

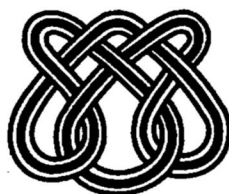
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**Classes Características de Variedades
Singulares**

Jean-Paul Brasselet

Nº 56

NOTAS DIDÁTICAS



Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2585

**Classes Características de Variedades
Singulares**

Jean-Paul Brasselet

Nº 56

NOTAS DIDÁTICAS



São Carlos
Jul./2002

Jean-Paul Brasselet

CLASSES CARACTERÍSTICAS DE VARIEDADES SINGULARES

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
Julho de 2002
São Carlos, SP

Sumário

Introdução	1
1. A característica de Euler-Poincaré	3
1.1 Definição combinatória	3
1.2 Números de Betti	5
1.3 Teorema de Poincaré-Hopf	6
1.3.1 Caso suave	6
1.3.2 Caso singular	8
1.4 Teoria de Morse	10
1.5 Fórmula de Gauss-Bonnet	12
2. Classes características - Caso de variedades suaves	13
2.1 História	13
2.2 Fibrados	14
2.3 Definição por obstrução	15
2.4 Classes de Chern. Definição por obstrução	18
2.5 Teoremas de classificação	19
2.6 Definição axiomática das classes de Chern	20
2.7 Conclusão	21
3. Variedades singulares	22
3.1 Estratificações de Whitney	23
3.2 Triangulações	25
3.3 Tubos	26
3.4 Campos radiais	27
3.4.1 Prolongamento por paralelismo	28
3.4.2 Campos transversais	29
3.4.3 Prolongamento radial local	29

4. Classes de Chern de variedades singulares	30
4.1 Classes de Schwartz	30
4.2 Conjectura de Deligne e Grothendieck	32
4.3 Classes de Mather	33
4.4 Obstrução de Euler local	34
4.5 Classes de MacPherson	36
5. Classes de Fulton, classes de Milnor	39
5.1 Classes de Fulton (1984)	39
5.2 Classes de Milnor	40
5.3 Descrição em termos de funções construtíveis [PP3]	42
5.4 Especialização (o caso hipersuperfície) [PP3]	42
Referências Bibliográficas	44

Introdução

A característica de Euler-Poincaré é o primeiro exemplo de classe característica, definida para um poliedro finito como a soma alternada, sobre i , dos números de simplexes de dimensão i . Esta definição foi dada por Euler em dimensão dois e por Poincaré nas demais dimensões. A fórmula de Poincaré-Hopf fornece uma interpretação geométrica da característica de Euler-Poincaré no caso de uma variedade compacta suave M em termos de obstrução à construção de um campo de vetores tangente a M . Mais tarde, foram descobertas outras interpretações da característica de Euler-Poincaré, mostrando o interesse desta noção. O artigo de Elon Lima [Li] no primeiro número da revista *Matemática Universitária*, editada pela SBM, dá uma excelente visão geral sobre a característica de Euler-Poincaré, relacionando as diferentes noções.

As classes de Chern, no caso complexo e as de Stiefel-Whitney, no caso real, generalizam a noção da característica de Euler-Poincaré. Elas foram primeiramente definidas como obstrução à construção de campos de r -referenciais tangentes a uma variedade suave complexa, no primeiro caso, ou real, no segundo. Outras interpretações destas classes já aparecem no artigo de Chern [Ch] e também através da definição “axiomática” das classes. Na segunda seção daremos as definições das classes por obstrução e axiomática.

No caso de uma variedade singular, o fibrado tangente não existe mais. Existem pelo menos duas maneiras de generalizar o fibrado tangente. A primeira consiste em considerar a união dos fibrados tangentes aos estratos de uma estratificação da variedade e de considerar a obstrução à construção de r -referenciais adaptados. Isso é o ponto de vista de M.H. Schwartz [Sc1], na sua bonita construção de campos radiais dando a primeira definição de classes características para variedades analíticas complexas. A definição de R. MacPherson [MP2] generaliza a definição axiomática de classes de Chern, com uma prova da conjectura de Deligne e Grothendieck. De fato, foi provado em [B-S] que as definições de M.H. Schwartz e de R. MacPherson são as mesmas, via o isomorfismo de Alexander, e a partir daí tais classes foram chamadas de classes de Schwartz-MacPherson. Na Seção 3 recordamos as noções necessárias de variedades singulares e na Seção 4 as definições de M.H. Schwartz e

de R. MacPherson.

Outra maneira de substituir o fibrado tangente, no caso de uma variedade singular, é de considerar o fibrado virtual. Este ponto de vista foi o de Fulton [Fu], para definir classes características no caso de variedades singulares. As classes de Fulton não são iguais às de Schwartz-MacPherson. No caso de uma interseção completa local X , e mais geralmente de hipersuperfícies, é possível interpretar a diferença entre estas classes. Se X tem pontos singulares isolados, a diferença é a soma dos números de Milnor nos pontos singulares [Su]. No caso geral, vários autores dão interpretações desta diferença, chamada de classe de Milnor. Isso é o assunto da Seção 5.

Os espaços considerados neste curso são compactos, a maioria dos resultados podem ser estendidos no caso não compacto, usando homologia com suportes localmente finitos. O leitor interessado encontrará na literatura os resultados correspondentes.

Estas notas correspondem ao curso que foi dado em setembro de 2001 no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, Campus de São Carlos. Quero agradecer ao Instituto e especialmente a Maria Aparecida Ruas pelo convite para trabalhar num lugar bem agradável e favorável à pesquisa em matemática. Um resumo deste curso foi também ministrado no IMECC, Universidade de Campinas. Devo à Maria Aparecida Ruas a supervisão da edição deste curso. Eu quero agradecer especialmente à Maria Alice Bertolim de São Carlos e também ao Rogério Mol de Belo Horizonte pela correção dos meus erros de português. Os erros que permanecem vêm das minhas últimas mudanças, e não são imputáveis à Maria Alice ou Rogério. Para a edição das figuras contei com a inestimável ajuda da Maria Alice e do Sadao Massago, a quem também agradeço.

São Carlos, Julho 2002

Marselha, Novembro 2002

A característica de Euler-Poincaré

1.1 Definição combinatória

A história das classes características inicia em 1758, com a famosa fórmula de Euler: para um poliedro P de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, homeomorfo à esfera S^2 , temos

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2,$$

onde n_0 é o número de vértices de P , n_1 o número de arestas e n_2 o número de faces. Daí, para um poliedro P qualquer, de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, a soma alternada

$$\chi(P) = n_0 - n_1 + n_2$$

foi chamada característica de Euler de P .

Em 1893, Poincaré estende este resultado para poliedros finitos P de dimensão qualquer n em $\mathbb{R}^m$: sendo n_i o número de simplexes de dimensão i do poliedro P , a característica de Euler-Poincaré de P é definida por

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i n_i.$$

Sendo um poliedro finito P em $\mathbb{R}^m$, a reunião dos simplexes de P é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ denotado $|P|$ e chamado realização geométrica de P . Um espaço topológico X é chamado triangulável se existe um poliedro P e um homeomorfismo $h : |P| \rightarrow X$. O par (P, h) (ou mais simplesmente o poliedro P) é chamado triangulação de X . O resultado importante de Poincaré é que para duas triangulações P e Q do mesmo espaço X temos $\chi(P) = \chi(Q)$. Este número, independente da triangulação de X , é chamado característica de Euler-Poincaré de X e denotado $\chi(X)$.

Assim, para a esfera S^n temos $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

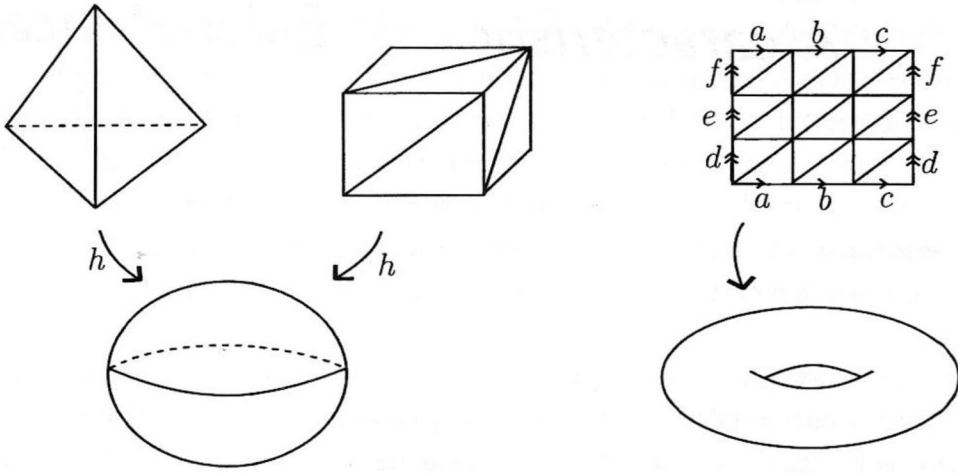


Figura 1.1 Triangulações da esfera S^2 e do toro T . O toro é obtido por identificação dos segmentos de mesmo nome respeitando orientação dos mesmos. Temos: $\chi(S^2) = 2$ e $\chi(T) = 0$.

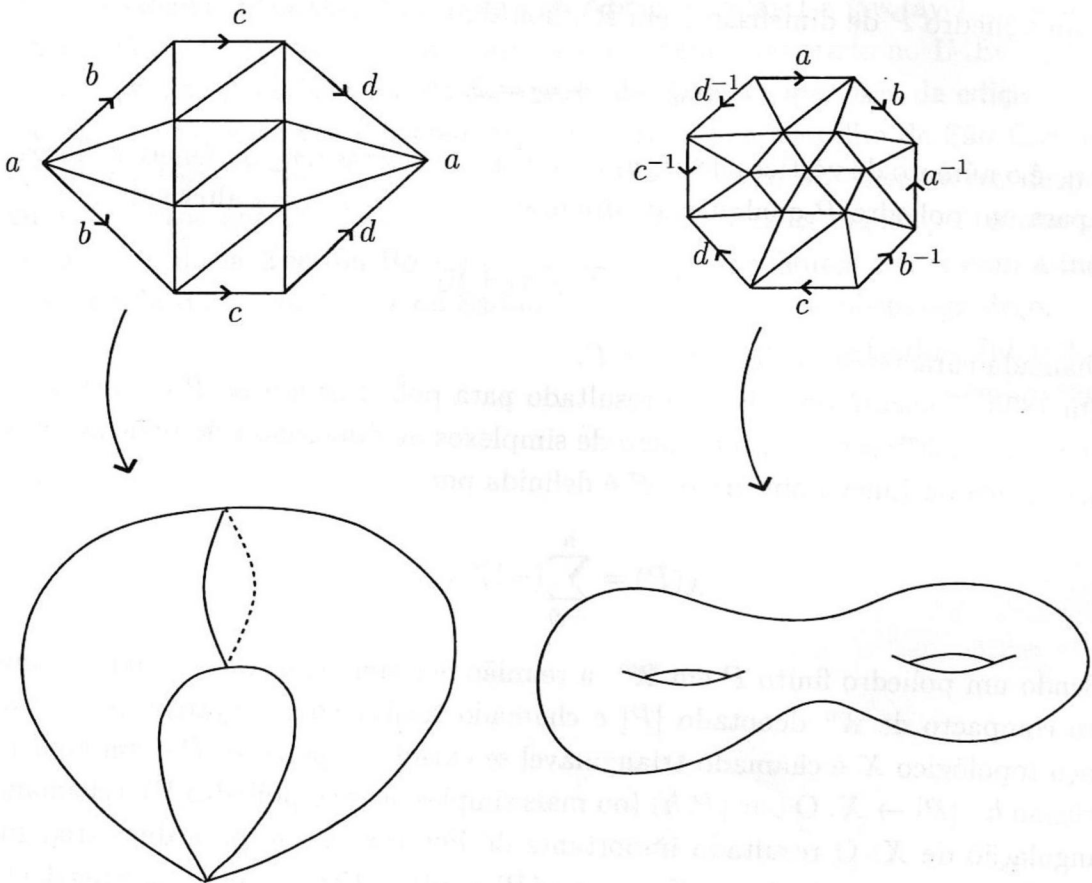


Figura 1.2 Triangulações do toro pinçado, X e do toro de gênero 2, T_2 . As superfícies são obtidas por identificação dos vértices e dos segmentos de mesmo nome respeitando orientação dos mesmos. Temos: $\chi(X) = 1$ e $\chi(T_2) = -2$.

1.2 Números de Betti

Os elementos $C_i(P)$ do complexo simplicial têm um número de geradores igual ao número de i -simplexos de (P) . Então eles são grupos abelianos livres finitamente gerados. Os subgrupos $Z_i(P) = \text{Ker}(\partial_i : C_i(P) \rightarrow C_{i-1}(P))$ e $B_i(P) = \text{Im}(\partial_{i+1} : C_{i+1}(P) \rightarrow C_i(P))$ são finitamente gerados como subgrupos de um grupo finitamente gerado. Por outro lado, os grupos de homologia $H_i(P, \mathbb{Z})$ são também finitamente gerados como quociente de grupos finitamente gerados. Podemos escrever

$$H_i(P, \mathbb{Z}) = L_i \oplus T_i$$

onde L_i é a parte livre e T_i o subgrupo de torsão de $H_i(P)$.

Definimos os números de Betti de P como o posto

$$\beta_i(P) = \text{rk}(H_i(P, \mathbb{Z})) = \text{rk}(L_i).$$

O Teorema de Poincaré é o seguinte:

Teorema 1.1 (Teorema Poincaré)

Seja P um poliedro finito de dimensão n em $\mathbb{R}^m$, com números de Betti $\beta_i(P)$, temos

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i(P).$$

Demonstração

Da seqüência longa

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1}(P) \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i(P) \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}(P) \longrightarrow \cdots$$

obtemos as seguinte igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i n_i &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim Z_i + \dim B_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\dim Z_i - \dim B_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i(P) \end{aligned}$$

e o teorema. □

Por outro lado, se (P) for a triangulação de uma variedade suave M , compacta, orientada, de dimensão n , temos o Teorema de dualidade de Poincaré:

Teorema 1.2

Seja P um poliedro finito, tal que $|P|$ seja uma variedade suave, compacta, orientada, de dimensão n . Temos

$$\beta_i(P) = \beta_{n-i}(P).$$

Alexander demonstrou em 1915 que duas triangulações do mesmo espaço topológico compacto X têm os mesmos números de Betti. Este resultado aprofunda o resultado de invariância de Poincaré: não somente a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de X mas também os números de Betti.

1.3 Teorema de Poincaré-Hopf

1.3.1 Caso suave

O Teorema de Poincaré-Hopf foi demonstrado em dimensão 2 por Poincaré em 1885, e em todas dimensões por Hopf em 1927.

Lembramos que uma variedade suave (ou não singular) de dimensão n é um espaço topológico M tal que para todo ponto x de M , existe uma vizinhança U_x homeomorfa a uma bola $B^n \subset \mathbb{R}^n$ e cujo bordo (o “link” de x) é homeomorfo à esfera S^{n-1} .

Denotaremos por M uma variedade diferenciável, suave, orientada de dimensão n . Denotamos por v um campo de vetores definido numa vizinhança do ponto a de M , com (eventualmente) uma singularidade isolada em a . No vocabulário dos fibrados (veja 2.2) isso significa que v é uma seção do fibrado tangente a M , nula (ou não definida) no ponto a . Seja $B(a)$ uma bola de raio suficientemente pequeno numa carta local de M , tal que a seja o único ponto singular de v em $B(a)$. Neste caso, o campo v é bem definido e sem singularidade sobre o bordo $S(a) = \partial B(a)$. Orientamos a esfera $S(a) \cong S^{n-1}$ conforme a orientação de M e definimos a aplicação de Gauss

$$\gamma : S(a) \cong S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

por $\gamma(x) = v(x)/\|v(x)\|$.

O grau da aplicação de Gauss é geometricamente o número de vezes que $\gamma(S(a))$ recobre S^{n-1} , isto é o grau da aplicação

$$\gamma_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Este grau é denotado $I(v, a)$ e chamado índice do campo v no ponto a . Ele não depende da escolha da bola $B(a)$. Veja [Li] para uma definição equivalente usando o índice de Kronecker.

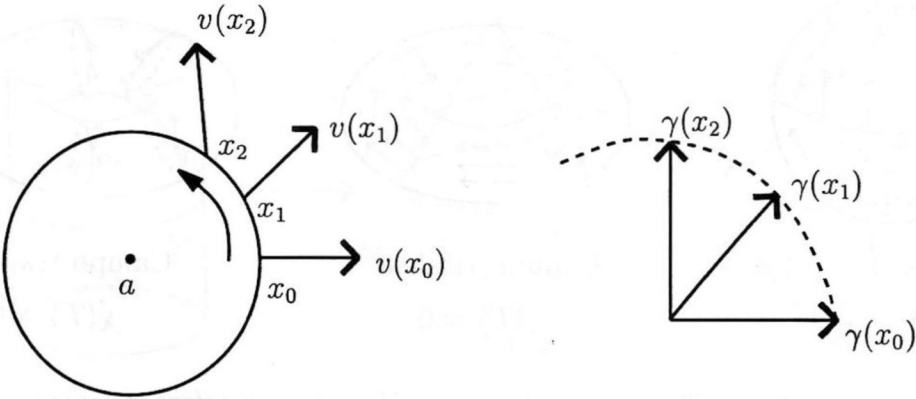


Figura 1.3 A aplicação de Gauss.

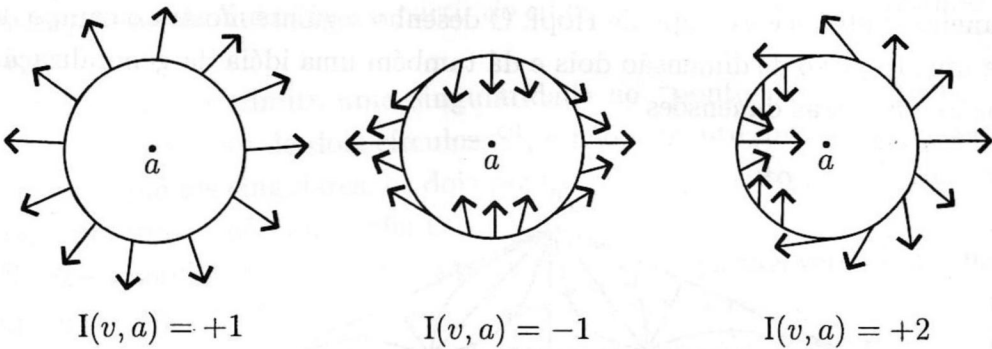


Figura 1.4 Campos de vetores em dimensão 2

Teorema 1.3

(Teorema de Poincaré-Hopf) *Sejam M uma variedade diferenciável, compacta, orientada, e v um campo de vetores tangente a M , com número finito de singularidades isoladas a_i . Temos*

$$\chi(M) = \sum_i I(v, a_i).$$

Se existe um campo de vetores tangente a M e sem singularidades, então $\chi(M) = 0$. Reciprocamente, se $\chi(M) = 0$, podemos construir um campo de vetores tangente a M sem singularidades. Se $\chi(M) \neq 0$, todo campo de vetores tangente a M tem singularidades. Nesse caso, é possível construir sobre M um campo de vetores com uma única singularidade (veja [Li]).

O Teorema de Poincaré-Hopf significa que a característica de Euler-Poincaré calcula a obstrução para a construção de um campo de vetores tangente a M , sem singularidades.

Para uma demonstração do Teorema de Poincaré-Hopf, veja por exemplo Lima [Li]. Um exemplo de campo de vetores dando a prova do Teorema de Poincaré-Hopf

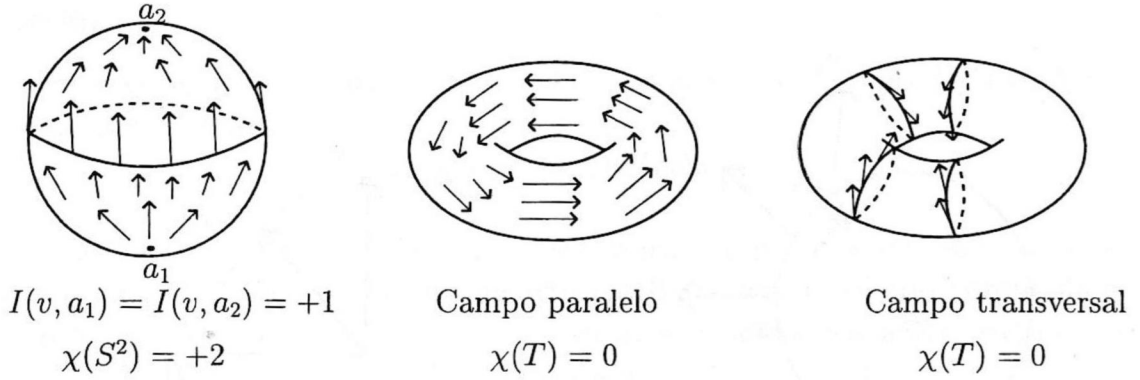


Figura 1.5 Teorema de Poincaré-Hopf para a esfera e o toro.

de uma maneira explícita é o campo de Hopf. O desenho seguinte mostra o campo de Hopf sobre um simplexo de dimensão dois e dá também uma idéia da generalização da construção em outras dimensões.

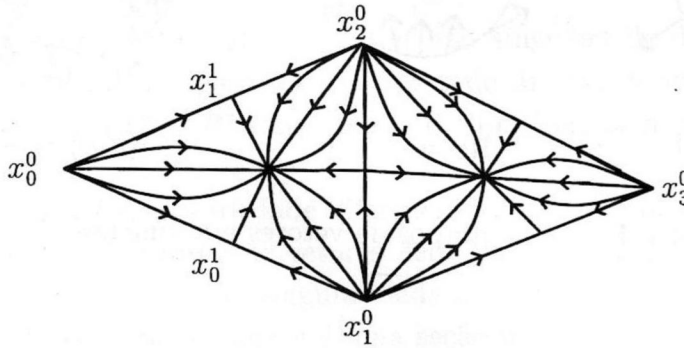


Figura 1.6 O campo de Hopf

Denotamos x_α^i os baricentros dos simplexos de dimensão i . O campo de Hopf sai dos vértices x_α^0 de (K) . Sobre cada 1-segmento $[x_\alpha^i, x_\beta^j]$ de (K') , com $i < j$, o campo é proporcional ao vetor (x_α^i, x_β^j) , com coeficiente $\lambda \in [0, 1]$, tal que $\lambda = 0$ nos vértices e $\lambda = 1$ ao meio do segmento. Nos 2-simplexos, o campo é obtido em termos de coordenadas baricêntricas. Podemos imaginar a situação geral e escrevê-la explicitamente a partir do exemplo em dimensão 2.

1.3.2 Caso singular

Um espaço topológico X é uma variedade singular no ponto a se não existe uma vizinhança de a homeomorfa à uma bola $B^n \subset \mathbb{R}^n$ e cujo bordo é homeomorfo à esfera S^{n-1} . O toro pinçado é um exemplo de variedade singular.

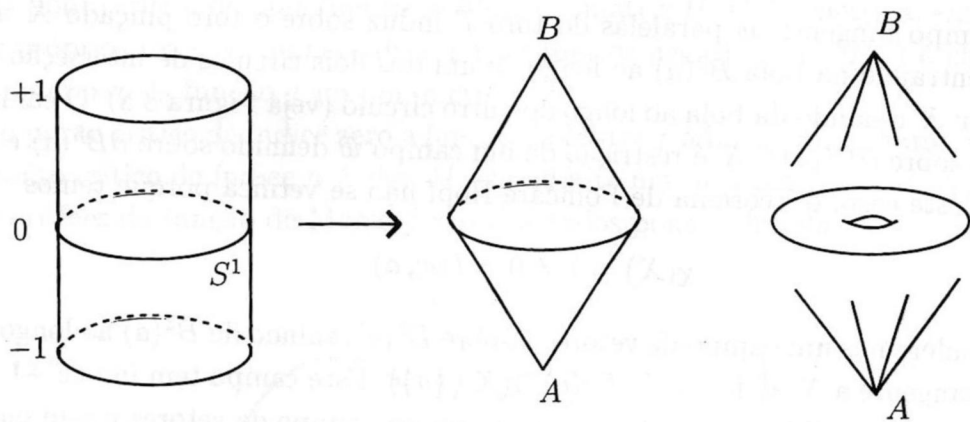


Figura 1.7 Suspensão de S^1 e do toro.

A suspensão de X é obtida a partir do cilindro $X \times [-1, +1]$, colapsando os níveis -1 e 1 .

O toro pinçado admite uma singularidade no “ponto de pinçamento” a . Neste ponto, o link consiste de dois círculos S^1 , e não somente um. A suspensão do toro admite dois pontos singulares: os dois pontos de pinçamento A e B . Nestes pontos, o link é um toro, e não uma esfera.

No caso singular, o Teorema de Poincaré-Hopf não é mais verdadeiro, usando um campo de vetores qualquer. A razão é que a definição do índice só é válida numa variedade suave, onde uma vizinhança do ponto a é homeomorfa a uma bola B^n e cujo bordo é homeomorfo a uma esfera S^{n-1} . Consideremos o exemplo do toro pinçado X , mergulhado em $\mathbb{R}^3$, que é uma variedade singular com uma singularidade isolada no ponto de pinçamento a . A única maneira de definir um índice no ponto a é de considerar um campo de vetores v definido numa bola $B^3(a)$ de centro a em $\mathbb{R}^3$, tal que $v(x)$ seja tangente a X para todo ponto x de $X \setminus \{a\}$ e com uma única singularidade a na bola $B^3(a)$. Consideremos dois exemplos de campos:

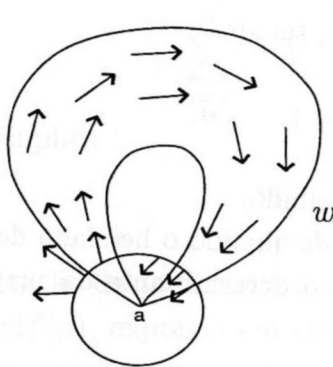


Figura 8.a

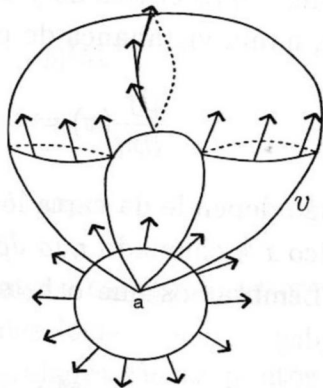


Figura 8.b

Figura 1.8 Os campos w e v sobre o toro pinçado

a) O campo tangente às paralelas do toro T induz sobre o toro pinçado X um campo w entrando na bola $B^3(a)$ ao longo de um dos dois círculos de interseção de $\partial B^3(a)$ com X e saindo da bola ao longo do outro círculo (veja Figura 8 a). O campo w definido sobre $\partial B^3(a) \cap X$ é restrição de um campo $\tilde{w}$ definido sobre $\partial B^3(a)$ e de índice 0. Neste caso, o Teorema de Poincaré-Hopf não se verifica porque temos

$$\chi(X) = 1 \neq 0 = I(\tilde{w}, a)$$

b) Consideremos um campo de vetores $\tilde{v}$ sobre $B^3(a)$, saindo de $B^3(a)$ ao longo de $\partial B^3(a)$ e tangente a X ao longo de $B^3(a) \cap (X \setminus \{a\})$. Este campo tem índice +1 em a , ele pode ser estendido sobre o toro pinçado em um campo de vetores v sem outra singularidade além de a . De fato, podemos construir v de tal maneira que o ângulo entre $v(x)$ e o espaço tangente ao “meridiano” contendo x diminui proporcionalmente com a distância a a até ser 0 pelo meridiano oposto a a (veja figura 8 b). Neste caso, o Teorema de Poincaré-Hopf é verificado:

$$\chi(X) = 1 = I(\tilde{v}, a)$$

O campo v é o primeiro exemplo de campo radial, do qual faremos o estudo sistemático na Seção 3.

Da mesma maneira que o campo radial permite recuperar o Teorema de Poincaré-Hopf, a construção de classes características para variedades singulares consiste em definir campos de vetores adaptados à situação singular, generalizando a noção de campos radiais.

1.4 Teoria de Morse

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe C^∞ na variedade M . Dizemos que o ponto $x \in M$ é um *ponto crítico* de f se numa carta local U de coordenadas locais $(x_i), i = 1, \dots, n$, numa vizinhança do ponto x , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esta definição não depende da carta local escolhida.

O ponto crítico x é chamado *não degenerado* quando o hessiano de f nesse ponto não é nulo. Lembramos que o hessiano é o determinante da matriz $H(x)$ das derivadas segundas

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

A função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função de Morse* se todos pontos críticos de f são não degenerados.

Num ponto crítico de uma função de Morse, a matriz $H(x)$ é simétrica, então tem valores próprios reais. O número de valores próprios negativos de $H(x)$ é chamado *índice de Morse* da função f no ponto crítico x .

Num ponto crítico de índice zero a função de Morse f admite um mínimo relativo. Num ponto crítico de índice $n = \dim M$, ela admite um máximo relativo. Os outros pontos críticos da função de Morse f são chamados pontos de sela.

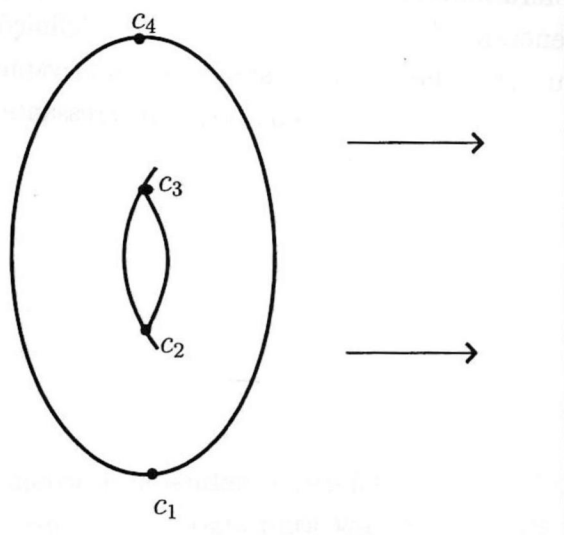


Figura 1.9 Função de Morse sobre o toro.

Seja m_i o número de pontos críticos de f cujo índice de Morse vale i . Morse demonstrou em 1925 as desigualdades entre números de Betti e números m_i

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \beta_i \leq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} m_i \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$$

Esta igualdade implica

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$$

Uma interpretação desta fórmula é a seguinte: o campo de vetores gradiente de f , denotado $\text{grad}f(x)$, expresso em coordenadas locais como $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, é um campo de vetores tangente a M cujas singularidades são os pontos críticos de f . Seja x um ponto crítico da função de Morse f , com índice de Morse i , então o índice do campo de vetores gradiente neste ponto é $I(\text{grad}f, x) = (-1)^i$.

1.5 Fórmula de Gauss-Bonnet

Uma outra formulação da característica de Euler-Poincaré é obtida em termos de curvatura integral. Seja $K(x)$ a curvatura de Gauss da variedade M no ponto x , temos

$$\chi(M) = \frac{2}{c_m} \int_M K(x) dM$$

onde c_m é o volume da esfera unitária $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ (veja Lima [Li]).

Esta formulação foi generalizada por Chern numa das definições de classes características dadas em seu artigo de 1946. Neste curso, não vamos considerar esta última definição, embora ela seja muito importante e interessante.

Classes características - Caso de variedades suaves

2.1 História

Em 1935 e de uma maneira independente, Stiefel, aluno de Hopf, e Whitney definem classes características em cohomologia para variedades reais suaves. Stiefel considera o ponto de vista de obstrução (para a construção de r -referenciais tangentes à variedade), calculando os grupos de homotopia das variedades que têm o seu nome. Whitney considera fibrados em esferas sobre a variedade M e define classes de cohomologia com coeficientes em $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Os métodos de Stiefel e de Whitney são similares e são a base da teoria de obstrução. Chamamos agora de classes de Stiefel-Whitney as classes de um fibrado vetorial, ou do fibrado em esferas associado, obtidas da mesma maneira.

Em 1942 Pontrjagyn define classes para variedades Grassmannianas, usando a decomposição em termos de ciclos de Schubert, devido a Ehresmann. As ideias de Pontrjagyn, e de Wu Wen Tsün são a base dos teoremas de classificação que lembraremos a seguir.

No seu artigo [Ch] de 1945, Chern deu várias definições equivalentes de classes para variedades hermitianas: definição por obstrução, usando a decomposição da variedade Grassmanniana em termos de ciclos de Schubert, usando formas diferenciais.

Para falando da história das classes características é necessario mencionar a contribuição muito importante de Wu Wen Tsün: entre outros resultados, ele provou a fórmula do produto para as classes de Stiefel-Whitney e para as classes de Chern, deu uma formulação simples da decomposição da Grassmanniana dos subespaços vetoriais orientados e estendeu a definição de classes de Chern para fibrados vetoriais complexos quaisquer sobre os complexos simpliciais (finitos).

As classes características têm, pelo menos, duas definições : uma geométrica, que permite entender o significado das classes, mas com a qual é difícil fazer cálculos efetivos, outra axiomática, que fornece métodos fáceis para o cálculo efetivo, mas com a qual é mais difícil ver o significado das classes. Vamos ver primeiramente a definição pelo método de obstrução, que foi também historicamente a primeira, depois damos a definição axiomática.

Para obter referências e maiores detalhes, ver [Di], 3,IV.

2.2 Fibrados

Denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou dos números complexos $\mathbb{C}$, dependendo do caso considerado.

Um fibrado vetorial E , sobre $\mathbb{K}$, de base B e de posto n é um espaço topológico E , com uma aplicação contínua $\pi : E \rightarrow B$, chamada projeção, tal que, para todo ponto $x \in B$, a fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ é um espaço vetorial de posto n sobre $\mathbb{K}$.

Um fibrado vetorial tem de satisfazer a seguinte condição de trivialidade local: para todo ponto $x \in B$, existe uma vizinhança U_x em B e um homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U_x) \rightarrow U \times \mathbb{K}^n$ que induz para todo $y \in U_x$ um isomorfismo $\pi^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Se temos trivialidade “global”, i.e. podemos tomar $U_x = B$ na condição de trivialidade, então dizemos que o fibrado é trivial.

Uma seção do fibrado E é uma aplicação contínua $s : B \rightarrow E$ tal que, para todo $x \in B$, temos $s(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$.

Nos próximos exemplos de fibrados e nas definições usaremos os seguintes espaços:

O espaço projetivo real $\mathbf{P}^n$ é definido como o espaço das linhas que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. A variedade Grassmanniana $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ é o espaço de todos subespaços vetoriais de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+k}$. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial de todas seqüências infinitas $(x_1, x_2, \dots)$ onde os x_i são números reais com apenas um número finito deles não nulos. A variedade Grassmanniana infinita é o conjunto de todos subespaços vetoriais de dimensão n de $\mathbb{R}^\infty$, i.e. o limite direto da seqüência natural

$$G_n(\mathbb{R}^n) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subset G_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \dots$$

Exemplos 2.1 (Fibrados vetoriais reais)

(i) O fibrado tangente TM a uma variedade real suave M . Isto é o conjunto de todos os pares (x, v) tais que $x \in M$ e v é um vetor tangente a M em x , i.e. um elemento de $T_x M$. Em particular, temos o fibrado trivial TS^1 tangente à esfera S^1 , o fibrado (não trivial) TS^2 tangente à esfera S^2 , o fibrado TP^n tangente a $\mathbf{P}^n$.

(ii) O fibrado normal a uma variedade (real) suave M mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Isto é o conjunto de todos os pares $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ tais que v é ortogonal ao espaço tangente $T_x(M) \subset T_x(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$.

(iii) O fibrado canônico (também chamado de fibrado tautológico) γ_n^1 sobre $\mathbf{P}^n$. Este fibrado é o conjunto de todos os pares $\{(\lambda, v)\}$ onde λ é um elemento de $\mathbf{P}^n$, i.e. uma linha que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ e v um vetor de λ . Este fibrado de posto 1 não é trivial.

(iv) O fibrado universal

$$\gamma_n^k \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

é o conjunto de todos os pares $\{(P, v)\}$ onde P é um elemento de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ (i.e. um subespaço vetorial de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+k}$) e v um vetor de P .

(v) O fibrado universal

$$\gamma_n \rightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$$

conjunto de todos os pares $\{(P, v)\}$ onde P é um elemento de $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ (i.e. um subespaço vetorial de dimensão n de $\mathbb{R}^\infty$) e v um vetor de P .

Exemplos 2.2 (Fibrados vetoriais complexos)

(i) O fibrado tangente complexo TM a uma variedade complexa suave M . Cada fibra $T_x M$ é munida de uma estrutura complexa. Em particular, temos o fibrado $T\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ tangente a $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

(ii) O fibrado canônico γ_n^1 sobre $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Este fibrado é o conjunto de todos os pares $\{(\lambda, v)\}$ onde λ é um elemento de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, i.e. uma reta complexa passando pela origem de $\mathbb{C}^{n+1}$ e v um vetor de λ . Este fibrado de retas (complexas) é também chamado de fibrado tautológico ou universal. Ele é denotado por $\mathcal{O}(-1)$ em geometria algébrica.

(iii) O fibrado “hiperplano” $\mathcal{H}$. Ele é denotado por $\mathcal{O}(1)$ em geometria algébrica. Este fibrado é o dual do fibrado canônico.

(iv) O fibrado universal

$$\gamma_n^k \rightarrow G_n(\mathbb{C}^{n+k})$$

é o conjunto de todos os pares $\{(P, v)\}$ onde P é um elemento de $G_n(\mathbb{C}^{n+k})$ (i.e. um subespaço vetorial complexo de dimensão n de $\mathbb{C}^{n+k}$) e v um vetor de P .

(v) O fibrado universal

$$\gamma_n \rightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$$

é o conjunto de todos os pares $\{(P, v)\}$ onde P é um elemento de $G_n(\mathbb{C}^\infty)$ (i.e. um subespaço vetorial complexo de dimensão n de $\mathbb{C}^\infty$) e v um vetor de P .

2.3 Definição por obstrução

O Teorema de Poincaré-Hopf diz que $\chi(M)$ é uma medida da obstrução para a construção de um campo de vetores tangentes à variedade M . Da mesma maneira, o objetivo da teoria de obstrução é definir invariantes que avaliam a obstrução para

construir um número dado de seções independentes de fibrados vetoriais. De uma maneira mais precisa, o objetivo é responder a perguntas como a seguinte:

Dados um fibrado vetorial E de posto n sobre uma variedade X e um inteiro r tal que $1 \leq r \leq n$, seria possível construir r seções de E , linearmente independentes em cada ponto ?

É claro que sobre o esqueleto de dimensão 0 de uma triangulação de X , a resposta da pergunta é positiva. Então temos as seguintes perguntas:

Fazendo a construção por esqueletos de dimensões crescentes, até que dimensão podemos fazer a construção ? Ao chegarmos na dimensão de obstrução, seria possível definir uma avaliação da obstrução ?

Damos, em primeiro lugar, o exemplo mais simples e clássico do fibrado tangente a uma variedade suave M . Na sequência consideraremos os casos de um fibrado real tangente a uma variedade diferenciável suave ou de um fibrado complexo tangente a uma variedade analítica complexa. Denotamos por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dependendo da situação.

Seja M uma variedade suave de dimensão n (sobre $\mathbb{K}$) munida de uma métrica euclidiana (ou hermitiana). O fibrado tangente a M , denotado por TM é um fibrado vetorial sobre $\mathbb{K}$ de posto n , cuja fibra sobre um ponto x de M é o espaço vetorial tangente a M em x , denotado por $T_x(M)$ e isomorfo a $\mathbb{K}^n$. O fibrado TM é localmente trivial, o que significa que existe uma cobertura de M por abertos U tais que a restrição de TM a U é isomorfa a $U \times \mathbb{K}^n$.

O objetivo é avaliar a obstrução para a construção de r seções de TM linearmente independentes (sobre $\mathbb{K}$) em cada ponto, ou seja um campo de r -referenciais.

Como mostrado por Steenrod [St], observamos que é equivalente considerar r -referenciais ortogonais ou conjuntos de r campos de vetores linearmente independentes em cada ponto.

Definimos o fibrado $T^r(M)$, de base M , associado a TM , e cuja fibra sobre um ponto x de M é o conjunto dos r -referenciais de $T_x(M)$. Este fibrado não é mais um fibrado vetorial. A fibra "típica" de $T^r(M)$ é o conjunto de todos os r -referenciais de $\mathbb{K}^n$, i.e. a variedade de Stiefel $V_{n,r}(\mathbb{K})$. Construir r seções linearmente independentes de TM sobre uma parte A de M é equivalente à construir uma seção de $T^r(M)$ sobre A .

Consideremos a situação seguinte: (K) é uma triangulação de M suficientemente pequena onde cada simplexo σ fica num aberto U da trivialização de $T^r(M)$. Uma tal triangulação existe sempre. Consideremos a seguinte pergunta:

Suponhamos que existe uma seção v^r de $T^r(M)$ sobre o bordo $\partial\sigma$ do simplexo σ de dimensão k . Seria possível estender esta seção ao interior de σ ? Se não, qual é a obstrução para esta extensão?

A seção v^r sobre o bordo de σ define uma aplicação

$$\partial\sigma \xrightarrow{v^r} T^r(M)|_U \cong U \times V_{n,r}(\mathbb{K}) \xrightarrow{pr_2} V_{n,r}(\mathbb{K})$$

onde pr_2 é a projeção sobre o segundo fator.

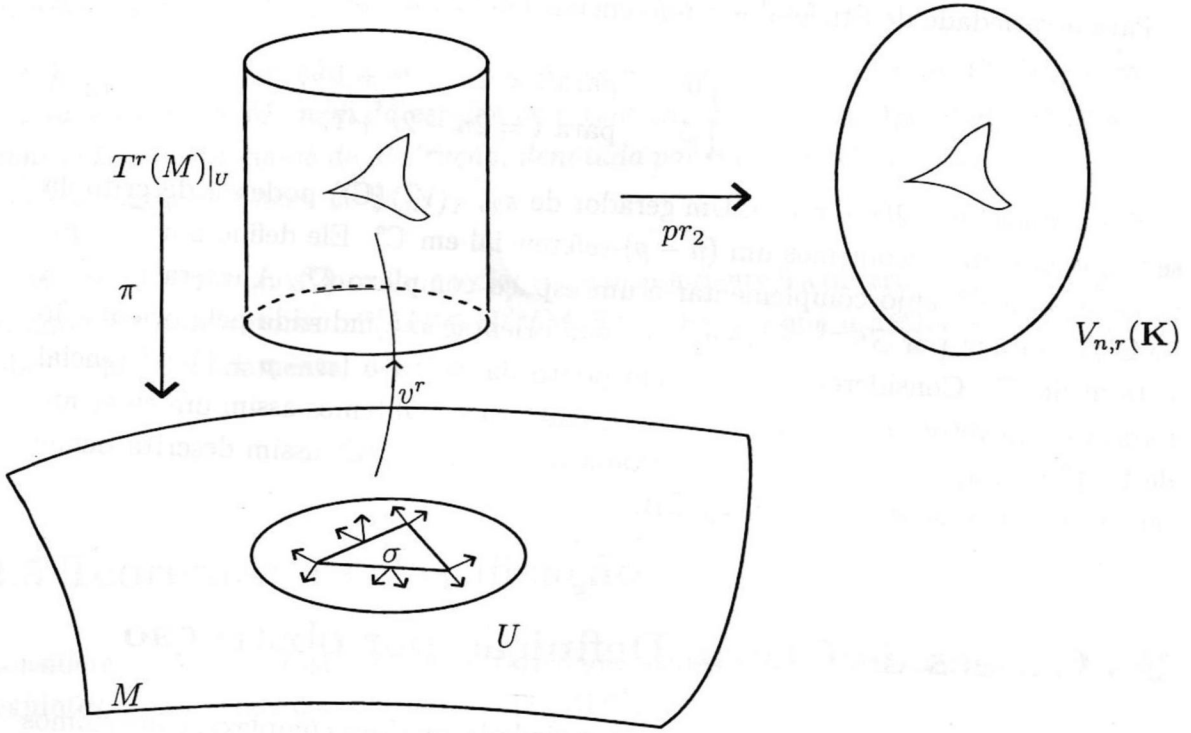


Figura 2.1 Aplicação $S^{k-1} \rightarrow V_{n,r}(\mathbb{K})$.

Obtemos assim uma aplicação

$$S^{k-1} \cong \partial\sigma \xrightarrow{pr_2 \circ v^r} V_{n,r}(\mathbb{K})$$

e, por conseguinte, um elemento de $\pi_{k-1}(V_{n,r}(\mathbb{K}))$ denotado por $[\gamma(v^r, \sigma)]$. Para responder a pergunta anterior, precisamos conhecer os grupos de homotopia de $V_{n,r}(\mathbb{K})$.

Se $[\gamma(v^r, \sigma)] = 0$, então a aplicação $S^{k-1} \rightarrow V_{n,r}(\mathbb{K})$ pode ser estendida à bola B^k , ou seja, a aplicação $\partial\sigma \rightarrow V_{n,r}(\mathbb{K})$ pode ser estendida a σ .

$$\begin{array}{ccc} \partial\sigma \cong S^{k-1} & \longrightarrow & V_{n,r}(\mathbb{K}) \\ \downarrow & \nearrow ? & \\ \sigma \cong B^k & & \end{array}$$

Neste caso, não há obstrução para a extensão da seção v^r dentro de σ . Isso acontece por exemplo se o grupo de homotopia $\pi_{k-1}(V_{n,r}(\mathbb{K}))$ for 0.

Os grupos de homotopia $\pi_{k-1}(V_{n,r}(\mathbb{K}))$ foram calculados por Stiefel e por Whitney (veja [St]) nos casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Temos os seguintes resultados:

Seja $V_{n,r}(\mathbb{R})$ a variedade de Stiefel dos r -referenciais em $\mathbb{R}^n$, então temos:

$$\pi_i(V_{n,r}(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \text{para } i < n - r \\ \mathbb{Z} & \text{para } i = n - r \text{ par ou } i = n - 1 \text{ se } r = 1 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{para } i = n - r \text{ ímpar e } r > 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para a variedade de Stiefel dos r -referenciais em $\mathbb{C}^n$, temos:

$$\pi_i(V_{n,r}(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{para } i < 2n - 2r + 1 \\ \mathbb{Z} & \text{para } i = 2n - 2r + 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Denotamos $2p = 2(n - r + 1)$. Um gerador de $\pi_{2p-1}(V_{n,r}(\mathbb{C}))$ pode ser descrito da seguinte maneira: escolhemos um $(n - p)$ -referencial em $\mathbb{C}^n$. Ele define um $(n - p)$ -subespaço de $\mathbb{C}^n$ cujo complementar é um espaço complexo $\mathbb{C}^p$. A esfera unitária de $\mathbb{C}^p$, denotada por S^{2p-1} , é orientada e sua orientação é induzida pela orientação natural de $\mathbb{C}^p$. Consideremos para todo ponto da esfera o $(n - p + 1)$ -referencial formado pelo vetor w e pelo $(n - p)$ -referencial fixado. Obtemos assim um elemento de $V_{n,r}(\mathbb{C})$. A aplicação da esfera orientada S^{2p-1} em $V_{n,r}(\mathbb{C})$ assim descrita define um elemento gerador de $\pi_{2p-1}(V_{n,r}(\mathbb{C}))$.

2.4 Classes de Chern. Definição por obstrução

Nas hipóteses anteriores e no caso de uma variedade analítica complexa, construímos um campo de r -referenciais por indução na dimensão do esqueleto da triangulação (K) : é possível definir um r -referencial em cada vertice σ^0 da triangulação K , i.e. sobre o 0-esqueleto de (K) . Suponhamos que o campo de r -referenciais já seja conhecido sobre o esqueleto de (K) de dimensão $(k - 1)$, com $k < 2(n - r + 1)$. Como vimos acima, para todo simplexo σ de dimensão k , o campo v^r sobre o bordo $\partial\sigma$ de σ define um elemento $[\gamma(v^r, \sigma)]$. Como $k < 2(n - r + 1)$, este elemento vale 0 por (2.2) e o campo pode ser estendido sem singularidade ao interior de σ . Quando chegamos à dimensão $k = 2p = 2(n - r + 1)$, obtemos para cada k -simplexo σ um elemento

$$[\gamma(v^r, \sigma)] \in \pi_{k-1}(V_{n,r}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$

Podemos estender o campo v^r construído sobre o bordo de σ por uma homotetia centrada no baricentro $\hat{\sigma}$ de σ , com uma singularidade isolada neste ponto. O índice do campo estendido v^r no seu ponto singular $\hat{\sigma}$ vale

$$I(v^r, \hat{\sigma}) = [\gamma(v^r, \sigma)] \in \mathbb{Z}.$$

A dimensão $2p = 2(n - r + 1)$ é chamada dimensão de obstrução.

A correspondência $\sigma \mapsto I(v^r, \hat{\sigma})$ define uma cocadeia com valores inteiros, i.e. um elemento

$$[\gamma(v^r)] = \sum_{\dim \sigma = 2p} I(v^r, \hat{\sigma}) \sigma^*,$$

onde σ^* é a cocadeia elementar cujo valor é 1 sobre o simplexo σ e 0 sobre todos os outros simplexos. A cocadeia $[\gamma(v^r)]$ é um cociclo (veja [St]), chamado cociclo de obstrução, cuja classe é chamada classe de obstrução.

Teorema 2.3

[St] A classe de obstrução não depende da cobertura trivializadora de $T^r(M)$, nem da triangulação de M , nem da escolha de r -referenciais feitos sobre simplexes de dimensão $k < 2p$. A classe de obstrução, denotada por $c^p(M) \in H^{2p}(M; \mathbb{Z})$ é chamada p -ésima classe de Chern de M .

No caso $r = 1$, temos $2p = 2n$ e a classe correspondente é a obstrução à construção de um campo de vetores: $c^n(M) \in H^{2n}(M; \mathbb{Z})$. Sabemos que a avaliação de $c^n(M)$ sobre a classe fundamental de M é

$$\langle c^n(M), [M] \rangle = \chi(M).$$

2.5 Teoremas de classificação

Consideremos ainda o caso de uma variedade analítica complexa suave. Temos os seguintes teoremas de classificação (veja [Mi3]).

Teorema 2.4

Para todo fibrado vetorial complexo E de posto n sobre um espaço compacto B existem um inteiro k e uma aplicação $f : B \rightarrow G_n(\mathbb{C}^{n+k})$ de tal maneira que temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \gamma_n^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & G_n(\mathbb{C}^{n+k}) \end{array}$$

e um isomorfismo $E \cong f^*(\gamma_n^k)$.

Lembremos que se um espaço B é paracompacto então B é Hausdorff e admite coberturas localmente finitas.

Teorema 2.5

Para todo fibrado vetorial complexo E de posto n sobre um espaço paracompacto B existe uma aplicação $B \rightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ de tal maneira que temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & G_n(\mathbb{C}^\infty) \end{array}$$

e um isomorfismo $E \cong f^*(\gamma_n)$.

Seja $H = \mathbf{P}^{n-1}$ um hiperplano em $\mathbf{P}^n$ e $[H]$ a classe correspondente em $H_{2n-2}(\mathbf{P}^n)$. Denotamos por a o gerador de $H^2(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z})$ dual, pelo isomorfismo de Poincaré $H^2(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cap [\mathbf{P}^n]} H_{2n-2}(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z})$, à classe $[H]$, i.e. $a \cap [\mathbf{P}^n] = [H]$. Temos $a = c^1(\mathcal{H})$, o que implica o seguinte lema:

Lema 2.6

Seja $c^1(\gamma_n^1)$ a classe de Chern do fibrado γ_n^1 , temos $c^1(\gamma_n^1) = -a$, i.e.

$$c^1(\gamma_n^1) \cap [\mathbf{P}^n] = -[H].$$

1. O anel de cohomologia $H^*(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z})$ é um anel de polinômios gerado pela classe a (ou pela classe $c^1(\gamma_n^1)$), truncado em dimensão $2n$. Em outras palavras,

$$H^{2i}(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad i = 0, \dots, n$$

gerado por a^i e temos

$$H^{2i+1}(\mathbf{P}^n; \mathbb{Z}) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

2. As classes de Chern do fibrado $T\mathbf{P}^n$ tangente a $\mathbf{P}^n$ são dadas por

$$c(T\mathbf{P}^n) = (1 + a)^{n+1}.$$

Assim $c^n(T\mathbf{P}^n) = (n+1)a^n$ e

$$\chi(\mathbf{P}^n) = n+1 = \langle c^n(T\mathbf{P}^n), [\mathbf{P}^n] \rangle$$

No caso $n = 1$, o elemento a é o gerador de $H^2(\mathbf{P}^1; \mathbb{Z})$, dual de $[\mathbf{P}^1]$, i.e.

$$\langle a, [\mathbf{P}^1] \rangle = 1$$

e $c^1(T\mathbf{P}^1) = 2a$. Reobtemos $\chi(\mathbf{P}^1) = \chi(S^2) = 2$. Em geral temos

$$\langle a^n, [\mathbf{P}^n] \rangle = 1.$$

3. O anel de cohomologia $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$ é um anel de polinômios sobre $\mathbb{Z}$ gerado pelas classes $c^1(\gamma_n), \dots, c^n(\gamma_n)$. Estes geradores não têm relação polinomial entre si.

2.6 Definição axiomática das classes de Chern

As classes de Chern satisfazem os seguintes axiomas:

Para todo fibrado vetorial complexo E de posto n sobre B são associadas classes

$$c^i(E) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z}), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

tais que $c^0(E) = 1$, satisfazendo os axiomas:

1. Naturalidade. Se temos um diagrama comutativo de fibrados

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

então

$$f^*(c^i(E')) = c^i(E).$$

2. Soma de Whitney. Se E e E' são fibrados sobre a mesma base B , então

$$c^k(E \oplus E') = \sum_{i=0}^k c^i(E) \cup c^{k-i}(E').$$

3. Para o fibrado γ_1^1 sobre $\mathbf{P}^1 \cong S^2$, a classe de Chern $c^1(\gamma_1^1)$ não é zero.

De fato, já vimos que esta classe é um gerador de $H^2(\mathbf{P}^1; \mathbb{Z})$.

2.7 Conclusão

Observemos que a teoria de obstrução usa:

- 1) um fibrado vetorial E de posto n sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de base B . No caso particular do fibrado tangente $E = TM$, considera-se uma base diferenciável, mas, no caso geral, não é necessária a hipótese de diferenciabilidade da base.
- 2) o fibrado (não vetorial) dos conjuntos de r seções linearmente independentes de E . A fibra é isomorfa a $V_{n,r}(\mathbb{K})$.
- 3) o cálculo dos grupos de homotopia da fibra $V_{n,r}(\mathbb{K})$. Eles são nulos até uma dimensão que dá a dimensão de obstrução.

Assim, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos definir o ciclo de obstrução e as classes de Chern $c(E)$ para um fibrado vetorial E sobre uma base (triangulada) não necessariamente suave. No caso do fibrado tangente $E = TM$ a uma variedade suave temos $c^p(E) = c^p(TM) = c^p(M)$.

Variedades singulares

No caso de uma variedade singular X , o fibrado tangente TX não existe mais. As construções de classes de Chern, no caso singular, consistem em procurar um substituto ao fibrado tangente. Existem (pelo menos) duas maneiras de definir tal substituto no caso de uma variedade singular X mergulhada numa variedade suave M :

1. Considerar a união $\mathcal{T}$ dos espaços tangentes aos estratos de uma estratificação de X e considerar seções de TM cuja imagem está em $\mathcal{T}$. Este é o método usado por M.H. Schwartz, que mostra que não se pode usar qualquer seção, mas seções radiais.

2. Considerar o fibrado virtual. Este é o método usado por Fulton. Se X for suave, teremos uma seqüência exata

$$0 \rightarrow TX \rightarrow TM|_X \rightarrow N_X M \rightarrow 0,$$

onde $N_X M$ é o fibrado normal de X em M . No caso de uma variedade singular tal que o fibrado normal $N_X M$ existe, podemos definir o fibrado virtual (no grupo de Grothendieck) como

$$\tau_X = TM|_X - N_X M.$$

Para definir classes características, precisamos conhecer a estrutura local da variedade singular. Isso é dado pela estrutura de variedade estratificada.

3.1 Estratificações de Whitney

Seja X uma variedade analítica complexa de dimensão (complexa) n , uma estratificação é a dada de uma filtração

$$(\mathcal{X}) \quad \emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

tal que cada $V_i = X_i \setminus X_{i-1}$ é uma variedade complexa suave de dimensão complexa i . Chamamos as variedades V_i de estratos (não necessariamente conexos) da estratificação.

Não se pode considerar qualquer estratificação. Os estratos tem que satisfazer condições de “colagem” entre si. As condições de Whitney são muito poderosas em relação às propriedades desejadas para a construção de campos de referenciais adaptados ao caso de variedades singulares.

Definição 3.1 A estratificação $(\mathcal{X})$ satisfaz as condições de Whitney se para todo par (V, W) de estratos tais que W esteja no fecho de V e para todo ponto y de W temos:

a) Para toda seqüência x_i de pontos de V com limite y e tal que o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(V) = T$$

existe na grassmaniana correspondente, então T contém $T_y(W)$.

b) Se além disso temos uma seqüência y_i de pontos de W com limite y e tal que o limite de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$$

existe no espaço projetivo, então T contém λ .

Whitney mostrou [Wh1] que toda variedade analítica complexa admite uma estratificação satisfazendo as condições (a) e (b). Uma tal estratificação é chamada estratificação de Whitney.

Exemplos 3.2

(i) O cone. As condições (a) e (b) não são satisfeitas para a estratificação do cone X tal que

$$\emptyset \subset Y \subset X,$$

onde Y é uma geratriz do cone (Figura 12a e 12b). Para ver isso, basta considerar uma seqüência x_i de pontos de X cujo limite é o vértice do cone y , situados sobre uma geratriz do cone que não seja Y , e uma seqüência de pontos y_i de Y com limite y e de modo que o segmento $x_i y_i$ tenha sempre a mesma direção.



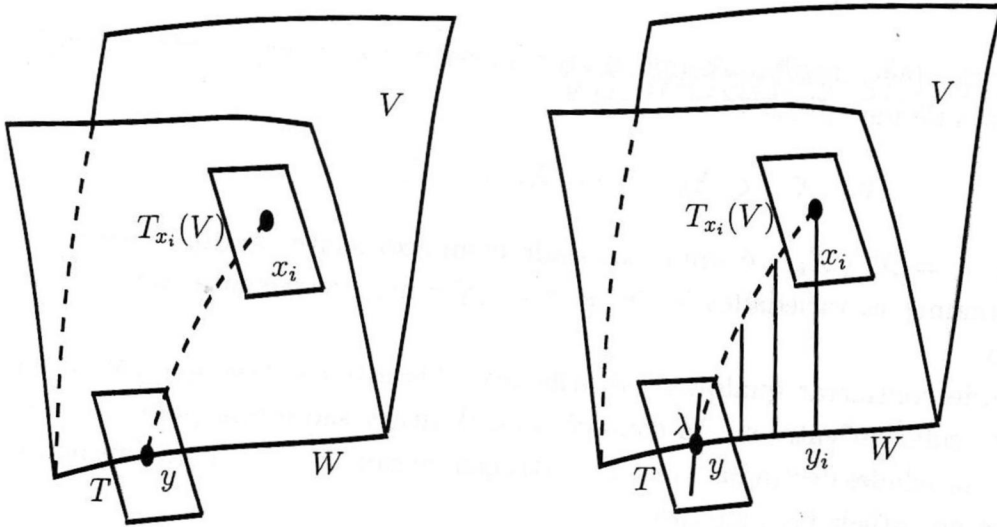


Figura 3.1 Condições (a) e (b) de Whitney.

Neste exemplo, é fácil ver que a estratificação

$$\emptyset \subset \{y\} \subset Y \subset X$$

satisfaz as condições de Whitney.

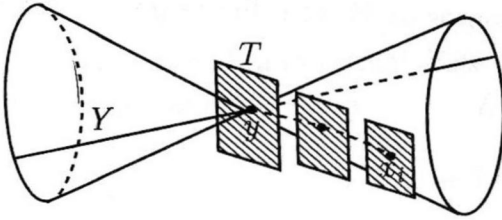


Figura 8.a

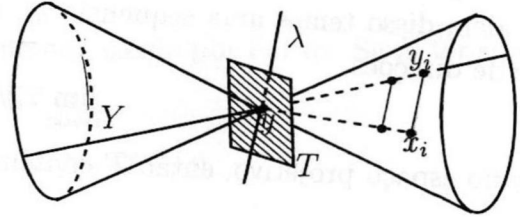


Figura 8.b

Figura 3.2 A estratificação $\emptyset \subset Y \subset X$ do cone não satisfaz as condições de Whitney.

(ii) Consideremos a variedade X em $\mathbb{C}^3$ cuja equação é $y^2 + x^3 - t^2x^2 = 0$.

Se chamarmos de Y o eixo da coordenada t , a estratificação

$$\emptyset \subset Y \subset X$$

satisfaz a condição (a) mas não a condição (b). Basta acrescentar um estrato de dimensão 0, a origem de $\mathbb{C}^3$, para que as condições de Whitney sejam satisfeitas.

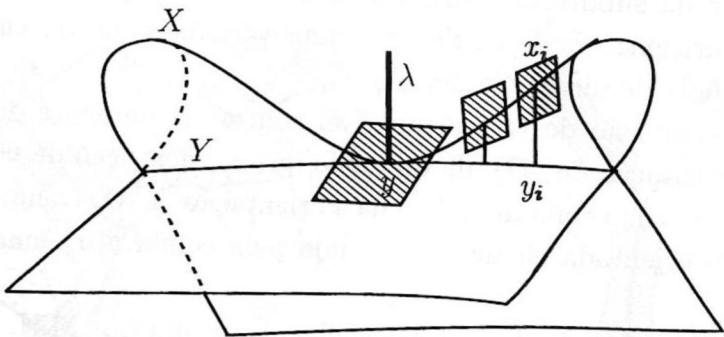


Figura 3.3 A condição (b) não está satisfeita no caso da estratificação $\emptyset \subset Y \subset X$.

3.2 Triangulações

Seja X uma variedade analítica complexa de dimensão (complexa) n mergulhada numa variedade analítica complexa suave M de dimensão (complexa) m . Seja $(\mathcal{X})$ uma estratificação de Whitney de X . Podemos definir uma estratificação de Whitney de M adicionando o estrato $M \setminus X$.

Seja (K) uma triangulação de M compatível com a estratificação de M (cada simplexo aberto σ_α está contido num único estrato). Uma tal triangulação existe, pelo resultado de Łojaciewicz.

Suponhamos que M é uma variedade combinatória, munida de (K) . Seja (K') uma subdivisão baricêntrica de (K) . A decomposição celular (D) de M , dual de (K) e associada a (K') é definida da seguinte maneira:

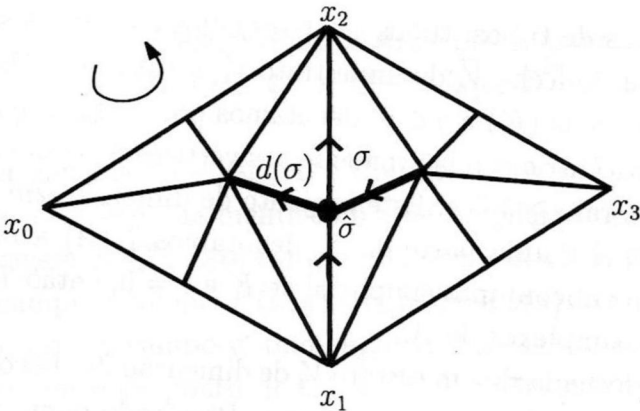


Figura 3.4 Células duais.

Se σ é um q -simplexo de (K) , a célula dual $d(\sigma)$ do simplexo σ é o conjunto

de todos simplexes τ da subdivisão baricêntrica de (K) tais que a interseção $\tau \cap \sigma$ é exatamente o baricentro $\hat{\sigma}$ de σ . Se M é uma variedade suave, então $d(\sigma)$ é homeomorfo a uma bola de dimensão $2m - q$.

Definimos uma orientação de (K) compatível com as orientações dos estratos. Temos então uma orientação de (D) , de tal modo que a orientação de um simplexo σ^q seguida da orientação da célula dual $d(\sigma)$ dá a orientação de M . Denotamos ainda por $d(\sigma)$ a (D) -célula orientada elementar definida pela célula $d(\sigma)$ munida da sua orientação.

Uma propriedade importante das células duais, observada por M.H. Schwartz, é que as células duais são transversais à estratificação de M (e de X). Esta propriedade é uma consequência da compatibilidade da triangulação (K) com a estratificação. Se V_i for um estrato de dimensão $2k$ de X , e se σ for um simplexo de dimensão $2(r - 1)$ de V_i , então a interseção $d(\sigma) \cap V_i$ é uma célula de dimensão $2(k - (r - 1)) = 2s$.

Já temos que, se σ for um simplexo de dimensão $2(r - 1)$, então a célula dual $d(\sigma)$ é de dimensão $2(m - (r - 1)) = 2q$, que também é a dimensão de obstrução para a construção de um campo de vetores tangente a M . A parte regular X_{reg} de X tem dimensão real $2n$. Se o simplexo σ de dimensão $2(r - 1)$ for um simplexo de X_{reg} , então a interseção $d(\sigma) \cap X_{reg}$ é uma célula de dimensão $2(n - (r - 1)) = 2p$, que é a dimensão de obstrução para a construção de um campo de vetores tangente a X_{reg} . Em geral, se o simplexo σ de dimensão $2(r - 1)$ for um simplexo do estrato V_i de X , de dimensão $2k$, então a interseção $d(\sigma) \cap V_i$ é uma célula de dimensão $2(k - (r - 1)) = 2s$, que é a dimensão de obstrução para a construção de um campo de vetores tangente a V_i .

3.3 Tubos

Definimos dois sistemas de tubos: tubos celulares cujos elementos são células duais de simplexes de X , ou do fecho $\overline{V_i}$ de um estrato V_i , e tubos geodésicos.

Seja σ um k -simplexo de (K) e $y \in \sigma$, denotamos por $T_\varepsilon(y)$ o conjunto de pontos cujas coordenadas baricêntricas relativamente aos vértices de σ são proporcionais às coordenadas de y e de raio $\geq 1 - \varepsilon$. Este conjunto de dimensão $2m - k$ admite uma partição em raios. Se A é uma parte de X , denotamos $T_\varepsilon(A)$ a reunião dos $T_\varepsilon(y)$ por $y \in A$. Se A é um subconjunto simplicial de K e $\varepsilon = 0$, então $T_\varepsilon(A)$ é a reunião das células duais dos simplexes de A .

Seja A uma parte fechada de um estrato V_i de dimensão $2k$. Escolhemos sobre M , na vizinhança de A , uma métrica riemanianna μ . Para todo ponto $y \in A$, o disco de dimensão $2(m - k)$ gerado pelos arcos geodésicos ortogonais a A em y e de tamanho comum $\mu(y)$ é denotado por $\Theta_\mu(y)$. O tubo geodésico, vizinhança de A , união dos discos $\Theta_\mu(y)$ por $y \in A$, é denotado $\Theta_\mu(A)$.

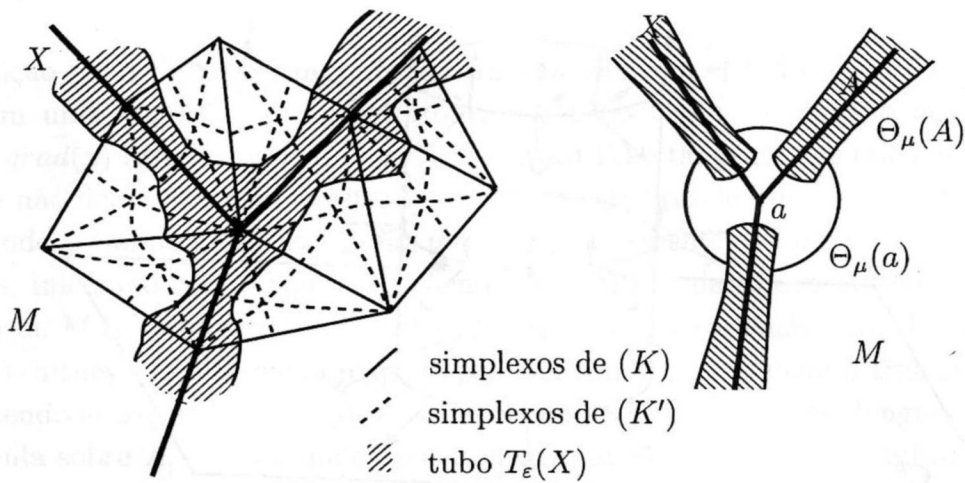


Figura 3.5 Os tubos $T_\epsilon(A)$ e $\Theta_\mu(A)$.

3.4 Campos radiais

Nesta seção, mostramos que as condições de Whitney permitem definir campos de vetores usados na construção de campos radiais. Mais precisamente, a condição (a) implica a existência de prolongamentos por paralelismo e a condição (b) implica a existência de campos transversais.

Definição 3.3 Seja X uma variedade singular estratificada mergulhada numa variedade suave M . Um campo de vetores v tangente a M sobre uma parte $A \subset M$ é chamado estratificado se, para todo $x \in A$, o vetor $v(x)$ é tangente ao estrato contendo o ponto x .

O exemplo que permite entender o processo de prolongamento radial é o seguinte: consideremos coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Aqui $\mathbb{C}^k$ faz o papel do estrato V_i mergulhado em $M = \mathbb{C}^n$.

Seja B^k a bola unitária no espaço $\mathbb{C}^k$. Consideremos sobre a bola um campo de vetores v tangente a $\mathbb{C}^k$, eventualmente com uma singularidade isolada no centro $\{a\}$ da bola, i.e. na origem de $\mathbb{C}^k$. Este campo pode ser estendido por paralelismo sobre $B^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ a um campo v' tal que $v'(x, y)$ é paralelo à $v(x)$. No caso de singularidade isolada de v na origem, o campo v' tem singularidade no espaço $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}$.

Por outro lado, em todo ponto de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, podemos considerar o campo de vetores $w(x, y) = (0, y)$. Este campo é nulo ao longo de $\mathbb{C}^k$ e cresce com a distância a $\mathbb{C}^k$. Ele representa o campo gradiente da função distância a $\mathbb{C}^k$. Este é o exemplo típico de campo transversal.

Consideremos, na bola unitária B^n de $\mathbb{C}^n$, o campo $\tilde{v} = v' + w$. Este campo, chamado *prolongamento radial de v* , tem uma singularidade isolada no ponto $\{a\}$

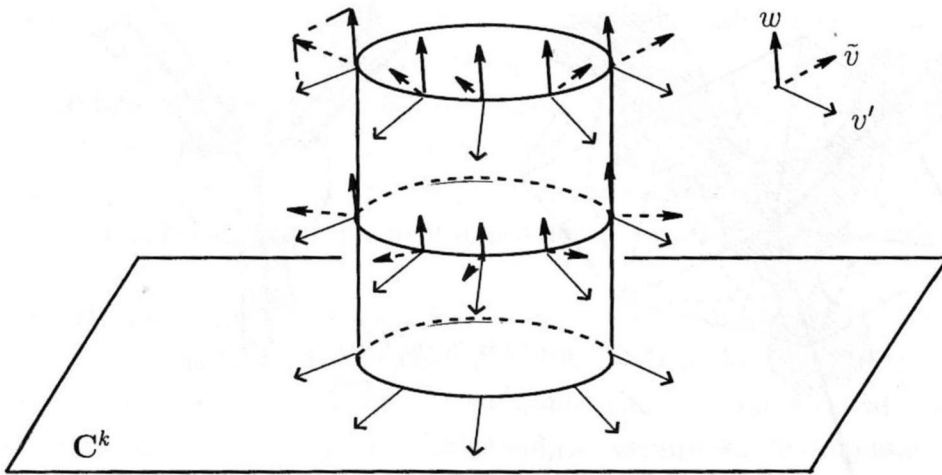


Figura 3.6 Campo radial no caso C^n .

se e somente se isso também ocorre para v . Ele não tem outras singularidades e os índices $I(v, a)$, calculado em C^k , e $I(\tilde{v}, a)$, calculado em C^n , são iguais ([B-S], [Sc3]). Esta igualdade é a propriedade fundamental do prolongamento radial.

Mais precisamente, a definição do prolongamento radial é a seguinte:

3.4.1 Prolongamento por paralelismo

Consideremos um estrato V_i de dimensão $2k$. Podemos definir uma decomposição celular de V_i como interseção de V_i com uma decomposição celular de M , esta decomposição sendo dual a uma triangulação de M compatível com a estratificação. Consideremos um campo de vetores v sobre V_i com singularidades isoladas. Podemos construir um tal campo de vetores com singularidades nos baricentros das células $d^{2m} \cap V_i$ onde d^{2m} é uma célula de dimensão $2m$ de M , dual a um vértice a de (K) situado em V_i .

A condição (a) de Whitney permite mostrar que o campo v pode ser prolongado por paralelismo a uma vizinhança de $d^{2m} \cap V_i$ usando as coordenadas baricêntricas. Mais precisamente, se v for definido sobre uma parte fechada A de V_i , o prolongamento por paralelismo está definido sobre o tubo $T_\varepsilon(A)$, as singularidades são discos de dimensão $2(m - k)$ transversais a V_i nos pontos a . Pela condição (a) de Whitney, em todo ponto x do tubo, pertencendo a um estrato V_j , o ângulo do prolongamento por paralelismo e do espaço tangente a V_j é pequeno.

3.4.2 Campos transversais

A condição (b) de Whitney permite mostrar o seguinte resultado:

Sejam uma parte A de um estrato V_i e o tubo $\Theta_\mu(A)$. O campo de vetores $g(x) = \vec{\text{grad}}(x)$ (gradiente da distância ao estrato V_i) é tangente aos raios de $\Theta_\mu(A)$ mas ele não define um campo estratificado. A construção de um campo estratificado, usando o campo gradiente, se faz por indução crescente sobre as dimensões dos estratos, iniciando com o campo gradiente nos estratos de dimensão nula. A construção de M.H. Schwartz usa vizinhanças particulares (prismáticas). A condição (b) de Whitney permite mostrar que é possível construir um campo transversal w satisfazendo as seguintes condições : w é um campo estratificado, prolongamento da seção nula sobre A , w é não nulo no complementar de V_i , saindo dos tubos $\Theta_\mu(A)$ ao longo de $\partial\Theta_\mu(A) - \Theta_\mu(\partial A)$, e fazendo, em cada ponto, um ângulo pequeno com o espaço tangente ao estrato do ponto.

3.4.3 Prolongamento radial local

Sejam A uma parte fechada de V_i e A' um vizinhança de A em V_i tal que $\Theta_\mu(A) \subset T_\varepsilon(A')$.

Seja v um campo de vetores tangente a V_i sobre A , com singularidades isoladas $a_j \in A$. Podemos definir sobre $T_\varepsilon(A)$ um prolongamento por paralelismo v' e um campo transversal w . Denotamos ainda v a soma dos campos de vetores v' e w , em $\Theta_\mu(A)$. O campo v está saindo do tubo $\Theta_\mu(A)$, com as mesmas singularidades isoladas a_j e com a propriedade importante que

$$I(v|_{V_i}, a_j) = I(v, a_j)$$

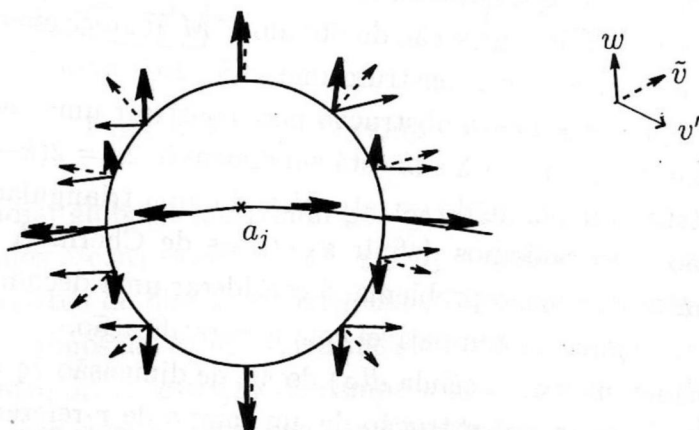


Figura 3.7 Prolongamento radial local.

Classes de Chern de variedades singulares

4.1 Classes de Schwartz

Considerando a estratificação de M , podemos definir um espaço "pseudo-fibrado" E em TM , cuja fibra em todo ponto x do estrato V_i é o espaço tangente a $T_x(V_i)$. Uma seção v de E sobre uma parte A de M é uma seção do fibrado $TM|_A$ tal que, em cada ponto $x \in A \cap V_i$, temos $v(x) \in T_x(V_i)$. Da mesma maneira, podemos definir o fibrado dos r -referenciais de E , denotado E^r . Uma seção v^r de E^r sobre uma parte A de M é uma seção do fibrado $T^r M|_A$ tal que, em cada ponto $x \in A \cap V_i$, temos $v^r(x) \in T_x^r(V_i)$.

Uma generalização natural das classes de Chern para variedades singulares pode ser feita definindo-as classes como obstrução à construção de uma seção de E^r . Por isso, precisamos considerar uma decomposição simplicial ou celular de M . A primeira idéia é considerar uma decomposição compatível com os estratos. De fato, não é possível definir uma classe característica usando tal decomposição. A razão é que a obstrução para construir uma seção do fibrado $T^r M$ aparece em dimensão $2q = 2(m - r + 1)$, mas a obstrução para construir uma seção do fibrado $T^r(X_{reg})$ aparece em dimensão $2p = 2(n - r + 1)$ e a obstrução para construir uma seção do fibrado $T^r(V_i)$ sobre o estrato V_i de dimensão $2k$ está em dimensão $2s = 2(k - r + 1)$. Então, a dimensão de obstrução depende do estrato. Usando uma triangulação compatível com a estratificação, não podemos definir as classes de Chern. A idéia de M.H. Schwartz, que permite resolver o problema, é considerar uma decomposição celular de M dual a uma triangulação compatível com a estratificação.

Neste caso, consideremos uma célula $d(\sigma)$ de M , de dimensão $2q = 2(m - r + 1)$, dimensão de obstrução para a construção de um campo de r -referenciais sobre M . Se o simplexo σ fica no estrato V_i de X de dimensão $2k$, então $d(\sigma)$ é uma célula

que encontra V_i com dimensão

$$\dim(d(\sigma) \cap V_i) = 2s = 2(k - r + 1).$$

Isto é precisamente a dimensão de obstrução para a construção de um campo de r -referenciais sobre V_i .

Isto justifica a construção de r -referenciais, seções de E^r sobre as células duais.

Teorema 4.1

Podemos construir uma seção com singularidades de E^r sobre o esqueleto $D^{(2q)}$ da decomposição celular, com $q = m - r + 1$. A seção é chamada campo radial e denotada $v^r = (v^{r-1}, w)$ se as singularidades de v^r satisfazem:

(i) As singularidades de v^r são isoladas e são zeros do campo de vetores w . Sobre o esqueleto $D^{(2q-1)}$, v^r não tem singularidades, sobre o esqueleto $D^{(2q)}$, v_{r-1} não tem singularidades.

(ii) Se uma célula $d(\sigma)$ de dimensão $2q$ encontra vários estratos, então todas singularidades de v^r estão no estrato de menor dimensão.

(iii) Se $\{a\} \in d(\sigma) \cap V_i$ é um ponto singular de v^r , com $\dim(d(\sigma)) = 2q$ e $\dim(V_i) = 2k$, então, se $k = r - 1$, temos $I(v^r, a) = +1$ e, se $k > r - 1$, o índice $I(v^r, a)$ é igual ao índice de $v^r|_{d(\sigma) \cap V_i}$ em $\{a\}$ como seção de $T^r(V_i)$.

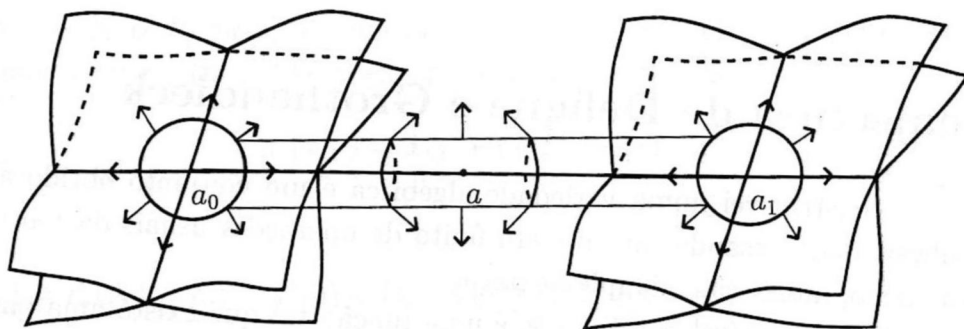


Figura 4.1 O campo radial "global".

O campo radial global é construído por indução crescente sobre a dimensão dos estratos. Daremos a construção no caso $r = 1$, o caso geral se faz do mesmo modo, usando os esqueletos de dimensões adequadas. Para todo estrato $V_0 = \{a_i\}$ de dimensão 0, construímos um campo estratificado v saindo de uma bola suficientemente pequena de centro a_i . A restrição do campo v aos estratos V_1 , de dimensão 1 pode ser estendida sobre estes estratos com singularidades isoladas a de índice $I(v, a)$ no estrato. Estendemos o campo obtido a um tubo, vizinhança de V_1 , com o método do prolongamento radial. O índice do prolongamento nos pontos singulares vale $I(v, a)$. Estendemos sobre os estratos de dimensão 2 a restrição do campo a estes estratos,

com singularidades isoladas, e continuamos esta construção por indução crescente sobre a dimensão dos estratos.

Definição das classes.

Seja V_i um estrato de X e $\mathcal{T}_i$ a reunião das células (abertas) de (D) que encontram V_i . O campo v^r define um cociclo de obstrução $\hat{c}_i \in C_{(D)}^{2q}(\mathcal{T}_i, \partial\mathcal{T}_i)$ tal que

$$\langle \hat{c}_i, d^{2q} \rangle = \sum_{a_j \in d^{2q} \cap V_i} I(v^r, a_j).$$

Seja $\mathcal{T}$ a reunião das células fechadas de (D) que encontram X . Denotamos ainda $\hat{c}_i$ a imagem de $\hat{c}_i$ em $C_{(D)}^{2q}(\mathcal{T}, \partial\mathcal{T})$ e fazemos $\hat{c} = \sum \hat{c}_i$. Temos

$$(4.1) \quad \hat{c} = \sum_{d_\alpha^{2q} \cap X \neq \emptyset} \mu_\alpha (d_\alpha^{2q})^* \quad \text{com} \quad \mu_\alpha = \sum_{a_j \in d_\alpha^{2q} \cap X} I(v^r, a_j).$$

A classe de $\hat{c}$ em

$$H^{2q}(\mathcal{T}, \partial\mathcal{T}) \cong H^{2q}(\mathcal{T}, \mathcal{T} - X) \cong H^{2q}(M, M - X)$$

é a classe de Schwartz $c^q(X)$. O primeiro isomorfismo é obtido por retração de $\mathcal{T} - X$ sobre $\partial\mathcal{T}$ e o segundo por excisão.

Esta definição não depende das escolhas da estratificação, da triangulação, dos tubos e das vizinhanças.

4.2 Conjectura de Deligne e Grothendieck

Um conjunto construtível numa variedade algébrica é um conjunto obtido a partir das subvariedades usando um número finito de operações usuais da teoria dos conjuntos: união, interseção, complementação.

Uma função construtível $\alpha : X \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função tal que existe uma partição finita da variedade em conjuntos construtíveis de forma que α seja constante sobre cada um deles.

Equivalentemente, uma função α é construtível se, e somente se, existe uma triangulação da variedade X tal que α seja constante no interior de cada simplexo.

Seja $Y \subset X$. Denotamos por $1|_Y$ a função construtível, função característica de X , tal que $1|_Y(x)$ vale 1 se $x \in Y$ e 0 se $x \in X - Y$.

Proposição 4.2

Existe um e somente um funtor covariante $\mathbf{F}$ da categoria das variedades algébricas complexas (compactas) na categoria dos grupos abelianos tal que:

(i) $\mathbf{F}(V)$ é o grupo das funções construtíveis sobre V ,

(ii) se $f : V \rightarrow W$ é um morfismo algébrico próprio entre variedades algébricas, então $f_* : \mathbf{F}(V) \rightarrow \mathbf{F}(W)$ satisfaz

$$f_*(1|_Y)(w) = \chi(f^{-1}(w) \cap Y)$$

para todo subespaço fechado Y de V .

Como para toda função construtível α sobre X existe uma partição $\{Y_i\}$ de X tal que $\alpha = \sum \alpha_i 1|_{Y_i}$, temos $f_*(\alpha) = \sum \alpha_i f_*(1|_{Y_i})$ por linearidade.

O teorema seguinte de MacPherson foi conjecturado por Deligne e Grothendieck :

Teorema 4.3

[MP2] Existe uma e somente uma transformação natural de funtores $c_* : \mathbf{F} \rightarrow H_*$ tal que

- (i) $c_*(\alpha + \beta) = c_*(\alpha) + c_*(\beta)$,
- (ii) se $f : V \rightarrow W$ for próprio, então $f_* c_*(\alpha) = c_* f_*(\alpha)$,
- (iii) se V for suave, então $c_*(1|_V) = c(V) \cap [V]$, imagem da classe de Chern pelo isomorfismo de Poincaré, produto “cap” pela classe fundamental.

Aplicação 4.4 (Exemplo de cálculo, veja [BG]) Uma aplicação imediata do Teorema 4.3 é encontrada no cálculo das classes de Chern de variedades singulares com singularidades isoladas. Seja X uma variedade com singularidade isolada em $\{p\}$ e $\pi : Y \rightarrow X$ o “blow-up” do ponto $\{p\}$. A fibra $\pi^{-1}(x)$ é um ponto se $x \neq p$; denotamos $D = \pi^{-1}(p)$ o divisor excepcional. Então temos

$$\pi_*(1|_Y) = 1|_X + (\chi(D) - 1)1|_{\{p\}}$$

e daí

$$c_*(1|_X) = c_*(X) = c_*(\pi_*(1|_Y)) + (1 - \chi(D))c_*(1|_{\{p\}}) = \pi_* c_*(Y) + (1 - \chi(D))\{p\}.$$

A definição das classes de MacPherson usa as classes de Chern-Mather.

4.3 Classes de Mather

Seja X uma variedade analítica complexa, de dimensão complexa n , mergulhada numa variedade suave M de dimensão complexa m . Sobre M temos o fibrado $\widetilde{M}$ associado a TM cuja fibra sobre o ponto x é a Grassmaniana dos subespaços complexos de dimensão n de $T_x(M) \cong \mathbb{C}^m$. Denotamos $\nu : \widetilde{M} \rightarrow M$ a projeção do fibrado. Sobre a parte regular de X existe uma seção s de $\widetilde{M}$ dada pelo espaço tangente a X_{reg} , i.e. $s(x) = T_x(X_{reg})$.

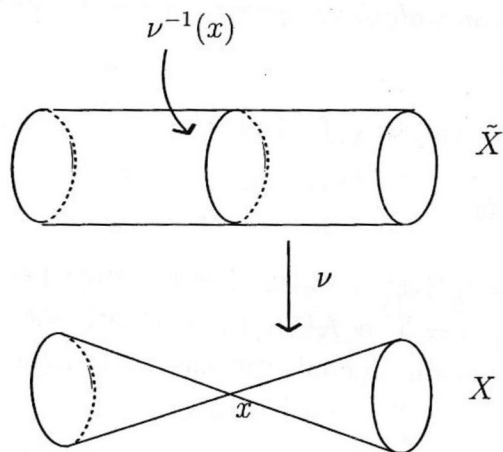


Figura 4.2 Transformação de Nash.

A transformação de Nash $\tilde{X}$ de X é o fecho em $\tilde{M}$ da imagem de s . A aplicação ν induzida pela restrição a $\tilde{X}$ é uma aplicação analítica ainda denotada $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$. Geometricamente, sobre X_{reg} , ν é um homeomorfismo e se x for um ponto singular de X , então $\nu^{-1}(x)$ é o conjunto de todos os limites de espaços tangentes às seqüências de pontos regulares de X cujo limite é x .

Denotamos por $\tilde{E}$ o fibrado de base $\tilde{X}$, restrição a $\tilde{X}$ do fibrado canônico (tautológico) sobre $\tilde{M}$. A fibra sobre um ponto P de $\tilde{M}$ (i.e. de um n -subespaço P de $\mathbb{C}^m$) é o conjunto de todos vetores de P .

As classes de Mather são definidas por

$$c_M(X) = \nu_*(c(\tilde{E}) \cap [\tilde{X}]).$$

4.4 Obstrução de Euler local

Seja Λ o fibrado produto de $\pi : TM \rightarrow M$ e de $\nu : \tilde{M} \rightarrow M$. Consideramos $\tilde{E}$ como subespaço de Λ :

$$\tilde{E} = \{(v, \tilde{x}) \in TM \times \tilde{M} : \pi(v) = x = \nu(\tilde{x}) \text{ e } v(x) \in \tilde{x}\}.$$

Denotamos por $\nu_* : \tilde{E} \rightarrow TM|_X$ a restrição a $\tilde{E}$ da primeira projeção $\Lambda \rightarrow TM$.

Proposição 4.5

- (a) Sejam $x \in X$ e $v(x) \in E(x)$. Para todo ponto $\tilde{x}$ de $\nu^{-1}(x)$, existe um único vetor $\tilde{v}(\tilde{x})$ de $\tilde{E}(\tilde{x})$ tal que $\nu_*(\tilde{v}(\tilde{x})) = v(x)$.
- (b) Sejam A uma parte de X e v uma seção de E sobre A . Então $\tilde{v}$ define uma seção de $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{X}$ sobre $\tilde{A} = \nu^{-1}(A)$.

Demonstração

Seja x um ponto regular de X . Neste caso, $\nu^{-1}(x) = \tilde{x} = T_x(X_{reg})$ e como $v(x) \in T_x(X_{reg})$, então $\tilde{v}(\tilde{x})$ é bem definido por $\tilde{v}(\tilde{x}) = (v(x), \tilde{x})$.

Seja x um ponto do estrato V_i da estratificação de Whitney de X e $v(x) \in T_x(V_i)$. Para todo ponto $\tilde{x}$ de $\nu^{-1}(x)$, existe uma seqüência de pontos $\tilde{x}_\lambda$ de $\tilde{X}$ tal que:

$$\lim(\tilde{x}_\lambda) = \tilde{x} \quad \text{e tal que } \nu(\tilde{x}_\lambda) = x_\lambda \in X_{reg} \Rightarrow \tilde{x}_\lambda = T_{x_\lambda}(X_{reg}).$$

Então, o limite $\lim T_{x_\lambda}(X_{reg}) = \lim(\tilde{x}_\lambda)$ existe e é o elemento $\tilde{x} = T$. A condição (a) de Whitney implica $T_x(V_i) \subset T$, e temos $v(x) \in T_x(V_i) \subset T = \tilde{x}$. Assim definimos um elemento bem determinado $\tilde{v}(\tilde{x}) = (v(x), \tilde{x})$ de $\tilde{E}(\tilde{x})$.

A parte (b) é fácil de mostrar. □

Seja a um ponto de um estrato V_i de X de dimensão complexa k . Para o cálculo local, podemos supor que M , restrita a uma vizinhança de a , é um aberto de $\mathbb{C}^m$ com origem a e que V_i é um aberto de $\mathbb{C}^k$ gerado pelos primeiros vetores de $\mathbb{C}^m$. Denotamos b^{2k} uma bola euclidiana de centro a e $\Theta = \Theta_\mu(b^{2k})$ o tubo geodésico, pela métrica euclidiana, de diâmetro μ .

Definição 4.6 Seja v' um campo de vetores tangentes a V_i , saindo de b^{2k} ao longo do bordo e não nulo em $b^{2k} - \{a\}$. Denotamos por v a restrição a $\partial\Theta$ do prolongamento radial de v' e $\tilde{v}$ o levantamento de v como seção de $\tilde{E}$ sem singularidades sobre $\nu^{-1}(\partial\Theta)$ (Proposição 4.5). A obstrução para a extensão de $\tilde{v}$ a uma seção não nula de $\tilde{E}$ sobre $\nu^{-1}(\Theta)$ é chamada obstrução de Euler local de X em a e é denotada por:

$$Eu_a(X) = Obs(\tilde{v}, \tilde{E}^*, \nu^{-1}(\Theta)).$$

De fato, a obstrução é definida como um cociclo (veja 2.4) cujo valor sobre a classe fundamental de $[\nu^{-1}(\partial\Theta), \nu^{-1}(\Theta)]$ é a obstrução de Euler local.

Esta definição não depende das escolhas das bolas e do tubo. A priori, ela depende do ponto a . Em [B-S], mostramos:

Proposição 4.7

A obstrução de Euler local é constante sobre cada estrato de uma estratificação de Whitney de X .

Propriedades 4.8 (i) No pontos regulares de X , a obstrução de Euler local vale 1.
(ii) No caso de uma curva X , a obstrução de Euler local em cada ponto é o grau da curva neste ponto.

Em [B-S] mostramos o seguinte teorema fundamental: Seja v^r um campo radial definido sobre o esqueleto $D^{(2q)}$, com uma singularidade de índice $I(v^r, a)$ no ponto

$a \in d_\alpha^{2q} \cap V_i$, onde d_α^{2q} é uma $2q$ -célula de (D) . Denotamos por b^{2q} uma bola de centro a em d_α^{2q} tal que a seja o único ponto singular de v^r em b^{2q} . Denotamos $\partial\beta^{2p} = \partial b^{2q} \cap X$. O campo $\tilde{v}^r$ está bem definido sobre $\partial\tilde{\beta}^{2p} = \nu^{-1}(\partial\beta^{2p})$ como seção de $\tilde{E}^r$ (Proposição 4.5).

Teorema 4.9

A obstrução para o prolongamento de $\tilde{v}^r$ a uma seção de $\tilde{E}^r$ sobre $\tilde{\beta}^{2p} = \nu^{-1}(\beta^{2p} \cap X)$ é igual a:

$$Obs(\tilde{v}^r, \tilde{E}^r, \tilde{\beta}^{2p}) = Eu_a(X) \times I(v^r, a).$$

4.5 Classes de MacPherson

A obstrução de Euler local satisfaz a propriedade seguinte:

Proposição 4.10

Para toda estratificação de Whitney de X , existem inteiros n_i tais que para todo ponto $x \in X$ temos

$$\sum_i n_i Eu_x(\bar{V}_i) = 1$$

onde a soma é estendida a todos os estratos tais que $x \in \bar{V}_i$.

A Proposição é demonstrada através da determinação dos inteiros n_i por indução decrescente sobre a dimensão dos estratos. Para um ponto x do estrato regular, temos $n_m Eu_x(X) = n_m = 1$, pela Propriedade 4.8 (i). Se os inteiros n_j são determinados para os estratos V_j tais que $V_i \subset \bar{V}_j$, então a equação

$$\sum_j n_j Eu_x(\bar{V}_j) + n_i Eu_x(\bar{V}_i) = 1$$

determina n_i porque, como $x \in V_i$ é um ponto regular de V_i , temos $Eu_x(\bar{V}_i) = 1$.

Definição 4.11 A classe de MacPherson de grau $r - 1$ de X é definida por

$$c_{r-1}(X) = c_{M,r-1} \left(\sum_i n_i \bar{V}_i \right) = \sum_i n_i \iota_* (c_{M,r-1}(\bar{V}_i)),$$

onde ι é a inclusão de $\bar{V}_i$ em X .

Usaremos as notações de 4.1, em particular as do Teorema 4.1. O campo v^r determina um cíclico $\hat{c} = \sum_{d_\alpha^{2q} \cap X \neq \emptyset} \mu_\alpha(d_\alpha^{2q})^*$ da classe de M.H. Schwartz e um cíclico

$\tilde{c}$ da classe de Chern $c^p(\tilde{E})$. Temos:

$$\langle \tilde{c} \cdot \nu^{-1}(d_\alpha^{2q} \cap X) \rangle = Eu_{a_\alpha}(X) \mu_\alpha,$$

onde a_α é um ponto qualquer de σ_α^{2r-2} , simplexo do qual a célula d_α^{2q} é dual, i.e. $d_\alpha^{2q} = d(\sigma_\alpha^{2r-2})$.

O teorema 4.9 implica:

Teorema 4.12

[B-S] Seja $\hat{c} = \sum_{d_\alpha^{2q} \cap X \neq \emptyset} \mu_\alpha (d_\alpha^{2q})^*$ um cociclo da classe de Schwartz $c^q(X)$; a classe de Chern-Mather $c_{r-1}^M(X)$ contém o ciclo:

$$\sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset X} Eu_{a_\alpha}(X) \mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2}$$

onde μ_α é o coeficiente do cociclo $\hat{c}$ relativamente à célula d_α^{2q} , dual a σ_α^{2r-2} , e onde a_α é um ponto qualquer de σ_α^{2r-2} .

Podemos mostrar o resultado seguinte :

Teorema 4.13

[B-S] As classes de MacPherson são imagens das classes de Schwartz pelo isomorfismo de Alexander $H^{2q}(M, M \setminus X) = H_X^{2q}(M) \rightarrow H_{2r-2}(X)$.

Demonstração

A partir de um cociclo da classe de M.H. Schwartz, tal como em (4.1), escrevemos o teorema 4.12 para cada $\bar{V}_i$. A classe de Chern-Mather $c_{r-1}^M(\bar{V}_i)$ contém o ciclo:

$$\sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i} Eu_{a_\alpha}(\bar{V}_i) \mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2}$$

e a classe de MacPherson contém o ciclo :

$$\sum_i n_i \sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i} Eu_{a_\alpha}(\bar{V}_i) \mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2}.$$

Nesta soma, o coeficiente de $\mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2}$ é

$$C_\alpha = \sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset \bar{V}_i} n_i Eu_{a_\alpha}(\bar{V}_i) = \sum_{i: a_\alpha \in \bar{V}_i} n_i Eu_{a_\alpha}(\bar{V}_i) = 1.$$

Obtemos um ciclo da classe de MacPherson da forma:

$$\gamma = \sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset X} \mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2}.$$

O isomorfismo de Alexander $H^{2q}(M, M - X) \rightarrow H_{2r-2}(X)$ é induzido pelo isomorfismo:

$$C_{(D)}^{2q}(M, M - \overset{\circ}{T}) \rightarrow C_{2r-2, (K)}(X)$$

que associa a uma (D) -cocadeia $(d_\alpha^{2q})^*$ tal que $d_\alpha^{2q} \cap X \neq \emptyset$ a (K) -cadeia σ_α^{2r-2} tal que $d_\alpha^{2q} = d(\sigma_\alpha^{2r-2})$. Por este isomorfismo, o ciclo γ é imagem do cociclo da classe de M.H.Schwartz (veja (4.1)), o que prova o Teorema. $\square$

Observemos que determinamos um ciclo da classe de MacPherson. De fato, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.14

Sejam (K) uma triangulação simplicial de M compatível com uma estratificação de Whitney e v^r um campo radial definido sobre o $2q$ -esqueleto $D^{(2q)}$ de uma decomposição celular (D) dual de (K) . Denotamos d_α^{2q} a célula dual do simplexo σ_α^{2r-2} e $I(v^r, a)$ o índice de v^r em seu ponto singular a . Então a classe de MacPherson de grau $r - 1$ contém o ciclo

$$\sum_{\sigma_\alpha^{2r-2} \subset X} \mu_\alpha \sigma_\alpha^{2r-2} \quad \text{onde} \quad \mu_\alpha = \sum_{a_k \in d_\alpha^{2q} \cap X} I(v^r, a_k).$$

Classes de Fulton, classes de Milnor

5.1 Classes de Fulton (1984)

A classe de Segre $s(X, M)$ é definida no caso geral de uma subvariedade própria X de uma variedade M . Aqui consideramos a situação mais simples de uma variedade X regularmente mergulhada numa variedade suave M . Neste caso, a definição da classe de Segre é mais fácil: denotamos por $N_X M$ o fibrado vetorial normal de X em M e definimos

$$s(X, M) = c(N_X M)^{-1} \cap [X].$$

As classes de Fulton são definidas por:

Definição 5.1 [Fu] Seja X uma variedade regularmente mergulhada numa variedade suave M . A classe de Fulton de X é definida pela fórmula

$$c^F(X) = c(TM|_X) \cap s(X, M),$$

onde $c(TM|_X)$ é a classe de Chern total do fibrado tangente de M restrito a X e $s(X, M)$ é a classe de Segre de X em M .

A definição é independente do mergulho.

Exemplo. Se X for uma *interseção completa local*, o fibrado normal de X_{reg} em M admite uma extensão canônica a X como fibrado vetorial $N_X M$ e temos

$$(5.1) \quad c^F(X) = c(TM|_X) c(N_X M)^{-1} \cap [X] = c(\tau_X) \cap [X]$$

onde $\tau_X = TM|_X - N_X M$ é o fibrado tangente virtual sobre X , definido no grupo de Grothendieck dos fibrados vetoriais de base X .

Caso particular. Seja M uma variedade complexa analítica suave de dimensão pura $n + 1$ e seja L um fibrado em retas, holomorfo, sobre M . Seja $f \in H^0(M, L)$, uma

seção holomorfa de L , tal que a variedade X dos zeros de f seja uma hipersuperfície não densa em M . Então, a classe de Fulton de X é

$$c^F(X) = c(TM|_X - L|_X) \cap [X].$$

5.2 Classes de Milnor

O problema da comparação entre as classes de Schwartz-MacPherson e as classes de Fulton despertou muito interesse. No caso de singularidades isoladas de hipersuperfícies, a diferença é dada pelos números de Milnor nos pontos singulares.

No caso de singularidades isoladas, e para um campo radial (“saindo” dos pontos singulares) a diferença entre o índice de “Schwartz” (índice clássico, igual à 1) e o índice virtual (índice GSV) é o número de Milnor no ponto singular. Esta observação é a motivação para a definição abaixo.

Definição das classes de Milnor.

A definição seguinte foi dada pelos autores correspondentes em casos particulares.

Definição 5.2 [A2],[BLSS],[PP3],[Y2] A seguinte classe de homologia, definida como a diferença

$$\mathcal{M}_*(X) = (-1)^n (c^F(X) - c_*(X)),$$

é chamada classe de Milnor de X .

Consideremos a seguinte situação : X é uma subvariedade de dimensão n numa variedade suave M de dimensão m , definida por uma seção regular de um fibrado vetorial E de posto $k = m - n$ sobre M . Regular significa que a seção é genericamente transversal à seção nula. Denotamos $N = E|_X$. O fibrado tangente virtual de X é definido por

$$\tau_X = TM|_X - N$$

Consideremos um subconjunto compacto e conexo $S \subset X$ (em particular, uma componente da parte singular $X_{sing} = X \setminus X_{reg}$) e uma vizinhança U de S em M tal que $U \cap X - S \subset X_{reg}$. Para cada r -referencial $v^{(r)}$ tangente a X_{reg} sobre $\partial U \cap X \cap D^{(2q)}$ onde $2q = 2(m - r + 1)$, podemos definir:

- a) a classe (usual) de Schwartz localizada $Sch(v^{(r)}, S) \in H_{2(r-1)}(S)$ que representa a obstrução para estender $v^{(r)}$ como um r -referencial tangente dentro de $U \cap X \cap D^{(2q)}$. É a contribuição de S a $c_{r-1}(X) \in H_{2(r-1)}(X)$ ([BLSS], Theorem 2.13),
- b) a classe virtual localizada $Vir(v^{(r)}, S) \in H_{2(r-1)}(S)$. É a contribuição da “obstrução para a extensão de $v^{(r)}$ como seções linearmente independentes de τ_X ”, isto é, a contribuição de S a $c_{r-1}(\tau_X) \in H_{2(r-1)}(X)$ ([BLSS], Theorem 5.9).

Definição 5.3 [BLSS] A $(r-1)$ -ésima classe de Milnor de X localizada numa componente compacta S de X_{sing} é definida por

$$\mathcal{M}_{r-1}(X, S) = (-1)^{n-1} (Sch(v^{(r)}, S) - Vir(v^{(r)}, S)) \quad \text{em } H_{2(r-1)}(S)$$

A classe de Milnor total é a soma sobre as componentes de X_{sing} :

$$\mathcal{M}_{r-1}(X) = \sum_{S_\alpha \subset X_{\text{sing}}} (i_\alpha)_* \mathcal{M}_{r-1}(X, S_\alpha) \in H_{2(r-1)}(X)$$

onde i_α é a inclusão $S_\alpha \hookrightarrow X$.

A classe de Milnor $\mathcal{M}_*(X)$ está “localizada” no lugar singular de X . Se $k = 1$, $r = 1$ e X uma interseção completa em p , então $\mathcal{M}_0(X, S)$ é o número de Milnor usual.

No caso de uma interseção completa local, as duas definições 5.2 e 5.3 são as mesmas. Isso pode ser visto no caso particular de hipersuperfícies.

No caso $r = 1$, i.e. $v^{(1)} = v$, e para uma singularidade isolada a , o índice de Schwartz é o índice usual e o índice virtual é o índice GSV (veja [GSV], [SS]). A diferença entre estes índices é o número de Milnor μ_a de X em a :

$$Sch(v, a) - Vir(v, a) = (-1)^{n+1} \mu_a.$$

Teorema 5.4

[SS] *Seja X uma interseção completa local compacta cujas singularidades são pontos isolados $\{x_i\}$ com numeros de Milnor μ_{x_i} . Então*

$$\mathcal{M}_0(X) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^q \mu_{x_i} [x_i] \in H_0(X)$$

Teorema 5.5

[Su] *Na situação do teorema, temos $\mathcal{M}_i(X) = 0$ para $i > 0$.*

Este resultado foi demonstrado por [PP2] para hipersuperfícies com singularidades arbitrárias. Ele é generalizado da seguinte maneira:

Teorema 5.6

[BLSS] *Seja X uma interseção completa local, subvariedade de uma variedade complexa suave M . Temos, para cada $r = 0, \dots, n-1$:*

$$c_r(X) = c_r(TM|_X - N) + (-1)^{n+1} \mathcal{M}_r(X) \quad \text{em } H_{2r}(X).$$

Em outras palavras, a diferença entre a classe total de Schwartz-MacPherson $c_*(X)$ de X e a classe virtual total $c_*(TM|_X - N)$, em homologia, é a soma sobre as componentes conexas S_α de $Sing(X)$ das classes de Milnor localizadas $\mathcal{M}_*(X, S_\alpha) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{M}_i(X, S_\alpha)$.

5.3 Descrição em termos de funções construtíveis [PP3]

Consideremos a função $\chi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\chi(x) := \chi(F_x)$, onde F_x é a fibra de Milnor em x e $\chi(F_x)$ a sua característica de Euler. Definimos também a função $\mu : X \rightarrow \mathbb{Z}$ por $\mu = (-1)^{n+1}(\chi - \mathbf{1}_X)$.

Consideremos uma estratificação $\mathcal{S}$ de X tal que μ seja constante sobre os estratos de $\mathcal{S}$, por exemplo uma estratificação de Whitney de X . O tipo topológico da fibra de Milnor é constante ao longo dos estratos de $\mathcal{S}$. Denotamos μ_S a valor da função μ sobre o estrato S .

Definimos os números

$$\alpha(S) = \mu_S - \sum_{S' \neq S, S \subset \overline{S'}} \alpha(S')$$

por indução decrescente seguindo as dimensões de S .

Teorema 5.7

[PP3] Temos

$$\mathcal{M}_*(X) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha(S) c(L|_X)^{-1} \cap (i_{\overline{S}, X})_* c_*(\overline{S}) = c(L|_X)^{-1} \cap c_*(\mu),$$

onde L é definido em 5.1, $i_{\overline{S}, X} : \overline{S} \rightarrow X$ é a inclusão natural e $c_*(\mu)$ é a classe de MacPherson da função construtível μ .

Esta fórmula foi conjecturada em [Y2] para X projetivo. Neste caso, [PP2] já tinha mostrado que

$$\int_X \mathcal{M}_*(X) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \alpha(S) \int_{\overline{S}} c(L|_{\overline{S}})^{-1} \cap c_*(\overline{S})$$

5.4 Especialização (o caso hipersuperfície) [PP3]

Como antes, consideremos $X = f^{-1}(0)$, onde f é uma seção do fibrado em retas L sobre M . Suponhamos que existe uma seção $g \in H^0(M, L)$ tal que $g^{-1}(0)$ não

seja singular e seja transversal aos estratos de uma estratificação de Whitney de X fixada. Para $t \in \mathbb{C}$ denotamos $f_t = f - tg$ e $X_t = f_t^{-1}(0)$. Chamamos de $\hat{X}$ o seguinte subconjunto de $M \times \mathbb{C}$:

$$\hat{X} = \{(x, t) \in M \times \mathbb{C} \mid x \in X_t\}.$$

Se denotarmos por $p : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}$ a restrição a $\hat{X}$ da projeção sobre o segundo fator, então $X_t = p^{-1}(t)$ para $t \in \mathbb{C}$ e $X = X_0$. Seja $\mathbf{F}(\hat{X})$ (resp. $\mathbf{F}(X)$) o grupo de funções construtíveis sobre $\hat{X}$ (resp. sobre X). Denotamos por

$$\sigma_F : \mathbf{F}(\hat{X}) \rightarrow \mathbf{F}(X)$$

a aplicação de especialização sobre as funções construtíveis e

$$\sigma_H : H_*(X_t) \rightarrow H_*(X)$$

a aplicação de especialização nas classes de homologia (veja [Ve]). Para $\varphi \in \mathbf{F}(\hat{X})$ e t suficientemente pequeno, temos

$$\sigma_{HC*}(\varphi|_{X_t}) = c_*(\sigma_F \varphi).$$

A classe de Fulton $c^F(X)$ é dada em termos de classe de MacPherson como:

$$c^F(X) = c_*(\sigma_F(\mathbf{1}_{\hat{X}}))$$

e a classe de Milnor como:

$$\mathcal{M}_*(X) = c_*(\sigma_F(\mathbf{1}_{\hat{X}}) - \mathbf{1}_X).$$

Referências Bibliográficas

- [A1] P. Aluffi, *MacPherson's and Fulton's Chern classes of hypersurfaces*, Int. Math. Res. Notices, **11** (1994), 455-465.
- [A2] P. Aluffi, *Chern classes for singular hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999) 3989-4026.
- [AB] P. Aluffi and J.P. Brasselet, *Interpolation...*, Preprint IML, 2001.
- [BG] J.P. Brasselet et G. Gonzalez-Springberg, *Espaces de Thom et contre-exemples de J.L. Verdier et M. Goresky*, Bol. Soc. Brazil. Mat. **17** (1986), no 2, 23-50.
- [BLSS] J.-P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade, T. Suwa, *Milnor classes of local complete intersections*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no 4, 1351-1371.
- [B-S] J.P. Brasselet, M.H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Astérisque 82-83 (1981), 93-147.
- [BDK] J.L. Brylinski, A. Dubson, M. Kashiwara, *Formule de l'indice pour les Modules Holonomes et obstruction d'Euler*, C.R. Acad. Sc. Paris 293 série A 1981, 573-576.
- [Ch] S.S. Chern, *Characteristic classes of hermitian manifold*, Ann. Math. **47** (1946), 85-121.
- [Di] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology*, Birkhäuser (1988).
- [Du1] A. Dubson, *Classes caractéristiques des variétés singulières*, C.R. Acad.Sc. Paris 287série A 1978, 237-240.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, (1984).
- [GSV] X. Gómez-Mont, J. Seade and A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann. **291** (1991), 737-751.
- [Ka] M. Kashiwara, *Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 803-804.

-
- [Ke] G. Kennedy, *MacPherson's Chern classes for singular algebraic varieties*, Comm. in Alg. **18** (1990), 2821-2839.
 - [Le] Lê D. T., *Singularités isolées des intersections complètes*, Introduction à la théorie des singularités, Travaux en cours **36**, Hermann (1988).
 - [LT1] Lê D. T. et B. Teissier, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math **114** 1981, 457-491.
 - [LT2] Lê D. T. et B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. II*, Proc. Symp. in Pure Math., vol. 40 Part 2 (1983), 65-103.
 - [LT3] Lê D. T. et B. Teissier, *Limites d'espaces tangents en géométrie analytique*, Comm. Math. Helv **63**, (1988) 540-578.
 - [Li] E.L. Lima, *A característica de Euler-Poincaré*, Matemática Universitária, vol. 1 (1985) 47-62.
 - [MP1] R. MacPherson, *Characteristic classes for singular varieties*, Proc. 9th Brazilian Math. Coll. (Poços de Caldas), (1973), Vol. II, 321-327.
 - [MP2] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. **100**, no 2 (1974), 423-432.
 - [Mi1] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
 - [Mi2] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, vol. 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.
 - [Mi3] J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press (1974).
 - [PP1] A. Parusiński and P. Pragacz, *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces*, J. Alg. Geom., **4** (1995), 337-351.
 - [PP2] A. Parusiński and P. Pragacz, *Chern-Schwartz-MacPherson classes and the Euler characteristic of degeneracy loci and special divisors*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 793-817.
 - [PP3] A. Parusiński and P. Pragacz, *Characteristic classes of hypersurfaces and characteristic cycles*, J. Alg. Geom., **10** (2001), no 1, 63-79.
 - [Pi1] R. Pien, *Polar classes of singular varieties*, Ann. Sc. E.N.S. **11**, (1978), 247-276.
 - [Pi2] R. Pien, *Cycles polaires et classes de Chern pour les variétés projectives singulières*, Séminaire Ecole Polytechnique, Paris, 1977-78 and Travaux en cours **37**, Hermann Paris (1988), 7-34.
 - [Sc1] M.H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, CRAS **260**, (1965), 3262-3264 et 3535-3537.

- [Sc2] M.H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.
- [Sc3] M.-H. Schwartz, *Classes obstructrices des ensembles analytiques*, 2001.
- [SS] J. Seade and T. Suwa, *An adjunction formula for local complete intersections*, Int. J. Math. **9**, (1998), 759-768.
- [Se] B. Segre, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, Annali di Mat. **4**, 35, (1953), 1-128.
- [St] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press (1951).
- [Su] T. Suwa, *Classes de Chern des intersections complètes locales*, C.R.Acad.Sci. Paris, **324**, (1996), 67-70.
- [T1] B. Teissier, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney*, Algebraic geometry (La Rábida 1981), LNM 961, Springer (1982), 314-491.
- [T2] B. Teissier, *Quelques points de l'histoire des variétés polaires, de Poncelet à nos jours*, Séminaire d'Analyse, 1987-1988, Clermont-Ferrand, Exp. No. 4, Univ. Clermont-Ferrand II, 1990.
- [Ve] J.L. Verdier, *Spécialisation des classes de Chern*, Astérisque 82-83, 149-159, (1981).
- [Wh1] H. Whitney, *Local properties of Analytic Varieties*, Symposium in honor of M. Morse, Princeton Univ. Press, edited by S. Cairns (1965).
- [Wh2] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann of Math **81**, 496 - 549 (1965).
- [Wu1] Wu, Wen Tsün, *Characteristic Chern classes of algebraic varieties*, in chinese, Shuxue Jinzhan, **8**, no 4, (1965), 395-401.
- [Wu2] Wu, Wen Tsün, *Chern classes on algebraic varieties with arbitrary singularities*, Several complex variables (Hangzhou, 1981), Birkhäuser Boston, Boston, Mass., (1984), 247-249.
- [Y1] S. Yokura, *On a Milnor class*, Preprint (1997).
- [Y2] S. Yokura, *On characteristic classes of complete intersections*, "Algebraic Geometry - Hirzebruch 70", Contemporary Math. AMS **241**, 1999.
- [Z] J. Zhou, *Classes de Wu et classes de Mather*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **319**, (1994), 2, 171-174.