UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

A Matemática do Ensino Médio

Mirian Percia Mendes

Nº 39

NOTAS DIDÁTICAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

A Matemática do Ensino Médio

Mirian Percia Mendes

Nº 39

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

São Carlos
Nov./1999

A Matemática do Ensino Médio

Mirian Percia Mendes[1]

16 de novembro de 1999

[1]Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Departamento de Matemática, São Carlos, SP, Brazil, mp-mendes@icmc.sc.usp.br

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Introdução

Das noções matemáticas, a noção de conjunto é a mais fundamental de todas elas pois é daí que surgem os demais conceitos matemáticos. Embora seja também a mais simples ainda aparece cercada de imprecisões por parte de quem a usa. Nessa direção, com o objetivo de disciplinarmos um pouco o raciocínio lógico, vamos agora introduzir uma linguagem.

Um conjunto é formado por elementos.

Se dois símbolos a e b representam o mesmo elemento, dizemos que "a é igual a b"e escrevemos $a = b$. Caso contrário, escrevemos $a \neq b$.

Dados um conjunto A e um objeto a qualquer (que pode até mesmo ser um outro conjunto), surge uma única pergunta a respeito deles: a é elemento do conjunto A? Em caso afirmativo, dizemos que a pertence ao conjunto A e escrevemos $a \in A$. Se isso não ocorre, dizemos que a não pertence ao conjunto A e escrevemos $a \notin A$.

Estabelecemos assim, a *relação de pertinência.* Relação essa que só acontece entre elemento e conjunto.

Observemos também que os conjuntos são denotados por letras maiúsculas: A, B, C, X, Y, ... e seus elementos por letras minúsculas: $a, b, c, x, y, ...$

Com isso, apresentamos os três conceitos básicos que não definimos matematicamente, a saber: *elemento, conjunto e a relação de pertinência.*

Como exemplo de conjuntos citamos os conhecidos conjuntos numéricos que serão estudados adiante.

Uma das finalidades, isto é uma das funções básicas dos conjuntos é que esses substituem as "propriedades"e as "condições". Como? Vejamos.

Em vez de dizermos que "o objeto a tem a propriedade P"ou que "o objeto b satisfaz a condição C", escrevemos $a \in A$ e $b \in B$, onde A é o conjunto dos objetos que tem a propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição C. Assim, $A = \{x/\ x$ tem a propriedade $P\}$ e $B = \{y/\ y$ satisfaz $C\}$.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um número inteiro ser par (isto é, divisível por 2) e C a condição sobre o número real y expressa por $y^2 - 4y = 0$. Consideremos também, $A = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ e $B = \{0, 4\}$. Então tanto faz dizer que x tem a propriedade P e que y satisfaz a condição C como afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

Pelo exemplo acima fica claro que um conjunto fica determinado (descrito, explicitado, definido, caracterizado) através de propriedades, condições ou por uma listagem de seus elementos.

Muitos autores também descrevem o conjunto A da seguinte forma: se $P(x)$ é uma propriedade do elemento x que pode ser verdadeira (V), ou falsa (F) então $A = \{x/\ P(x)$ é V$\}$. Com isso, quando $P(a)$ é V escrevemos $a \in A$.

Essa maneira de representarmos um conjunto com duas chaves é conhecida como forma *tabular de representação.*

Outra maneira de representarmos um conjunto é através da consideração de seus elementos como pontos interiores de uma figura fechada. Os elementos que não pertencem ao conjunto são representados por pontos exteriores a mesma. Essa representação é conhecida como *diagrama de Venn* (matemático inglês - 1834-1923).

Por que usar a linguagem e a notação de conjuntos? Porque temos uma álgebra montada sobre as operações entre conjuntos e as propriedades e regras operatórias dessa álgebra são fáceis de serem manuseadas devido a sua simplicidade. De que operações estamos falando? Vamos estudar logo mais.

Antes de passarmos às operações, necessitamos introduzir um conjunto muito especial que denominamos *conjunto vazio* e que denotamos por $\emptyset$.

A determinação de tal conjunto se dá através de qualquer propriedade contraditória. Assim, $\emptyset = \{x; x \neq x\} = \{x; x > x\}$ ... Formalizando, seja qual for o objeto x, temos sempre que $x \notin \emptyset$.

Outros conjuntos interessantes são os *conjuntos unitários.* Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário $\{x\}$ tem como único elemento esse objeto x.

Observação 1.1.1 *Com isso, fica claro que* $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Intuitivamente, sabemos que um conjunto é *finito* se quando contamos seus elementos, o processo de contagem pára. Caso contrário, dizemos que o conjunto é *infinito.*

Assim, $\emptyset$ é um conjunto finito que não contém elemento algum. $\{\emptyset\}$ é um conjunto finito que contém um único elemento, a saber: $\emptyset$. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ é um conjunto finito que contém dois elementos $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ e assim, sucessivamente.

Vamos agora estabelecer uma relação entre conjuntos.

Definição 1.1.2 *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A está contido em B (A é um subconjunto de B, A é parte de B ou que B contém A) quando todos os elementos de A também são elementos de B. Nesse caso, escrevemos $A \subset B$ ou $B \supset A$.*

Como exemplo, se considerarmos T o conjunto de todos os triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano, vamos poder escrever $T \subset P$ já que todo triângulo é um polígono.

A relação entre conjuntos que acabamos de definir é conhecida como *relação de inclusão.* Ela está estreitamente ligada à *implicação lógica.* Vejamos como.

Sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto X.

Consideremos A o conjunto formado pelos elementos de X que têm a propriedade P e B o conjunto formado pelos elementos de X que têm a propriedade Q. Então afirmar que $A \subset B$ é o mesmo que dizer que se x tem a propriedade P então x tem a propriedade Q.

Como ler a relação $P \Rightarrow Q$? Costumamos dizer: *"P implica Q", "se P então Q", "P é condição suficiente para Q"ou "P somente se Q".*

Com essas informações, a relação de inclusão $A \subset B$ em implicação lógica fica: $P \Rightarrow Q$.

Quando A não é um subconjunto de B, escrevemos $A \not\subset B$ e isso significa que nem todo elemento de A pertence a B, isto é, que existe pelo menos um objeto x tal que $x \in A$ e $x \notin B$.

Relacionando com implicação lógica como fizemos anteriormante, $A \not\subset B$ significa que $\exists\ x \in A$ e $x \notin B$, isto é, $\sim (P \Rightarrow Q)$.

Aqui, introduzimos o conectivo *não* representado pelo símbolo $\sim$ e cujo significado é o da negação.

Com tudo isso, concluimos que $A \subset A$ e que $\emptyset \subset A$. Dessa última segue que $\emptyset \subset \emptyset$, $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, $\emptyset \subset \{\{\emptyset\}\}$, ...

A implicação $Q \Rightarrow P$ chama-se *recíproca* de $P \Rightarrow Q$.

Quando ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são válidas, escrevemos $P \Leftrightarrow Q$ e dizemos *"P se, e somente se Q", "P é equivalente a Q"ou "P é necessária e suficiente para Q".*

Notemos a diferença entre $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ através do exemplo a seguir.

Escrevemos $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$, mas não podemos escrever que $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ pois na verdade o que temos é que $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. Assim, $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ e não $x = 3 \Leftrightarrow x^2 = 9$.

Observação 1.1.3 *Nunca escreva (ou diga) coisas do tipo: "se $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - x = 0$". O símbolo $\Rightarrow$ não significa "então", mas sim "implica". Também é semanticamente incorreto empregar o símbolo $\Rightarrow$ com o significado conclusivo da palavra "portanto". O símbolo adequado para esta palavra é e não $\Rightarrow$.*

Observação 1.1.4 *Se a é um elemento de um conjunto A, escrevemos $a \in A$ e isso também se expressa por $\{a\} \subset A$. Mas atenção: nunca escreva $a \subset A$ e $\{a\} \in A$!*

Definição 1.1.5 *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é igual a B quando ambos os conjuntos têm os mesmos elementos. Nesse caso, escrevemos $A = B$.*

Em linguagem formal: $A = B$ quando $A \subset B$ e $B \subset A$.

A igualdade de conjunto $A = B$ na implicação lógica se traduz por $P \Leftrightarrow Q$.

Definição 1.1.6 *Dizemos que um conjunto A é um subconjunto próprio de B quando $A \subset B$ e $A \neq B$. Nesse caso, escrevemos $A \subset B$. Formalizando, $A \subset B$ quando $\forall x \in A$, $x \in B$ e $\exists\, y \in B$ tal que $y \notin A$.*

Com a relação de inclusão, dado um conjunto X, podemos construir um novo conjunto cujos elementos são conjuntos. Vejamos a seguir.

Definição 1.1.7 *Seja X um conjunto. Definimos o conjunto das partes de X (ou conjunto potência de X) e denotamos o mesmo por $P(X)$ ao conjunto formado por todos os subconjuntos de X. Assim,*

$$P(X) = \{A / A \subset X\}.$$

É possível verificar, usando indução matemática, que se X é um conjunto finito com n elementos então que $P(X)$ também é um conjunto finito com 2^n elementos. Daí vemos de onde parece vir o nome conjunto potência.

Antes de prosseguirmos vamos fazer algumas colocações.

As definições matemáticas atribuem nomes a objetos que tem certas propriedades. Elas têm a finalidade de fornecer clareza e economia ao raciocínio.

Por exemplo, dizemos que um número natural n é (ou chama-se) um número primo quando 1 e n são os únicos números naturais que são seus divisores.

Outra colocação é que todas as proposições matemáticas são do tipo "se ... então ... ".

Além disso, temos as afirmações *vacuamente satisfeitas*. Essas são afirmações do tipo $P \Rightarrow Q$ onde o conjunto definido pela propriedade P é vazio. Elas são sempre verdadeiras.

1.2 Operações com Conjuntos

Quando estudarmos os conjuntos numéricos, vamos falar em como operar seus elementos. Gostaríamos de poder generalizar essa situação, isto é, dado um conjunto qualquer, gostaríamos de sempre poder operar seus elementos. Colocamos então a seguinte pergunta: *É possível operar elementos de um conjunto quando esses elementos são conjuntos*? A resposta afirmativa vem a seguir.

Sejam X um conjunto e $P(X)$ o conjunto das partes de X. As operações que vamos definir referem-se a subconjuntos de X ou a elementos de $P(X)$.

1.2.1 União

Definição 1.2.1 *Definimos a união de dois conjuntos A e B e denotamos $A \cup B$ como o conjunto formado por todos os elementos que estão em A ou* *que estão em B (ou em ambos). Formalizando,*

$$A \cup B = \{x \in X/\ x \in A \ ou\ x \in B\}.$$

Podemos mostrar que: $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$ e $A \cup X = X$.

1.2.2 Intersecção

Definição 1.2.2 *Definimos a intersecção de dois conjuntos A e B e denotamos $A \cap B$ como sendo o conjunto formado por todos os elementos que estão em A e que estão em B. Formalizando,*

$$A \cap B = \{x \in X/\ x \in A \ e\ x \in B\}.$$

Podemos mostrar que: $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cap X = A$.

Vejamos um exemplo que ilustra essas duas definições.

Suponhamos que x tem a propriedade P quando $x^2 - 3x + 2 = 0$ e que y tem a propriedade Q quando $y^2 - 5y + 6 = 0$.

Então $A = \{x/x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$ e $B = \{y/y^2 - 5y + 6 = 0\}$.

Daí, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ e $A \cap B = \{2\}$.

Notemos que com essas duas operações apresentamos mais dois conectivos, a saber: *ou* e *e*. Com a *implicação*, a *equivalência* e o *não* já temos todos os cinco deles.

Antes de prosseguirmos com as operações, vamos apresentar algumas propriedades.

1. União

   - comutativa: $A \cup B = B \cup A$;
   - associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

- elemento neutro (conjunto vazio): $A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$.

2. Intersecção

   - comutativa: $A \cap B = B \cap A$;
   - associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
   - elemento neutro (conjunto X): $A \cap X = A = X \cap A$.

Relacionando as duas operações temos as propriedades distributivas:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Podemos demonstrar todas essas propriedades. Que tal você tentar?

Definição 1.2.3 *Dizemos que dois conjuntos A e B são disjuntos quando não possuem elementos em comum. Em linguagem formal, A e B são disjuntos quando $A \cap B = \emptyset$.*

1.2.3 Complementar

Definição 1.2.4 *Definimos o complementar de A em X (ou o complemento de A em X) e denotamos A^C ao conjunto formado pelos elementos de X que não estão em A. Formalizando,*

$$A^C = \{x/\ x \in X \ e\ x \notin A\}.$$

Quando em uma dada situação todos os conjuntos considerados são subconjuntos de um conjunto dado, chamamos esse conjunto de *conjunto universo*. Na verdade, o que acontece é que ele é o conjunto ambiente do estudo, isto é, o conjunto onde está sendo desenvolvido o raciocínio, o trabalho. É o assunto da discussão. Costumamos usar: "estaremos falando somente dos elementos de ... ".

Se $A = \{1,2,3\}$ e U é o conjunto dos números naturais então $A^C = \{4,5,6,...\}$. Mas, se U é o conjunto dos números inteiros então $A^C = \{..., -2, -1, 0, 4, 5, 6, ...\}$.

Podemos observar com isso, que o *conjunto universo não é único.* Nas três operações que definimos, ele é representado pelo conjunto X.

Observemos que a propriedade que define o conjunto A^C é a negação da propriedade P que define o conjunto A. Aqui, aparece novamente o conectivo representado pelo símbolo $\sim$. Assim, se

$$A = \{x \in X/\ x \text{ tem a propriedade } P\}$$

então

$$A^C = \{x \in X/\ x \text{ tem a propriedade } \sim P\}.$$

É bom lembrarmos que o contrário, o oposto estão ligados com o antônimo da palavra e é diferente da negação.

Vejamos algumas propriedades.

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$;
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Observação 1.2.5 *Essas relações são atribuidas ao matemático inglês Augustus de Morgan e nos dizem o que significa negar P ou Q e negar P e Q.*

- $A \cup A^C = X$;
- $A \cap A^C = \emptyset$;
- $(A^C)^C = A$;
- $\emptyset^C = X$;
- $X^C = \emptyset$.

Mostrando que $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$ estamos mostrando $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \Rightarrow \sim P$ e, reciprocamente. Chamamos essa última implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ de *contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$. É essa equivalência que nos dá a base das *demonstrações por absurdo.*

Antes de passarmos a próxima operação vamos fazer algumas colocações que julgamos serem úteis.

Definição 1.2.6 *Chamamos uma afirmação a qualquer sentença que é verdaderia (V), ou falsa (F).*

Temos as afirmações simples e as compostas.

Uma *afirmação composta* é uma afirmação formada por uma ou mais afirmações simples ligadas entre si por um dos 5 conectivos básicos (não, ou, e, se...então... e se e somente se).

Costumamos representar as afirmações simples por letras minúsculas $p, q, r, s, \ldots$ e chamá-las de *variáveis de afirmação.*

Para decidirmos se uma afirmação composta é V, ou F, devemos levar em conta a estrutura lógica da mesma e não as afirmações simples que a constitue. O primeiro passo nessa direção é passarmos a afirmação composta para a forma simbólica para depois podermos fazer uso do que chamamos de *tabela-verdade.*

Como exemplo, consideremos a afirmação: "João está na biblioteca ou ele não está na sala de aula". Passando a mesma para a forma simbólica ficamos com p ou $\sim q$ onde as variáveis de afirmação p e q são dadas por: p: João está na biblioteca, e q: João está na sala de aula.

Passando o seguinte exemplo, "se $x = 0$ então $x^2 = 0$ e se $x^2 = 0$ então $x = 0$", para a forma simbólica, ficamos com: $x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$.

Antes de passarmos às tabelas-verdade dessas afirmações, agora já na forma simbólica, vamos apresentar o nome e a notação de cada conectivo.

conectivo	nome	notação
não	negação	$\sim$
e	conjunção	$\wedge$
ou	disjunção	$\vee$
se ... então ...	condicional	$\Rightarrow$
se e somente se	bicondicional	$\Leftrightarrow$

Vejamos agora as tabelas-verdade das afirmações que envolvem apenas um dos 5 conectivos:

1. não

p	$\sim p$
V	F
F	V

2. e

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. ou

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. se ... então ...

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. se e somente se

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Com isso, somos capazes de construir a tabela-verdade da afirmação "João está na biblioteca ou ele não está na sala de aula". Assim, colocamos:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Observemos que a tabela-verdade de $p \Rightarrow q$ é a mesma de $\sim p \vee q$ e, conseqüentemente a de sua negação, isto é, de $\sim (p \Rightarrow q)$ é a mesma de $p \wedge \sim q$.

Até agora dada a afirmação $p \Rightarrow q$ temos a sua recíproca que é dada por $q \Rightarrow p$ e sua contrapositiva que já introduzimos como sendo $\sim q \Rightarrow \sim p$. Agora vamos apresentar sua *inversa*. Ela é definida por: $\sim p \Rightarrow \sim q$. Fazendo as tabelas-verdade de todas elas podemos ver que as tabela-verdade da afirmação dada e da sua contrapositiva são iguais. O mesmo acontece com as tabelas-verdade da recíproca e da inversa da afirmação dada.

Definição 1.2.7 *Dizemos que duas afirmações A e B são logicamente equivalentes quando elas têm a mesma tabela-verdade. Nesse caso, escrevemos $A \equiv B$.*

Observação 1.2.8 *Ao compararmos duas tabelas devemos ter certeza de que as variáveis de afirmação foram consideradas na mesma ordem em cada uma delas.*

Até aqui:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	afirmação $p \Rightarrow q$	recíproca $q \Rightarrow p$	inversa $\sim p \Rightarrow \sim q$	contrapositiva $\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Temos então as seguintes equivalências lógicas:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$
$$\text{e}$$
$$q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$$

e somente essas.

Exemplo. Consideremos

$$p : x = 2$$
$$q : x^2 = 4$$

e daí, a afirmação $p \Rightarrow q$. Dar suas contrapositiva, recíproca e inversa.

Definição 1.2.9 *Um argumento é uma seqüência finita de afirmações simples ou compostas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que chamamos de premissas, seguida por uma afirmação A, que chamamos de conclusão. Dizemos que um argumento é válido quando não ocorre V para $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ e F para A na tabela-verdade da implicação $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow A$.*

Observação 1.2.10 *Um argumento pode ser verdadeiro mesmo com conclusão falsa!!!*

Definição 1.2.11 *Chamamos de proposição a todo argumento do tipo "se ... então ... ".*

1.2.4 Diferença

Definição 1.2.12 *Definimos a diferença de A e B e denotamos $A - B$ ao conjunto formado pelos elementos que estão em A e que não estão em B. Formalizando,*

$$A - B = \{x \in X / x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Usando somente as operações anteriores, temos: $A - B = A \cap B^C$.

Temos também: $A - B \subset A$ e $A - B \subset B^C$.

Essa operação não é comutativa e também não é associativa (Que tal procurar um exemplo?), mas tem elemento neutro ($\emptyset$) e elemento oposto (o elemento oposto do conjunto A é o próprio conjunto A).

1.2.5 Diferença Simétrica

Vimos que a operação de diferença não é comutativa e nem associativa. Gostaríamos de contornar esses problemas definindo uma nova operação diferença.

Definição 1.2.13 *Definimos a diferença simétrica de dois conjuntos A e B e denotamos $A \triangle B$ como sendo o conjunto formado por todos os elementos de A que não estão em B ou todos os elementos de B que não estão em A. Assim, $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.*

Como $A - B = A \cap B^C$, podemos escrever $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$.

Vejamos as propriedades:

- comutativa: $A \triangle B = B \triangle A$;
- associativa: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
- elemento neutro ($\emptyset$): $A \triangle \emptyset = A = \emptyset \triangle A$;
- elemento oposto: $A \triangle A = \emptyset = A \triangle A$;

1.2.6 Produto Cartesiano (Descartes: matemático do século XVII)

Definição 1.2.14 *Chamamos de par ordenado a um objeto da forma (x, y) onde x é chamado de primeira coordenada e y de segunda coordenada do par. Dizemos que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais quando $a = c$ e $b = d$.*

Observação 1.2.15 *Aqui a ordem dos elementos é extremamente importante. Não podemos confundir o par ordenado (x, y) com o conjunto $\{x, y\}$. Ainda, $(x, y) \neq (y, x)$ quando $x \neq y$.*

Definição 1.2.16 *Definimos o produto cartesiano de dois conjuntos A e B e denotamos $A \times B$ o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) onde $x \in A$ e $y \in B$. Assim,*

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Observação 1.2.17 *Tiramos que* $A \times B \neq B \times A$, *a menos que* $A = B$. *Ainda, intuitivamente, se* A *tem* m *elementos e* B *tem* n *elementos então* $A \times B$ *tem* $m.n$ *elementos.*

Costumamos convencionar: $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$ e $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos

2.1 Introdução

Para analisar situações concretas do dia-a-dia, da vida real, utilizamos os modelos apresentados pela Matemática. Nesse sentido, para disciplinar o raciocínio lógico, usamos como modelo os conjuntos. Os números naturais são tomados como modelo para contagem e para medida nos valemos dos números reais. Mas, afinal, *o que são números*?

"Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza".

Embora do ponto de vista do rigor matemático o trecho acima não possa ser considerado como definição uma vez que faz uso de idéias como grandeza e de processos como contagem e medida, ele nos diz para que servem e qual o motivo pelo qual foram criados os números.

Como dissemos anteriormente, com a finalidade de clareza e economia de raciocínio, as definições matemáticas atribuem nomes a objetos que têm certas propriedades.

Assim, ao apresentarmos uma teoria matemática, toda definição deve fazer uso de termos específicos. Esses últimos são definidos através de outros termos e assim sucessivamente até pararmos numa palavra ou conjunto de palavras que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de *conceitos primitivos*. Como exemplo citamos os três conceitos básicos da teoria de conjuntos, a lembrar: elemento, conjunto e relação de pertinência.

Para podermos usar os conceitos primitivos de maneira adequada precisamos de um conjunto de princípios ou um conjunto de regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Assim como os conceitos primitivos são objetos que não se definem, os *axiomas ou postulados* são proposições que não se demonstram.

Uma vez feita a lista dos conceitos primitivos e enunciados os axiomas de uma teoria matemática, devemos definir todas as demais noções. Devemos também demonstrar todas as afirmações que aparecem a seguir. Nisso consiste o que chamamos de *método axiomático.* Chamamos de *teoremas* a essas afirmações, isto é, a essas proposições que devemos demonstrar. Denominamos *corolários* às conseqüências imediatas dos teoremas. Chamamos de *lema* a qualquer proposição auxiliar usada na demostração de um teorema. Convém colocarmos que dependendo da preferência de quem organiza a apresentação de uma teoria, uma determinada proposição pode ser encarada como axioma ou provada como teorema, fazendo-se assim as devidas modificações para que a consistência da mesma seja mantida, isto é, para que não ocorram perdas.

Na seção seguinte vamos apresentar um resumo da teoria matemática dos números naturais. Nela os conceitos primitivos são *número natural* e *sucessor* e os axiomas são os *axiomas de Peano.*

2.2 O Conjunto dos Números Naturais

O modelo abstrato de contagem (um, dois, três, ...) apareceu como conseqüência do desenvolvimento humano. Hoje, graças ao matemático italiano Giuseppe Peano (séc. XX), podemos descrever precisamente o conjunto $\mathbb{N}$ cujos elementos chamamos de *"números naturais"*.

A descrição desse conjunto fica por conta da palavra *"sucessor"*. Intuitivamente, sabemos que "logo depois"substitui o termo "sucessor", mas como não conseguimos definí-lo explicitamente, para nós, trata-se de um termo primitivo. Tendo os conceitos primitivos, precisamos estabelecer um conjunto de axiomas. Esses vão dar aos números naturais um significado até agora, nesse primeiro momento, inexistente. Em outras palavras, não podemos ver $\mathbb{N}$ como o conjunto de símbolos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, \ldots$ Estes apenas representam números na base decimal. Com esse objetivo, colocamos a seguir, os axiomas de Peano. São eles:

1. todo número natural tem um único sucessor;

2. números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

3. existe um único número natural, que chamamos de *zero* e que denotamos 0, que não é sucessor de qualquer outro número natural;

4. se S é um conjunto de números naturais contendo 0, isto é, $0 \in S \subset \mathbb{N}$ e se o sucessor de todo elemento de S ainda está em S então $S = \mathbb{N}$.

Demonstramos tudo o que se conhece a respeito dos números naturais com esse conjunto de axiomas. Em outras palavras, não devemos imaginar $\mathbb{N}$ com mais propriedades do que as pedidas pelos axiomas de Peano.

Com isso, também tiramos que *o conjunto* $\mathbb{N}$ *não é único.*

Consideremos o conjunto formado pelos elementos colocados em cada linha abaixo:

$$\begin{gathered}\emptyset \\ \{\emptyset\} \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ \cdots\end{gathered}$$

Aqui o elemento que aparece em cada linha é o conjunto formado por todos os elementos que o antecedem. Dessa maneira, sabemos achar o sucessor de cada elemento e então verificamos os axiomas 1 e 2. Além disso, $\emptyset$ é o único elemento desse conjunto que não é sucessor de elemento algum e, portanto, temos o axioma 3. O zero é representado pelo símbolo $\emptyset$. Com o axioma 4, podemos escrever:

$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}.$$

Consideremos agora o conjunto formado pelos elementos dados pelas linhas abaixo:

$$\begin{gathered} \emptyset \\ \{\emptyset\} \\ \{\{\emptyset\}\} \\ \{\{\{\emptyset\}\}\} \\ \ldots \end{gathered}$$

Nesse caso, o elemento que aparece em cada linha é o conjunto unitário formado pelo elemento anterior. Temos então o sucessor que possibilita a verificação dos axiomas 1 e 2. Novamente, $\emptyset$ é o único elemento que não é sucessor de elemento algum e, portanto, 0 é representado aqui pelo símbolo $\emptyset$. Verificando agora o axioma 4, chegamos que:

$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}.$$

A apresentação desses dois casos, é suficiente para ver que $\mathbb{N}$ não é único.

A diferença está na maneira como consideramos o sucessor de cada elemento.

Concluímos então que para descrever $\mathbb{N}$ precisamos saber determinar o sucessor de um elemento e também escolher o zero.

Fixados o sucessor, o elemento 0 (que não é sucessor de elemento algum do conjunto) e conseqüêntemente $\mathbb{N}$, podemos escolher um sistema de numeração para representar os números naturais.

Geralmente escolhemos o sistema de numeração decimal, onde usamos os símbolos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 e suas combinações.

Podemos também adotar outros sistemas de numeração. Vejamos isso.

Tomemos o número 273 no sistema decimal, isto é, na base dez. Usando potências de 10, temos $273 = 2.(10)^2 + 7.(10)^1 + 3.(10)^0$. Para usarmos a base binária, devemos usar potências de dois. Assim, chegamos a $1.(2)^8 + 0.(2)^7 + 0.(2)^6 + 0.(2)^5 + 1.(2)^4 + 0.(2)^3 + 0.(2)^2 + 0.(2)^1 + 1.(2)^0 =$

100010001. Os dois numerais 273 e 100010001 representam o mesmo elemento de $\mathbb{N}$, isto é, o mesmo número natural; o primeiro na base decimal e o segundo na base binária.

Com isso, estabelecemos também a diferença entre *numeral* e *número* (natural).

Quando usamos a base decimal, os símbolos disponíveis são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 e quando usamos a base binária, ficamos reduzidos aos símbolos 0 e 1.

Costumamos também colocar nomes nos primeiros números naturais. Assim, o sucessor do número natural *zero* é o número natural *um*. O sucessor do número natural *um* chama-se número *dois*. O sucessor do número natural *dois* chama-se número *três*, ... Somente colocamos nomes nos primeiros números naturais pois a partir de certo ponto, esses nomes tornam-se muito complicados.

Se quisermos adotar como base a dúzia, vamos precisar de 12 símbolos. Uma possibilidade seria usarmos parte do nosso alfabeto: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m$. Assim, o zero estaria aqui representado pela letra a, seu sucessor por b, ... O número dez é representado pela letra l, o número onze pela m, o doze é ba, o treze é bb, o quatorze é bc, ... Assim, o número natural que na base 10 (potências de 10) é representado pelo numeral 2701 é representado nessa outra base (potências de ba) por $bgjb$.

Considerando o alfabeto latino completo, vamos ter 25 símbolos, isto é, vamos estar trabalhando na base 25.

Como seria representado seu nome na base decimal?

Resumindo, concluimos que o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ é uma seqüência de objetos abstratos que, em princípio, não tem significado algum. Cada um desses objetos, um número natural, possui apenas um lugar nessa seqüência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição.

Além disso, todo número natural n tem apenas e somente um sucessor que denotamos $n + 1$ e, com exceção do 0, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor) que denotamos $n - 1$.

No primeiro caso apresentado, $n+1 = n \cup \{n\}$ e no segundo, $n+1 = \{n\}$.

Considerando $\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$ temos $\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\} = (5)_{10} = 5.(10)^0 = 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = (101)_2 = 1.3^1 + 2.3^0 = (12)_3$.

A questão eterna de se saber se 0 deve ou não ser incluído entre os números naturais é apenas uma questão de preferência.

2.3 O Axioma da Indução

Chamamos o último axioma de Peano de *axioma da indução*. Ele é a base de um método de demonstração de proposição, referente a números naturais, que chamamos de *demonstração por indução ou por recorrência*.

Vejamos o princípio envolvido através de alguns exemplos.

Exemplos

- Suponhamos que queremos mostrar que $n < 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. É claro que para cada valor de n temos uma desigualdade. Para $n = 0$, temos que $0 < 2^0 = 1$ é verdadeira. Suponhamos que $k < 2^k$. Vamos mostrar que a desigualdade vale para o sucessor de k, isto é, para $k+1$. Como $k < 2^k$ então $k+1 < 2^k+1 \leq 2^k+2^k = 2^{k+1}$. Daí, como a desigualdade vale para 0 então vale para o seu sucessor que é 1. Valendo para 1, vale para o seu sucessor 2. Desse modo, aplicando repetidamente os passos, concluímos que a desigualdade vale para qualquer número natural.

- Vamos mostrar que $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Vejamos se a igualdade é válida para $n = 0$. Temos $0 = 0(1)/2$ que sabemos ser verdadeira. Suponhamos que a igualdade vale para k, isto é, $0+1+2+\ldots+k = k(k+1)/2$. Vejamos se a igualdade vale para o sucessor de k, $k+1$. Temos $0+1+\ldots+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k+2)/2$. Aplicando então esses dois passos sucessivamente, concluímos que a igualdade vale para todo natural n.

Com esses dois exemplos podemos descrever o Princípio de Indução Matemática.

Princípio de Indução Matemática. Seja $P(n)$ uma propriedade que envolve um número natural n e que satisfaz as seguintes condições:

- $P(0)$ é verdadeira;
- $P(k)$ é V $\Rightarrow P(k+1)$ é V.

Então $P(n)$ é V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O Princípio de Indução Matemática nos diz que todo número natural n pode ser atingido ou alcançado se repetirmos o processo de tomar o sucessor de um número natural.

2.3.1 As Operações de Adição e de Multiplicação

No conjunto dos números naturais temos duas operações a de *adição* e a de *multiplicação* cujos resultados, também números naturais, chamamos de *soma* e de *produto*, respectivamente.

Dados dois números naturais n e m, a soma $n+m$ é o número natural que obtemos quando a partir de n aplicamos m vezes a operação de tomar o sucessor. Já o produto $n.m$ é a soma de m parcelas iguais a n, quando $m \neq 1$. Se $m = 1$, definimos $n.1 = n$.

Essas operações tem as seguintes propriedades:

1. adição
   - comutativa: $m+n = n+m$;
   - associativa: $(m+n)+p = m+(n+p)$;
   - elemento neutro (zero): $m+0 = m = 0+m$.
2. multiplicação
   - comutativa: $m.n = n.m$;

- associativa: $(m.n).p = m.(n.p)$;
- elemento neutro (um): $m.1 = m = 1.m$.

Relacionando as duas operações temos as propriedades distributivas:

- $m.(n+p) = m.n + m.p$
- $(m+n).p = m.p + n.p$.

2.4 A Ordem entre os Números Naturais

Definição 2.4.1 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dizemos que m é menor do que n e denotamos $m < n$ quando existe ($\exists$) algum número natural p com $n = m+p$.*

Essa relação tem as seguintes propriedades:

- transitividade: $m < n$ e $n < p \Rightarrow m < p$;
- tricotomia: dados $m, n \in \mathbb{N}$ vale uma e somente uma das alternativas $m = n$, $m < n$, ou $n < m$;
- monotonicidade: se $m < n$ então $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Princípio da Boa Ordenação. Todo subconjunto X de $\mathbb{N}$, não-vazio, possui um menor elemento, isto é, $\exists\ n_0 \in X$ com $n_0 < n$, $\forall\ n \in X$ com $n \neq n_0$.

Um resultado fundamental em Aritmética nos diz que todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos.

Vejamos isso através do Princípio da Boa Ordenação.

Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos.

Observemos que se m e n pertencem a X então o produto $m.n$ também pertence a X.

Seja Y o complementar de X em $\mathbb{N}$.

Então Y é o conjunto dos números naturais que não são primos e nem produtos de fatores primos.

Queremos mostrar que $Y = \emptyset$.

Suponhamos que $Y \neq \emptyset$.

Então pelo Princípio da Boa Ordenação Y possui um menor elemento.
Seja a esse menor elemento.
Todos os números naturais menores do que a pertencem a X.
Como $a \in Y$, a não é primo e, portanto, $a = m.n$ com $m, n < a$.
Logo, $m, n \in X$ e daí, o produto $m.n \in X$.
Mas, $m.n = a$ e assim, concluimos que $a \in X$.
Temos então uma contradição já que a é o menor elemento de Y e $Y = X^C$, isto é, $a \in X^C$.

Com esse princípio, mostramos o Princípio de Indução Matemática na forma forte.

Princípio de Indução Matemática (forma forte). Seja $P(n)$ uma proposição que envolve um número natural n e que satisfaz as seguintes condições:

- $P(0)$ é verdadeira;
- $\forall\ a \in \mathbb{N}$ com $a \neq 0$, $P(k)$ é V, $\forall\ k < a \Rightarrow P(a)$ é V.

Então $P(n)$ é V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Números Cardinais

Vimos que os números naturais constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Podemos fazer a seguinte colocação: *Quantos elementos tem este conjunto?*

3.1 Funções

Definição 3.1.1 *Dados dois conjuntos X e Y, chamamos uma função f de X em Y, e denotamos $f : X \to Y$, a uma regra que nos diz como associar a todo elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Chamamos o conjunto X de domínio da função f e o conjunto Y de contra-domínio dessa função. Para cada $x \in X$, chamamos o elemento associado $y \in Y$ de imagem de x pela função f e denotamos o mesmo por $f(x)$, isto é, escrevemos $y = f(x)$ para indicar que o elemento y é o elemento que foi associado ao elemento x. Outra maneira de se escrever isso é $x \mapsto f(x)$ (f transforma ou leva x em $f(x)$).*

Exemplos

1. função identidade:

$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

2. função constante:

$$
\begin{aligned}
f : X &\to X \\
x &\mapsto f(x) = c \text{ onde } c \in Y
\end{aligned}
$$

Observação 3.1.2 *1. É correto dizermos: "a função f". Mas, não é correto a expressão: "a função $f(x)$"já que $f(x)$ é, na verdade, a imagem do elemento x.*

Também é correto as expressões:

- *as funções* sin, cos, ...
- *a função p tal que $p(x) = x^2 - 5x + 6$*
- *a função exp ($x \mapsto exp(x) = e^x$)*

2. Aqui os três conceitos primitivos são: domínio, contra-domínio e a regra de associação ($x \mapsto f(x)$).

Quando dizemos "a função f"ficam subentendidos seu domínio X e seu contra-domínio Y, sem os quais a mesma não existe.

Com essas observações, concluímos que não faz sentido perguntarmos sobre o domínio da função $f(x) = 1/x$. A pergunta correta é: "Qual é o maior subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tal que a fórmula $f(x) = 1/x$ define uma função $f : X \to \mathbb{R}$?"

Isso tudo nos leva a dizer que: *duas funções $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são iguais quando $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.*

Exemplos

1. Sejam $X = \{$ triângulos de um plano $\pi\} = \{t \in \pi /\ t$ é triângulo$\}$ e $Y = \mathbb{R}$ (conjunto dos números reais).

   Consideremos a regra: $t \mapsto f(t)$ onde $f(t)$ é a área do triângulo t. Então $f : X \to \mathbb{R}$ onde $t \mapsto f(t)$ define uma função.

2. Sejam $S = \{$ segmentos de reta do plano $\pi\}$ e $\Delta = \{$ retas do plano $\pi\}$. A cada segmento AB associemos $g(AB) = m$ onde m é a mediatriz do segmento AB. Então $g : S \to \Delta$ onde $AB \mapsto g(AB) = m$ define uma função.

3. Sejam $X = Y = \mathbb{N}$ e a regra $n \mapsto s(n) = n + 1$ (sucessor de n). Então $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ onde $s(n)$ foi dado é uma função.

Definição 3.1.3 *Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é injetora (ou injetiva) quando elementos distintos de X são associados a elementos distintos de Y. Simbolicamente, $x \neq x'$ em $X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ em Y.*

Se expressarmos essa condição em sua forma contrapositiva, ficamos com a equivalência: $f(x) = f(x')$ em $Y \Rightarrow x = x'$ em X.

Como dois triângulos diferentes podem ter a mesma área e dois segmentos distintos podem ter a mesma mediatriz, concluímos que as funções apresentadas nos exemplos 1. e 2. anteriores não são injetoras.

Como números naturais diferentes têm sucessores diferentes (axioma 2 de Peano) então a função sucessor s (do exemplo 3.) é injetora.

Definição 3.1.4 *Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é sobrejetora (ou sobrejetiva) quando qualquer (todo) elemento $y \in Y$ é imagem de algum elemento $x \in X$. Simbolicamente, f é sobrejetora quando $\forall\, y \in Y$, $y = f(x)$ para algum $x \in X$, isto é, quando $\forall\, y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tal que $y = f(x)$.*

Dos três exemplos de funções que apresentamos, apenas o exemplo 2. é um exemplo de função sobrejetora já que toda reta do plano é mediatriz de algum segmento (apenas os números reais positivos podem ser áreas de triângulos; o número natural 0 não é sucessor de número natural algum).

Definição 3.1.5 *Seja $A \subset X$. Definimos a imagem de A, e denotamos $f(A)$, como o subconjunto de Y formado pelos elementos $f(x)$ com $x \in A$. Simbolicamente,*

$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$

ou, equivalentemente,

$$f(A) = \{y \in Y/\ y = f(x) \text{ com } x \in A\}$$

Com essa definição, podemos concluir que $f : X \to Y$ é uma função sobrejetora quando $f(X) = Y$.

Chamamos o conjunto $f(X)$ de *imagem da função f*.
Em linguagem formal,

$$f(X) = \{f(x)/x \in X\}$$

ou, equivalentemente,

$$f(X) = \{y \in Y/\ y = f(x) \text{ com } x \in X\}$$

Vejamos qual é a imagem das funções dos exemplos apresentados.

- exemplo 1: $f(X) = \mathbb{R}_+$;
- exemplo 2: $g(S) = \Delta$;
- exemplo 3: $s(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N}/n \geq 1\}$.

Observação 3.1.6 *Dada uma função $f : X \to Y$, para se saber se um certo $y \in Y$ é imagem de algum elemento $x \in X$ ou, em outras palavras, se um certo $y \in Y$ pertence à imagem $f(X)$, devemos resolver a equação $f(x) = y$, isto é, devemos procurar algum $x \in X$ que satisfaz $f(x) = y$. Conseqüentemente, para mostrarmos que f é sobrejetora, devemos provar que a equação $f(x) = y$ possui uma solução $x \in X$ seja qual fôr $y \in Y$ dado.*

Vamos agora refletir mais um pouco sobre a definição de função dada. Mais especificamente sobre:"*a uma regra que nos diz como associar a todo elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.*

Sejam $X = \mathbb{R}_+$ e $Y = \{$ triângulos do plano$\}$. Para cada $x \in X$, vamos colocar $f(x) = t$ onde t é um triângulo com área x. Essa tentativa de definirmos uma função é na realidade, frustrada pois dado um número real $x > 0$, existem muitos triângulos diferentes com área x. Assim, a cada elemento de X estamos associando mais do que um elemento de Y e, portanto, essa regra não define uma função.

Definição 3.1.7 *Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é bijetora (ou uma bijeção) (ou uma correspondência biunívoca entre X e Y) quando f é injetora e sobrejetora.*

Exemplos

1. Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Então a regra $n \mapsto 2n$ define uma função $f : X \to Y$ bijetora.

2. Sejam $X = \mathbb{N}$ e $Y = \{\text{naturais pares}\}$. Então a mesma regra $n \mapsto 2n$ define uma função $f : \mathbb{N} \to Y$ bijetora, embora tenhamos $Y \subset \mathbb{N}$.

3. Sejam Y a base de um triângulo e X um segmento paralelo a Y unindo os outros dois lados desse mesmo triângulo. Consideremos P o vértice oposto à base Y. Então a regra $x \in X \mapsto f(x) \in Y$ onde $f(x)$ é o ponto onde a semi-reta Px intersecta a base Y, define uma função bijetora.

4. Seja γ uma circunferência. Consideremos $P \in \gamma$, $X = \gamma - \{P\}$ e Y a reta perpendicular ao diâmetro de γ que contém P. Então a regra $x \in X \mapsto f(x)$ onde $f(x)$ é a interseção da semi-reta Px com a reta Y, nos dá uma função bijetora.

Definição 3.1.8 *Dizemos que dois conjuntos X e Y têm o mesmo número cardinal ou a mesma cardinalidade quando conseguimos estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e Y, isto é, conseguimos definir uma função bijetora $f : X \to Y$.*

Exemplo Se considerarmos os conjuntos $X = \{1\}$ e $Y = \{1, 2\}$ não vamos conseguir definir $f : X \to Y$ bijetora e, sendo assim, concluímos que X e Y não têm o mesmo número cardinal.

3.2 Conjuntos Finitos

Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos indicar com a notação I_n o conjunto dos números naturais de 0 até n, isto é, $I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Então

$$\begin{aligned} I_0 &= \{0\}, \\ I_1 &= \{0, 1\}, \\ I_2 &= \{0, 1, 2\}, \\ &\vdots \\ I_n &= \{0, 1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Com isso, $k \in I_n \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n$.

Definição 3.2.1 *Seja X um conjunto. Dizemos que X é finito quando podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre X e I_n, para algum $n \in \mathbb{N}$. Ou, em outras palavras, quando existe uma função $f : I_n \to X$*

bijetora para algum $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos também que X tem $n+1$ elementos e que o número natural $n+1$ é o número cardinal do conjunto X ou, simplesmente, o número de elementos de X. Chamamos a função $f : I_n \rightarrow X$ de contagem dos elementos de X.

Se colocarmos

$$\begin{aligned} f(0) &= x_1, \\ f(1) &= x_2, \\ f(2) &= x_3, \\ &\vdots \\ f(n) &= x_{n+1} \end{aligned}$$

vamos poder escrever $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto I_n é finito e seu número cardinal é $n+1$.

Incluindo-se o conjunto $\emptyset$ entre os conjuntos finitos e dizendo que esse conjunto tem 0 elementos, concluímos que todo número natural n é o número cardinal de algum conjunto finito.

Definição 3.2.2 *Dizemos que um conjunto X é infinito quando não é finito.*

Isso significa dizer que $X \neq \emptyset$ e que não importa qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe uma função bijetora $f : I_n \rightarrow X$.

Exemplos

1. O conjunto $X = I_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ é finito pois existe $f : I_5 \rightarrow X$ bijetora. Basta considerar f como sendo a função identidade.

2. O conjunto $X = \mathbb{N}$ é infinito pois $\forall\ n \in \mathbb{N}$, a função $f : I_n \rightarrow \mathbb{N}$ não é bijetora já que não é sobrejetora. Para ver isso, basta considerarmos $k = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots f(n)$. Com esse k, vem que $\forall\ x \in I_n$, $f(x) < k \Rightarrow$ não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$.

Vamos indicar o número cardinal (número de elementos) de um conjunto finito X por $\eta(X)$.

3.2.1 Propriedades do Números Cardinais

1. O número de elementos de um conjunto finito é o mesmo seja qual for a contagem que se adote;

2. Se X é um conjunto finito e $Y \subset X$ então Y é um conjunto finito e $\eta(Y) \leq \eta(X)$. Além disso, $\eta(Y) = \eta(X)$ somente quando $Y = X$;

3. Se X e Y são conjuntos finitos então $X \cup Y$ é um conjunto finito e $\eta(X \cup Y) = \eta(X) + \eta(Y) - \eta(X \cap Y)$;

4. Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $\eta(X) > \eta(Y)$. Então nenhuma função $f : X \to Y$ é injetora e nenhuma função $g : Y \to X$ é sobrejetora.

A primeira parte dessa última propriedade é conhecida como *princípio das casas dos pombos* ou *princípio das gavetas*. Para o primeiro tomamos $X = \{\text{pombos}\}$ e $Y = \{\text{casas dos pombos}\}$ e no segundo $\eta(X)$ =número de objetos a serem distribuidos e $\eta(Y)$ =número de gavetas onde os objetos devem ser distribuidos.

Como uma aplicação interessante do Princípio das Casas dos Pombos, escolhamos um número natural de 1 a 9. Suponhamos que 5 seja esse número. Então é possível mostrar que todo número natural m possui um múltiplo cuja representação decimal contém apenas os algarismos 5 ou 0.

Outra aplicação que decorre desse Princípio é que numa reunião com n pessoas ($n \geq 2$) há sempre duas pessoas (no mínimo) que tem o mesmo número de amigos naquele grupo.

O matemático Cantor (metade do século XIX) foi o responsável pela adoção da linguagem e da notação dos conjuntos. Mas, sua maior contribuição está no fato de que ele foi o primeiro a descobrir que existem conjuntos infinitos com diferentes cardinalidades. Por exemplo, não existe correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, entre X e $P(X)$,... Reta, plano e espaço têm o mesmo número cardinal,...

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR F.º, E. *Teoria Elementar dos Conjuntos.* 2 ed. São Paulo, Nobel, 1985.

[2] BEZERRA, M. J.; PUTNOKI, J. C. *Novo Bezerra (Matemática), 2.º grau.* São Paulo, Scipione, 1994.

[3] BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. *A Survey of Modern Algebra.* 4 ed., N. York, Macmillan, 1977 .

[4] DORNHOFF, L. L.; HOHN, F. E. *Applied Modern Algebra.* N. York, Macmillan, 1978.

[5] FERNANDEZ, V. P.; YOUSSEF, A. N. *Matemática: conceitos e fundamentos, 2.o grau.* V. 1, São Paulo, Scipione, 1993.

[6] HALMOS, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* São Paulo, Polígono, 1973.

[7] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio.* V. 1, SBM, Rio de Janeiro, 1997.

[8] LIN, Y. F.; SHWU-YENG, T. L. *Set Theory: An intuitive Approach.* Atlanta, Houghton Mifflin, 1974.

[9] MILANO, J. *Notas de Álgebra Moderna.* Rio Claro: FFCL, 1993.

[10] POTTER, M. D. *Sets: An Introduction.* Oxford, Claredon Press, 1990.

[11] TIZZIOTTI, J. G. *Matemática. Programa Completo: 2.o grau, Vestibular,* São Paulo, Ática, 1982.