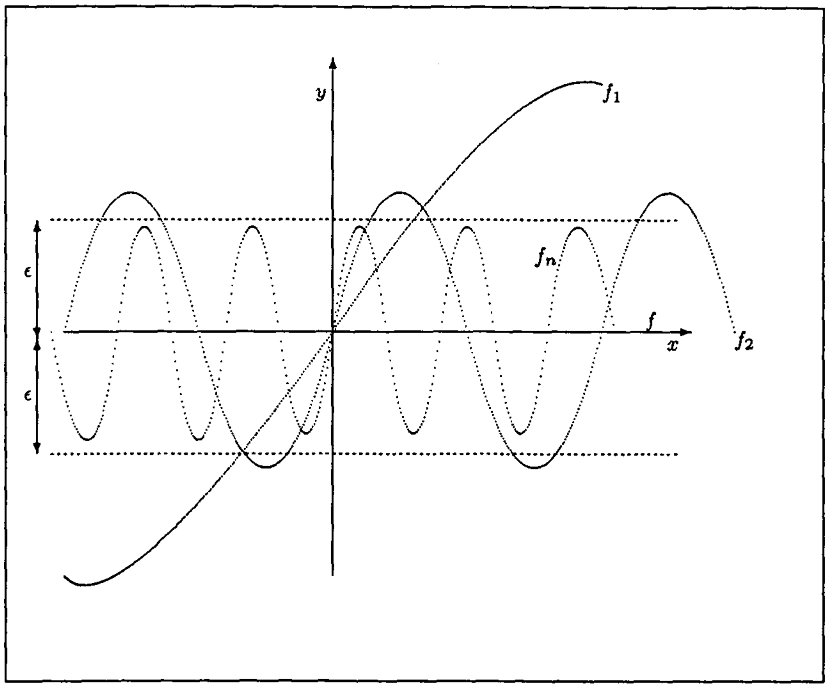
Observação.
Tendo em vista os dois teoremas acima, podemos pensar que algo semelhante deve valer para a diferenciação. Isto é: *se (f_n) é uma seqüência de funções diferenciáveis em $[a, b]$ e converge uniformemente para f em $[a, b]$ então f é diferenciável em $[a, b]$ e $f' = \lim_{n \to \infty} f_n'$* . Infelizmente isto não é verdade em geral, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplos.

1. Considere a seqüência (f_n) dadas pelos seus gráficos ao lado, definidas em R e $f(x) = |x|$, $x \in R$. Observe que $f_n \to f$ uniformemente em R e que apesar das f_n serem todas diferenciáveis f não é (pois não é diferenciável em $x = 0$).



2. Considere $f_n : R \to R$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2x)$ e $f : R \to R$ definida por $f(x) = 0$, $x \in R$. Observe que apesar de $f_n \to f$ uniformemente em R e f ser diferenciável, não temos $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$, pois $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$ e este limite nem sempre existe (por exemplo, ele não existe quando $x = 0$).



Para resolver este problema temos o:

Teorema 1.6. *Suponhamos que (f_n) seja uma seqüência de funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ e para algum $x_0 \in [a,b]$ a seqüência numérica $(f_n(x_0))$ converge. Se a seqüência (f_n') converge uniformemente para alguma função g em $[a,b]$, então a seqüência (f_n) converge uniformemente para uma função f em $[a,b]$, f é continuamente diferenciável em $[a,b]$ e $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, isto é:*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Demonstração:
Como $f_n' \to g$ uniformemente em $[a,b]$ e as f_n são contínuas em $[a,b]$, então do teorema 1.5 temos que g é contínua em $[a,b]$.
Como $(f_n(x_0))$ converge para algum valor, digamos $c \in R$, então dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in N$ tal que se $n \geq N_1$ então

$$|f_n(x_0) - c| < \frac{\epsilon}{2}$$

Defina $f : [a,b] \to R$ por

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Observemos que f é continuamente diferenciável e $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, pois g é contínua em $[a,b]$.
Mostremos que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$.
Do fato que $f_n' \to g$ uniformemente em $[a,b]$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $N_2 = N_2(\epsilon) \in N$, tal

que $|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, para todo $n \geq N_2$. Logo, do Teorema Fundamental do Cálculo, segue:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - c - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + |\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt| \\ &\leq |f_n(x_0) - c| + \int_a^b |f_n' - g(t)|\,dt \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

se $n \geq \max(N_1, N_2)$, mostrando que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$.

Um outro resultado semelhante é o:

Teorema 1.7. *Suponhamos que (f_n) seja uma seqüência de funções diferenciáveis sobre $[a,b]$ e que (f_n) converge ponto a ponto para f, sobre $[a,b]$.*

Suponhamos ainda que (f_n') converge uniformemente, sobre $[a,b]$, para alguma função g e que f_n' seja contínua, $\forall n \in N$. Então f é diferenciável sobre $[a,b]$ e

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

ou seja,

$$(\lim_{n \to \infty} f_n(x))' = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

Demonstração:
Do teorema 1.5, g é contínua sobre $[a,b]$. Aplicando o teorema 1.4 ao intervalo $[a,x]$ temos:

$$\begin{aligned} \int_a^x g(t)\,dt &= \lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} [f_n(x) - f_n(a)] \\ &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade aplicamos o Teorema Fundamentel do Cálculo.

Agora,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)\,dt = G(x) - G(a)$$

onde $G(x)$ é tal que $G'(x) = g(x)$. Assim

$$f'(x) = G'(x) = g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

$\forall x \in [a,b]$.

2. Série de Funções

Nesta secção faremos um estudo da convergência de séries de funções.

Definição 2.1. Dada uma seqüência de funções (f_n) definidas em $A \subset R$ podemos construir uma outra seqüência de funções (S_n) tal que $S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Tal seqüência é denominada **série de funções** associada à seqüência (f_n) e indicada por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Observação.
Para cada $x_0 \in A$ a série $(S_n(x_0))$ é uma série numérica.

Definição 2.2. Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente para** f **em** A se a seqüência de funções (S_n) converge pontualmente para f, isto é, se para cada $x \in A$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$.

Definição 2.3. Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente para** f **em** A se a seqüência de funções (S_n) converge uniformemente para f em A.

Antes de exibirmos alguns exemplos de convergência de séries de funções daremos alguns resultados que serão úteis em várias situações. O primeiro deles é conseqüência imediata dos teoremas anteriores, a saber:

Corolário 2.4. *Considere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ série de funções uniformemente convergente para f em $[a,b]$, isto é, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.*
(i) Se cada uma das funções f_n for contínua em $[a,b]$ então f é contínua em $[a,b]$, isto é,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou ainda

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

(ii) Se f e as f_n forem integráveis em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

isto é,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

ou ainda, a série pode ser integrada termo a termo.
(iii) Suponha que as f_n sejam continuamente diferenciáveis em $[a,b]$. Se para algum $x_0 \in [a,b]$ a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente para uma função g em $[a,b]$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função f em $[a,b]$, onde f é continuamente diferenciável em $[a,b]$ e $f' = g$, isto é,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

ou

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

ou seja, a série pode ser derivada termo a termo.

Demonstração:
De (i):
Como as f_n são contínuas, temos que $S_n = f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ também serão. Mas a seqüência S_n converge uniformemente para f. Logo, do teorema 1.5, segue que f é contínua em $[a, b]$.
De (ii):
Dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em $[a, b]$ é dizer que a seqüência de funções (S_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$. Então, segue do teorema 1.4, que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt \overset{\text{teor1.4}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

De (iii):
Dizer que a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge em $x_0 \in [a, b]$ é dizer que a seqüência numérica $(S_n(x_0))$ converge. Além disso, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente para g em $[a, b]$, temos que a seqüência (S_n') converge uniformemente para g em $[a, b]$. Logo, do teorema 1.6, segue que a seqüência (S_n) converge uniformemente para uma função f em $[a, b]$ e $f' = g$, isto é,

$$(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Observação.
1. O corolário acima trata de conseqüências da convergência uniforme de séries de funções.
2. Um resultado extremamente importante, que nos dá condições suficientes para assegurar a convergência uniforme de séries de funções, é:

Teorema 2.5. *(***Critério de Weierstrass ou Teste M de Weierstrass***)*
Seja (f_n) uma seqüência de funções definidas em $A \subset R$. Suponhamos que exista uma seqüência numérica (M_n), tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n \ , \ \forall x \in A$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente, então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta e uniformemente para uma função f em A.

Demonstração:
Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, segue, do critério da comparação, que para cada $x \in A$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge. Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente para uma função f em A, isto é, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
Para todo $x \in A$ temos:

$$|f(x) - S_N(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$$

Como a série numérica converge, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in N$ tal que se $n \geq N_0$, então $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \epsilon$, assim, para $n \geq N_0$ temos:

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \epsilon \ , \ \forall x \in A$$

o que implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para f em A.

A seguir aplicaremos os resultados acima para estudar a convergência de algumas séries de funções.

Exemplos.

1. Considere $A = [-1,1]$ e $f_n : R \to R$ dada por $f_n(x) = \frac{x^n}{2^n}$, $n = 0,1,2,\cdots$.
Observe que para todo $x \in A = [-1,1]$ temos

$$|f_n(x)| = |\frac{x^n}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n}$$

Mas a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (série geométrica de razão $\frac{1}{2}$). Então, pelo Critério de Weierstrass, a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ converge uniformemente e absolutamente para uma função f em $[-1,1]$.
Neste caso podemos obter a função f explicitamente observando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

2. A série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em qualquer intervalo da forma $[-a,a]$.
De fato, se $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ temos

$$|f_n(x)| = |\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{a^n}{n!} \ , \ \forall x \in [-a,a]$$

Do Critério da razão a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge. Assim segue do Critério de Weierstrass que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente em $[-a,a]$.

3. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{3^n}$ é uniformemente convergente em R.
De fato, se $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{3^n}$ temos:

$$|\frac{\text{sen}(nx)}{3^n}| \leq \frac{1}{3^n} \ , \ \forall x \in R \ e \ \forall n \in N$$

A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (série geométrica de razão 1/3). Logo, do Critério de Weiestrass, segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{3^n}$ converge uniformemente em R.

4. Mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$, $x \in R$ pode ser derivada termo a termo em R.
Para isto considere $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$, $x \in R$.
Observe que as f_n são continuamente diferenciáveis em R e $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in R$.
Observe que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ converge para 0, (pois $f_n(0) = 0$) e como

$$|f_n'(x)| = |\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} \ , \ \forall x \in R.$$

Então, do Critério de Weierstrass, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente para uma função g em R. Portanto, do corolário 2.4 item (iii), segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3}$ converge uniformemente para uma função f continuamente diferenciável em R, que satisfaz $f' = g$. Isto é, a série pode ser derivada termo a termo, ou seja

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\text{sen}(nx)}{n^3})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

para todo $x \in R$.

Tópicos adicionais, bem como outros exemplos e resultados podem ser encontrados na bibliografia abaixo mencionada.

REFERÊNCIAS

[1] E. L. Lima - *Curso de Análise - Vol 1.*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro , IMPA, CNPq, (1976).
[2] R.C. Buck - *Advanced Calculus.* 2.ª edição , Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., (1965).