UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas

Eduardo Hernández M.

Nº 61

NOTAS DIDÁTICAS

São Carlos - SP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2585

Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas

Eduardo Hernández M.

Nº 61

NOTAS DIDÁTICAS

São Carlos – SP
Abr./2003

Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas.

Eduardo Hernández M.

Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações Funcionais Impulsivas.

Eduardo Hernández M.

Departamento de Matemática - ICMC - USP.

Resumo

Estas notas tem por finalidade introduzir ao aluno nos conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares Limitados em espaços de Banach. Aplicações a equações funcionais do tipo impulsivo são apresentados.

Sumário

Capítulo 1

Semigrupos de operadores Lineares

1.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Os principales resultados do capítulo são o Teorema 2 e o clásico Teorema de geração de Hille-Yosida, Teorema 5.

1.2 Semigrupos de operadores lineares

Definition 1. *Uma familia de operadores limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores se*

(i) $T(0) = I_d$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \qquad t, s \geq 0.$

Definition 2. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado de fortemente contínuo se para todo $x \in X$ a função $t \to T(t)x$ é continua em zero. O semigrupo é chamado uniformemente contínuo se a função $[0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$; $t \to T(t)$ é continua em zero.*

Observation 1. *Um semigrupo de operadores lineares limitados em X será chamado simplesmente um C_0-semigrupo.*

Definition 3. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X e $D(A)$ o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Os semigrupos fortemente contínuos possuin a importante propriedade de serem exponencialmente limitados como mostra o seguinte resultado.

Theorem 1. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M > 1$ tais que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Seja $\eta > 0$. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, o conjunto $\{T(t)x : t \in [0,\eta]\}$ é compacto e portanto limitado para todo $x \in X$. Logo, pelo teorema da limitação uniforme existe $M \geq 1$ tal que $\| T(s) \| \leq M$ para todo $s \in [0,\eta]$. Se $t \geq \eta$, t pode ser escrito na forma $t = n\eta + \delta$ onde $\delta \in [0,\eta]$. Assim

$$\| T(t) \| = \| T(\delta)T(\eta)^n \| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t},$$

onde $\omega = \frac{1}{\eta}\ln M$. A prova esta completa. ∎

No seguinte resultado são resumidas algumas propriedades básicas relativas a semigrupos fortemente contínuos as que nos auxiliaram nos capítulos posteriores.

Theorem 2. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *Para todo $t \geq 0$ e todo $x \in X$, $\lim_{s\to t} T(s)x = T(t)x$. Mais ainda se o semigrupo é uniformemente continuo então $\lim_{s\to t} T(s) = T(t)$ em $\mathcal{L}(X)$.*

(b) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x$.*

(c) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\displaystyle\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ e $\displaystyle A\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x$.*

(d) *Para todo $x \in D(A)$ e todo $t > 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*

(e) *Para todo $x \in D(A)$, $\displaystyle T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Axdr = \int_s^t AT(r)x\, dr$.*

Demonstração: Mostraremos cada propriedade em forma separada.

(a) Sejam $x \in X$, $t > 0$ e $\epsilon > 0$. Como o semigrupo é fortemente contínuo, existem números positivos M e δ tais que $\| T(s) \| \leq M$ para $s \in [0, t+1]$ e $\| T(s)x - x \| < \frac{\epsilon}{M}$ quando $0 < s < \delta$. Nestas condições, para $0 < t - s < \delta$ temos que

$$\| T(s)x - T(t)x \| \quad \leq \quad \| T(s) \| \| x - T(t-s)x\, ds \| \leq \epsilon.$$

Usando um argumento análogo é possível mostrar a continuidade a direita de t. Isto prova (a).

(b) Do item (a), existe $\delta > 0$ tal que $\| T(s)x - T(t)x \| < \epsilon$ quando $| s - t | < \delta$. Conseqüentemente, para $0 \leq h \leq \delta$ temos que

$$\begin{aligned} \| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - T(t)x \| &= \| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)\, ds \| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \| T(s)x - T(t)x \|\, ds \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

O limite isquerdo, para o caso $t > 0$, é provado em forma análoga. Isto mostra a propriedade.
(c) Sejam $x \in X$ e $h > 0$. Como os operadores $T(s)$ são contínuos vemos que

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\, ds\\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\, ds.\end{aligned}$$

Usando agora (b) obtemos que

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x = T(t)x - x.$$

Por tanto $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e $A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$.
(d) Sejam $x \in D(A)$ e $t > 0$. Como para $h > 0$

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x,$$

da continuidade de $T(t)$ deduzimos que

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.1}$$

Por outro lado, se $0 < h < t$

$$\begin{aligned}&\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \|\\ &\quad\leq \| T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right) - T(t)Ax \|\\ &\quad\leq \| T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right) \| + \| T(t-h)Ax - T(t)Ax \|\\ &\quad\leq \| T(t-h) \|\| \frac{T(h)x-x}{h} - Ax \| + \| T(t-h)Ax - T(t)Ax \|,\end{aligned}$$

o que permite concluir que

$$\frac{d^-T(t)x}{dt} = T(t)Ax. \tag{1.2}$$

A propriedade é agora conseqüência de (1.1) e (1.2).
(e) Se $x \in D(A)$, pelo item (d) temos que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{dT(r)x}{dr}\, dr = \int_s^t T(r)Ax\, dr = \int_s^t AT(r)x\, dr.$$

Isto prova (e) e completa a prova do teorema. ■

Theorem 3. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, então A é linear, fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração: A linearidade de A é evidente. Se $x \in X$, pelo Teorema 2 sabemos que $t^{-1}\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ e que $t^{-1}\int_0^t T(s)x\, ds \to x$ quando $t \downarrow 0$, o que mostra que $\overline{D(A)} = X$. Mostremos agora que A é fechado. Suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência em $D(A)$ e que $x, y \in X$ são tais que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Das propriedades **(b)**, **(d)** em Teorema 2 sabemos que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\, ds,$$

o que da limitação em compactos de $(T(t))_{t\geq 0}$ permite concluir que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds, \tag{1.3}$$

e então que $\dfrac{d^+T(t)x}{dt}|_{t=0} = y$. Portanto $x \in D(A)$ e $Ax = y$ o que mostra que A é fechado. A prova está completa. ■

O próximo teorema caracteriza o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformente contínuo.

Theorem 4. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se e somente se A é limitado.*

Demonstração: Seja A um operador linear limitado. Para $t \geq 0$ definimos o operador $T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$. Como A é um operador limitado

$$\| T(t) \| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n \| A \|^n}{n!} \leq e^{t\|A\|},$$

o que mostra que $T(t)$ é um operador linear limitado. Afirmamos que a família $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo e que A é o seu gerador infinitesimal. O fato de $(T(t))_{t\geq 0}$ ser um semigrupo é um longo e conhecido jogo algébrico, pelo que omitiremos esta parte da prova. Por outro lado, segue facilmente da definição de $T(t)$ que $\| T(t) - I \| \leq t \| A \| e^{t\|A\|}$ para $t \geq 0$ o que mostra que o semigrupo é uniformemente contínuo. Mais ainda, como

$$\| \frac{T(t) - I}{t} - A \| \leq \| A \| \| T(t) - I \|,$$

concluímos que A é o gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$.

Reciprocamente, suponha que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em X. Como $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds$ converge uniformemente para $T(0) = I$ quando $t \to 0$, segue que para δ suficientemente pequeno $\frac{1}{t'}\int_0^{t'} T(s)ds$ é invertível se $0 < t' < \delta$. Pelo Teorema 2 sabemos que para $x \in X$ e $0 < h < \delta$

$$\frac{T(h)x - x}{h} = A\left(\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds\right),$$

o que das observações anteriores implica que

$$\frac{T(h) - I}{h}(\int_0^h T(s)ds)^{-1}x = Ax$$

quando $0 < h < \delta$. Portanto, A é limitado em X. A prova está completa. ∎

1.3 O Teorema de Hille Yosida para semigrupos de contrações

Nesta subseção mostramos o famoso teorema de Hille Yosida. Este resultado caracteriza quando um operador linear fechado é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente continuo de operadores lineares em um espaço de Banach, o que tem importantes implicações respeito da teoria nas suas aplicações a problemas de evolução em derivadas parciais. Mencionamos que mostraremos uma versão mas restrita do resultado, a que é valida para semigrupos de contrações.

Definition 4. *Um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é é chamado semigrupo de contrações se $\| T(t) \| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definition 5. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A, notado $\rho(A)$, e o conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{N} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e } R(\lambda : A) := (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Para mostrar o Teorema de Hille-Yosida, veja Teorema 5, precisamos do seguinte resultado.

Proposition 1. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ operador linear, fechado tal que $\overline{D(A)} = X$ e assuma that $\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para todo $\lambda > 0$. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) $\lim_{\lambda\to\infty} R(\lambda : A)x = x$ *para todo* $x \in X$

(b) *Se* $A_\lambda x = \lambda A R(\lambda : A) - \lambda I$, *então* $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = x$ *para todo* $x \in D(A)$.

(c) *Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ em X. Mais ainda,*

$$\| T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|, \qquad x \in X, \quad \lambda, \mu, t > 0. \tag{1.4}$$

Demonstração: Mostraremos cada item em forma separada.
(a) Se $x \in D(A)$, da desigualdade

$$\| \lambda R(\lambda : A)x - x \| = \| AR(\lambda : A)x \| \leq \frac{1}{\lambda} \| Ax \|$$

segue que $\lambda R(\lambda : A)x \to x$ quando $\lambda \to \infty$. Sejam agora $x \in X$, $\epsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência com valores em $D(A)$ convergente a x. Seja $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\| x - x_n \| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_\epsilon$ e fixemos $L > 1$ tal que $\| \lambda R(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon} \| \leq \frac{\epsilon}{2}$ quando $\lambda > L$. Nas condições anteriores temos que para $\lambda > L$

$$\begin{aligned}
\| \lambda R(\lambda : A)x - x \| &\leq \| \lambda R(\lambda : A) \| \| x_{n_\epsilon} - x \| + \| \lambda R(\lambda)x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon} \| \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \| x_{n_\epsilon} - x \| + \| \lambda R(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x_{n_\epsilon} \| \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}$$

o que prova (a).

Mostremos agora a condição (b). Se $x \in D(A)$, da equação $A_\lambda x = (\lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I)x = \lambda R(\lambda : A)Ax$, e o item (a) vemos que $A_\lambda x \to Ax$ quando $\lambda \to \infty$.

Vejamos finalmente a propriedade (c). É óbvio da sua definição, que A_λ é um operador linear limitado e portanto é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ dado por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, veja Teorema 4. Mais ainda, das hipóteses temos que

$$\begin{aligned}
\| T_\lambda(t) \| &= \| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} e^{-\lambda t} \| \\
&= e^{-\lambda t} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \leq 1,
\end{aligned}$$

o que mostra que $(T_\lambda)_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração. Um extenso jogo algébrico, que obviaremos, mostra que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$ para $\lambda, \mu > 0$ ou que juntamente com o fato que $t \to T_\lambda x$ é diferenciavelque e o item (c) do Teorema 2, permite ver que

$$\begin{aligned}
\| T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x \| &= \| \int_0^1 \frac{d}{ds}[T_\lambda(ts)T_\mu(t(1-s))x]ds \| \\
&= \| \int_0^1 tA_\lambda T_\lambda(ts)T_\mu(t(1-s))x - tT_\lambda(ts)A_\mu T_\mu(t(1-s))xds \| \\
&\leq \int_0^1 t \| T_\lambda(ts)T_\mu(t(1-s))ds \| \| A_\lambda x - A_\mu x \| \\
&\leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|,
\end{aligned}$$

o que finalmente mostra (1.4). A prova do Teorema esta agora completa. ∎

Agora, estabelecemos e mostramos o resultado mais importante deste Capítulo.

Theorem 5. *(Hille-Yosida) Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração se e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(ii) *$\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.*

Demonstração: Suponha que A é o gerador de um semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. A condição (i) é consequência direta do Teorema 3. Mostramos agora (**ii**); para $\lambda > 0$ definimos o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt, \quad x \in X. \tag{1.5}$$

Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração, da estimativa

$$\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| x \| dt = \frac{\| x \|}{\lambda}, \qquad x \in X,$$

concluímos que $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ e que $\| R(\lambda) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Mais ainda, $R(\lambda) = R(\lambda : A)$ para $\lambda > 0$. De fato, se $x \in X$ e $h > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)xds \\
&\quad + \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h \frac{e^{-\lambda(s-h)}}{h}T(s)xds \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds,
\end{aligned}$$

de onde se concluímos que $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$ e coseqüêntemente que $R(\lambda)x \in D(A)$. Por tanto,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{1.6}$$

Por outro lado, usando que A é fechado, vemos que para $x \in D(A)$

$$\begin{aligned}
R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)Axds \\
&= A\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds,
\end{aligned}$$

e então que

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x, \qquad \lambda > 0,\ x \in D(A). \tag{1.7}$$

Segue agora (1.6) e (1.7), que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, para $\lambda > 0$. Isto prova a condição (**ii**).

Suponha agora que as condições (**i**), (**ii**) são verificadas. Sejam $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ e A_λ como na Proposição 1. Da desigualdade

$$\| T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \leq t \| A_\lambda x - Ax \| + \| A_\mu x - Ax \|, \qquad x \in D(A),$$

e da Proposição 1, segue que $(T_\lambda(t)x)$ é convergente se $\lambda \to \infty$. Mais ainda, como cada $(T_\lambda(t)x)_{t\geq 0}$, $\lambda > 0$, é de contração e $D(A)$ é denso em X, segue que $T(t)x := \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x$ existe para todo $x \in X$, que $T(t)$ define um operador linear e que $\| T(t) \| \leq 1$, para todo $t \geq 0$. Afirmamos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contração e que A é o seu gerador infinitesimal. O fato que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contração segue de ter que $\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x = T(t)x$ é uniformemente em compactos de t. Vejamos agora que A e o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Seja B o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ e fixemos $x \in D(A)$. Sabemos que a convergência $T_\lambda(s)A_\lambda x \to T(s)Ax$ é uniforme em compactos de s, o que juntamente com

$$\begin{aligned}\frac{T(h)x - x}{h} &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{T_\lambda(h)x - x}{h}\\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h T_\lambda(s)A_\lambda x ds\\ &= \frac{1}{h}\int_0^h T(s)Axds,\end{aligned}$$

e o Teorema 2 nos permite concluir que $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$. Assim $D(A) \subset D(B)$. Finalmente, como $1 \in D(B) \cap D(A)$ temos que $(I - B)^{-1}D(A) = (I - A)^{-1}D(A) = X$, o que implica que $A = B$. Por tanto, A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. A prova esta completa. ∎

Usando os argumentos do inicio da prova do Teorema 5 é possivel mostrar o seguinte resultado.

Corollary 1. *Se $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, então $\rho(A) \supset U = \{\lambda \in \mathbb{N} : Re(\lambda) > 0\}$. Maís ainda, para todo $\lambda \in U$, $R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{\lambda t}T(t)dt$ e $\| R(\lambda : A) \|\leq \frac{1}{Re(\lambda)}$.*

Corollary 2. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ verificando que $\| T(t) \|\leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$, se e somente se,*

(a) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

(b) *$\rho(A) \supset (\omega, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \|\leq \frac{1}{\lambda - \omega}$, $\lambda > \omega$.*

Demonstração: Suponha que A é gerador do C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$. É fazil mostrar que $A - \omega I$ é o gerador do C_0-semigrupo de contração $(e^{-\omega}T(t))_{t\geq 0}$ e por tanto que $A - \omega I$ satizfaz as propriedades **(i)**, **(ii)** do Teorema 5. Isto mostra que **(a)**, **(b)** são válidas. Reciprocamente se **(a)**, **(b)** são verificadas, então $A + \omega$ cumpre as condições **(i)**, **(ii)** do Teoremea 5. Assim, $A + \omega$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração $(S(t))_{t\geq}$. Nestas condições A é o gerador infinitesimal de semigrupo $T(t) = e^{\omega}S(t)$. A prova está completa. ∎

Capítulo 2

Semigrupos Especiais e Potências Fracionarias de Operadores Fechados

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos alguns tipos especiais de semigrupos. Especificamente, estamos interessados nos semigrupos compactos, diferenciaveis e analíticos. Na seção três deste capitulo consideraremos com algum detalhe potências fraccionarias associadas com o gerador de um semigrupo análitico.

2.2 Semigrupo de Operadores Compactos

Definition 6. *Um C_0-semigrupo, $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados é compacto para $t > t_0$, se para todo $t > t_0$ o operador $T(t)$ é compacto. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado compacto, se é compacto para todo $t_0 > 0$.*

Observation 2. *Note que se X é um espaço de dimensão finita então todo C_0-semigrupo de operadores lineares é compacto. Mais ainda, um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é tal que $T(t)$ é compacto para $t \geq 0$ se e somente se X é de dimensão finita.*

Theorem 6. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em X. Se $T(t)$ é compacto para $t > t_0$, então a função $(t_0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$; $t \to T(t)$ é contínua.*

Demonstração: Fixemos $t > t_0$, $0 < \epsilon < t$ e $M > 0$ ta que $\| T(s) \| \leq M$ para todo $s \in [0,1]$. Como o conjunto $U_t = \{T(t)x : \| x \| \leq 1\}$ é relativamente compacto em X, existem pontos $x_1, \ldots, x_n$ tais que

$$U_t \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(T(t)x_j, \frac{\epsilon}{2(M+1)}\right). \tag{2.1}$$

Fixemos agora $0 < \delta < 1$ tal que

$$\| T(t+h)x_j - T(t)x_j \| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

quando $|h| \leq \delta$.

Seja $0 < h < \delta$ e $x \in X$ com $\| x \| \leq 1$. Das escolhas anteriores existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $T(t)x \in B\left(T(t)x_i, \frac{\epsilon}{2(M+1)}\right)$ de onde segue que

$$\begin{aligned}
\| T(t+h)x - T(t)x \| &\leq \| T(h) \| \| T(t)x - T(t)x_j \| + \| T(t)x_j - T(t)x \| \\
&\quad + \| T(t+h)x_j - T(t)x_j \| \\
&< \frac{M\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon}{2(M+1)} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2(M+1)}(M+1) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\| T(t+h) - T(t) \|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$. A prova esta completa. ∎

O próximo teorema caracteriza quando um C_0- semigrupo é compacto.

Theorem 7. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0-semigrupo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto se e somente se a função $(0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$; $t \to T(t)$ é contínua e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração: Suponha que $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto e fixemos $\omega, M > 0$ tal que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, $0 \leq t$. A continuidade de $t \to T(t)$ segue do Teorema 6. Vejamos agora a compacidade de $R(\lambda, A)$ para $\lambda \in \rho(A)$. Sabemos da demonstração do Teorema 5 que

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) x ds. \tag{2.3}$$

para $\lambda \in \rho(A) \bigcap (\omega, \infty^+)$. Como o espaço dos operadores lineares compactos é fechado em $\mathcal{L}(X)$, segue que $R_n(\lambda, A) := \displaystyle\int_0^n e^{-\lambda s} T(s) x ds$, $\lambda \in (\omega, \infty^+)$ é compacto, o que por sua vez implica que a $R(\lambda, A)$ é um operador compacto. Usando agora a identidade

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\lambda : A) R(\mu : A), \qquad \lambda, \mu \in \rho(A),$$

concluímos $R(\mu : A)$ é compacto para todo $\mu \in \rho(A)$.

Assuma agora $R(\lambda : A)$ é compacto para $\lambda \in \rho(A)$ e que $(0, \infty^+) \to \mathcal{L}(X)$, $t \to T(t)$ é contínua. Para mostrar que $T(t)$, $t > 0$, é compacto, provaremos que $T(t)$ é limite em $\mathcal{L}(X)$ de uma sequência de operadores lineares compactos. Usando (2.3); para $\lambda \in (\omega, \infty^+), t > 0$ e $\delta > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\| \lambda R(\lambda : A) T(t) - T(t) \| &= \| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} (T(t+s) dt - T(t)) ds \| \\
&\leq \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s} \| T(t+s) - T(t) \| ds \\
&\quad + \int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s} \| T(t+s) - T(t) \| ds \\
&\leq \sup_{s \in [0,\delta]} \| T(t+s) - T(t) \| + 2\lambda(\lambda - \omega)^{-1} M e^{\omega(t+\delta)} e^{-\delta(\lambda)},
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \| \lambda R(\lambda : A) T(t) - T(t) \| \leq \sup_{s \in [0,\delta]} \| T(t+s) - T(t) \| . \tag{2.4}$$

Finalmente, usando a continuidade de $t \to T(t)$, a desigualdade (2.4) e o fato de δ ser arbitrário, concluímos que $\lambda R(\lambda : A)T(t) \to T(t)$ em $\mathcal{L}(X)$ quando $\lambda \to \infty$ o que mostra que para $t > 0$, o operador $T(t)$ é compacto pois cada $\lambda R(\lambda : A)T(t)$ é compacto. A prova esta agora completa. ■

2.3 Semigrupos Diferenciaveis

Definition 7. *Um C_0-semigrupo, $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares limitados em X é diferenciavel para $t > t_0$, se para cada $x \in X$ a função $s \to T(s)x$ é diferenciavel em cada $t > t_0$. O semigrupo é chamado diferenciavel se é diferenciavel para todo $t_0 > 0$.*

Observation 3. *Se X é de dimensão finita então todo C_0-semigrupo de operadores lineares é diferenciavel, mais ainda, de clase C^∞. Por outro lado, se A é limitado, é claro que o semigrupo gerado por A, e dizer $T(t) = e^{At}$, é C^∞ e por tanto diferenciavel.*

Theorem 8. *Suponha que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciável para $t > t_0$, então as seguintes proprieades são verificadas.*

(a) *$T(t)(X) \subset D(A^n)$ para todo $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $t > nt_0$.*

(b) *A função $(nt_0, \infty) \to X$; $s \to T(s)x$ é n-vezes diferenciavel e $T^{(n)}(t)x = A^nT(t)x$ para todo $x \in X$. Mais ainda, $T^{(n)}(t)A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$*

(b) *A função $(nt_0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$; $s \to T^{(n-1)}(s)$ é contínua.*

Demonstração. É claro que **(b)** implica **(a)**, pelo que demonstraremos **(b)** em primer lugar. Como o semigrupo é diferenciavel para $t > t_0$, a função $(t_0, \infty) \to X$; $s \to T(s)x$ é de clase C^1 e $T'(t)x = AT(t)x$. Como $AT(t)$ é fechado com dominio X, do teorema do gráfico fechado temos que $AT(t) \in \mathcal{L}(X)$. Suponha agora que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$ e fixemos $t > (n+1)t_0$. Se $s > nt_0$ é tal que $t - s > t_0$, da hipotese de indução vemos que

$$T^{(n)}(t)x = T(t-s)A^nT(s)xds. \tag{2.5}$$

Como $t - s > t_0$, o lado direito (2.5) é diferenciável e então $T^{(n+1)}(t)x = AT(t - s)A^nT(s)x = A^{n+1}T(t-s)T(s)x = A^nT(s)x$. Como x é arbitario, o anterior implica que $T^{(n+1)} = A^{n+1}T(t)$ é um operador linear, fechado com dominio X o que nos permite concluir que $A^nT(t) \in \mathcal{L}(X)$. A prova de **(b)** esta completa.

Se $t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$ e $\| T(s) \| \leq M$ sobre $[0, t_1 + 1]$; para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned} \| T(t_2)x - T(t_1)x \| &= \int_{t_1}^{t_2} AT(s)xds \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \| T(s-t_1) \| \| AT(t_1)x \| \, ds, \\ &\leq M(t_2 - t_1) \| AT(t_1)x \|, \end{aligned}$$

o que pelo item **(a)** mostra que

$$\| T(t_2) - T(t_1) \| \leq M(t_2 - t_1) \| AT(t_1) \|, \tag{2.6}$$

e por tanto a continuidade no caso $n = 1$. Similarmente, se $(n+1)t_0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$; para $x \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
\| T^{(n)}(t_2)x - T^{(n)}(t_1)x \| &= \| \int_{t_1}^{t_2} T^{(n+1)}(s)xds \| \\
&= \| \int_{t_1}^{t_2} A^{n+1}T(s)xds \| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \| T(s-t_1) \| \| A^{n+1}T(t_1)x \| \, ds, \\
&\leq M(t_2 - t_1) \| A^{n+1}T(t_1)x \|,
\end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$\| T^{(n)}(t_2) - T^{(n)}(t_1) \| \leq M(t_2 - t_1) \| A^{n+1}T(t_1) \| .$$

Por tanto (**c**) é verificada. A prova do teorema esta completa. ■

Corollary 3. *Assuma que as condições do Teorema 8 são verificadas. Então a função* $((n+1)t_0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$*;* $s \to T(s)x$ *é n-vezes diferenciavel e* $T^{(n)}(t) = A^nT(t)$.

Demonstração: Seja $0 \leq k \leq n$. Do teorema anterior sabemos que a função $(nt_0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$, $s \to T^{(k-1)}(s) = A^{k-1}T(s)$ é contínua, por tanto para $t > nt_0$ temos que

$$T^{(k-1)}(t+h) - T^{(k-1)}(t) = \int_t^{t+h} A^kT(s)ds, \tag{2.7}$$

o que mostra o resultado. ■

Corollary 4. *Suponha que* $(T(t))_{t\geq}$ *é um* C_0*-semigrupo diferenciável. Então*

(**a**) *A função* $(0, \infty) \to \mathcal{L}(X); t \to T(t)$ *é de clase* C^∞*;*

b) *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $t > 0$

$$T^{(n)}(t) = \left(AT(\frac{t}{n})\right)^n = \left(T'(\frac{t}{n})\right)^n. \tag{2.8}$$

Demonstração: A propridade (**a**) é conseqüência do Corolario 3. Para mostrar (**b**) usaremos indução. Do Teorema 8 vemos que a formula (2.8) é válida. Suponha que (2.8) vale para cada $0 \leq k \leq n$, onde $n \in \mathbb{N}$ é fixo. Sabemos pela hipoteses de indução que para $t > s$

$$T^{(n)}(t) = (AT(\frac{t}{n}))^n = T(t-s)(AT(\frac{s}{n}))^n,$$

pelo que diferenciando respeito de t teremos que

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\left(AT(\frac{s}{n})\right)^n.$$

Finalmente, usando $s = \dfrac{nt}{n+1}$ na ultima igualdade, temos que

$$\begin{aligned}
T^{(n+1)}(t) &= AT(t - \frac{nt}{n+1})(AT(\frac{\frac{nt}{n+1}}{n}))^n \\
&= AT(\frac{t}{n+1})(AT(\frac{t}{n+1}))^n,
\end{aligned}$$

o que completa a prova do Corolario. ■

2.4 Semigrupos Analíticos

Em esta seção estabelecemos as principales proprieades dos semigrupos analiticos. Estamos especialmente interesados em um resultado que caracterize tal classe de semigrupos, ou seja, de um resultado que nos forneça de condições suficientes para garantir que um determinado operador é o gerador de um semigrupo análitico. Nesta seção, sempre $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado com dominio $D(A)$ denso em X. Mais ainda, em esta seção diremos que A verifica a condição A_δ, onde $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, se a seguinte propriedade é verificada.

Condição $\mathbf{A}_\delta$: *Diremos que o operador A verifica a* **Condição $\mathbf{A}_\delta$** *se*

$$\sum\nolimits_\delta := \left\{\lambda \in \mathbb{N} : |arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \setminus \{0\} \subset \rho(A) \tag{2.9}$$

e se para cada $0 < \delta' < \delta$ existe $M_{\delta'} \geq 1$ tal que

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{M_{\delta'}}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \overline{\sum\nolimits_{\delta'}}, \ \lambda \neq 0. \tag{2.10}$$

Para comezar o estudo dos semigrupos análiticos, consideremos a seguiente definição.

Definition 8. *Seja $\Delta = \{z \in \mathbb{N} : \ \phi_1 \leq arg(z) \leq \phi_2, \ \phi_1 < 0 < \phi_2\}$. Uma família de operadores lineares limitados $(T(z))_{z\in\Delta}$ em X é um semigrupo analítico em Δ, se as seguintes condições são verificadas.*

(i) *A função $z \to T(z)$ é analítica em Δ;*

(ii) $T(0) = I_d$ *e* $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$, *para todo* $x \in X$;

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, *para todo* $z_1, z_2 \in \Delta$.

Da teoria da transformada de Laplace, sabemos que se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear e $u(\cdot)$ e solução da equação diferencial $x'(t) = Ax(t)$ então $u(t) = \int_{\|A\|}^{\infty} e^{st}(I - A)^{-1}ds$. Considerando isto, para $r > 0$ definimos a familia de operadores $(S(z))_{\in\sum_\delta}$ como se indica a continuação.

$$S(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\mu z}R(\mu : A)d\mu, & z \in \sum_{\delta'}, \ 0 < \delta' < \delta, \\ I_d, & z = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $\gamma(r,\delta') = \gamma_1(r,\delta') \cup \gamma_2(r,\delta') \cup \gamma_3(r,\delta')$ é a curva C^1 por partes definida por

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1(r,\delta') &= \left\{\rho e^{i(\pi/2+\delta')} : \ \rho \in [r,\infty)\right\}, \\ \gamma_2(r,\delta') &= \left\{re^{i\theta} : \ -\pi/2 - \delta' \leq \theta \leq \pi/2 + \delta'\right\}, \\ \gamma_3(r,\delta') &= \left\{\rho^{-i(\pi/2+\delta')} : \ \rho \in [r,\infty)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Antes de mais nada mostraremos que a familia $(S(z))_{\in\sum_\delta}$ esta corretamente definida.

Lemma 1. *Se A verifica a* **Condição A_δ** *então cada operador $S(z)$, $z \in \sum_\delta$, esta corretamente definido é linear e contínuo em X.*

Demonstração: Seja $z \in \sum_{\delta'}$ onde $0 < \delta' < \delta$. Estudemos inicialmente a convergencia da integral em (2.11) sobre a curva $\gamma(r, \delta' - \epsilon)$ onde $r = \frac{1}{|z|}$ e $\epsilon = \frac{\delta - \delta'}{2}$. Estimemos $\| e^{\mu z} R(u : A) \|$ para $\mu \in \gamma(r, \delta' - \epsilon)$. Se $\mu \in \gamma_1(r, \delta' - \epsilon)$ então $\mu z =| \mu z \mid e^{i(\arg(\mu)+\arg(z))}$ e

$$\frac{\pi}{2} + \epsilon < \arg(\mu) + \arg(z) < \frac{3\pi}{2} - \epsilon \tag{2.13}$$

pois $| \arg(\mu) |= \frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon$, $| \arg(z) |\leq \frac{\pi}{2} + \delta$ e $\delta < \frac{\pi}{2}$. Usando agora (2.13) vemos que

$$\begin{aligned} Re(\mu z) &= \mid \mu z \mid Re(e^{i(\arg(\mu)+\arg(z))}) \\ &= \mid \mu z \mid \cos(\arg(\mu) + \arg(z)) \\ &\leq \mid \mu z \mid \cos(\frac{\pi}{2} + \epsilon) = - \mid \mu z \mid \sin(\epsilon), \end{aligned}$$

e por tanto que

$$Re(\mu z) \;=\; - \mid \mu z \mid \sin(\epsilon), \qquad \mu \in \gamma_1(r, \delta' - \epsilon). \tag{2.14}$$

Similarmente, se $\mu \in \gamma_3(r, \delta' - \epsilon)$ temos que

$$Re(\mu z) \;=\; - \mid \mu z \mid \sin(\epsilon), \qquad \mu \in \gamma_3(r, \delta' - \epsilon). \tag{2.15}$$

É claro agora de (2.14) e (2.15) que

$$\mid e^{\mu z} \mid \;\leq\; e^{-|\mu z| \sin(\epsilon)}, \qquad \mu \in \gamma_i(r, \delta' - \epsilon),\; i = 1, 3. \tag{2.16}$$

Usando agora a desigualdade (2.16) vemos que

$$\begin{aligned} \| S(z) \| &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma^i(r,\delta'-\epsilon)} \| e^{\mu z} R(\mu : A) \| \, d\mu \\ &\leq \int_{\frac{1}{|z|}}^{\infty} e^{-\rho |z| \sin(\epsilon)} M_{\delta' - \epsilon} d\rho + \int_{-\pi}^{\pi} \| e^{\frac{1}{|z|} e^{i\theta} |z|} R(\frac{1}{\mid z \mid} e^{i\theta} : A) \frac{1}{\mid z \mid} \| \, d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{|z|}}^{\infty} e^{-\rho |z| \sin(\epsilon)} M_{\delta' - \epsilon} d\rho \\ &\leq \frac{2M_{\delta'-\epsilon}}{2\pi} \int_1^{\infty} e^{-\rho \sin(\epsilon)} d\rho + 2\pi e M_{\delta' - \epsilon} \end{aligned}$$

e então que

$$\| S(z) \| \;\leq\; 2M_{\delta' - \epsilon} (\frac{e^{-\sin(\epsilon)}}{\sin(\epsilon)} + 2\pi e), \qquad z \in \sum_{\delta' - \epsilon} \tag{2.17}$$

o que prova que o operador $S(z)$ e beim sobre $\gamma(r, \delta' - \epsilon)$ e que es um operador linear contínuo.

Vejamos agora que a definição de $S(z)$ é independente da curva $\gamma(r, \beta)$ sempre que $z \in \sum_\beta$. Sejam $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < \delta$, $0 < r_1 \leq r_2$ e $z \in \sum_{\delta_1} \bigcap \sum_{\delta_2}$. Como a função

$\mu \to e^{\mu z}R(\mu, A)$ e analitica em $\sum_\delta$, para mostrar que a definição de $S(z)$ é independente da curva $\gamma(r_i, \delta_i)$, $i = 1, 2$, é suficiente observar

$$\| \int_{\gamma(\rho)} e^{\mu z} R(\mu : A) d\mu \| \leq \int_{\delta_1}^{\delta_2} e^{\rho \cos(\theta)} d\theta \to 0,$$

quando $\rho \to \infty$ onde $\gamma(\rho)$ é a curva que descreve o conjunto $\{\rho e^{i\theta} : \theta \in [\delta_1, \delta_2]\}$. A prova esta agora completa. ∎

Observation 4. *Se A verifica a* **Condição $\mathbf{A}_\delta$**, *da demonstração do Lema 1 e da analaticidade da função $\mu \to e^{\mu z}R(\mu, A)$ sobre $\sum_\delta$, inferimos que para cada $z \in \sum_{\delta'}$*

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} R(\mu : A) d\mu, \tag{2.18}$$

para toda curva, $\gamma \subset \sum_\delta$, de classe C^1 por partes "unindo" $\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$ com $\infty e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$.

No seguinte resultado mostraremos que a familia de operadores definida em (2.14) é um semigrupo analitico de operadores lineares em X.

Theorem 9. *Suponha que A verifica a* **Condição $\mathbf{A}_\delta$**. *Se $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ a familia de operadores definida em (2.14) então as seguintes as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) *Para cada $0 < \delta' < \delta$ o conjunto $\{S(z) : z \in \sum_{\delta'}\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$.*

(ii) *A aplicação $z \to S(z)$ é analítica em $\sum_\delta$.*

(iii) *$S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \sum_\delta$.*

(iv) *Para todo $(\delta', x) \in (0, \delta) \times X$, a função $\sum_{\delta'} \to X$; $z \to S(z)x$ é contínua.*

Demonstração: Mostraremos cada item em forma separada. A propriedade **(i)** segue diretamente da estimativa (2.17). Lembramos que para $\epsilon = \frac{\delta-\delta'}{2}$

$$\| S(z) \| \leq 2M_{\delta'-\epsilon}\left(\frac{e^{-\sin(\epsilon)}}{\sin(\epsilon)} + 2\pi e\right), \qquad z \in \sum\nolimits_{\delta-\epsilon}.$$

(ii) A analiticidade é conseqüência direta da analiticidade de $\mu \to e^{\mu z}R(\mu; A)$ em $\sum_\delta$ e do Teorema de Fubbini. Os detalhes serão obviados.

(iii) Sejam $z_1, z_2 \in \sum_{\delta'}$, $0 < \delta' < \delta$ e $\gamma(1, \delta'), \gamma(1 + c, \delta')$, $c > 0$, curvas de classe C^1 por partes definidas como em (2.12). Fazendo uso do Teorema **de Fubinni,** da identidade $R(\mu : A)R(\lambda : A) = \dfrac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu}$ e do fato que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu &= 0, \qquad && \lambda \in \gamma(1 + c, \delta'), \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1+c,\delta')} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda &= e^{\mu z_2}, \qquad && \mu \in \gamma(1, \delta'),
\end{aligned}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
S(z_1)S(z_2) &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\gamma(1,\delta')} e^{\mu z_1} R(\mu : A) \int_{\gamma(1+c,\delta')} e^{\lambda z_2} R(\lambda : A) d\lambda d\mu \\
&= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\gamma(1,\delta')} \int_{\gamma(1+c,\delta')} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} (\frac{R(\mu : A) - R(\lambda : A)}{\lambda - \mu}) d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} e^{\mu z_1} R(\mu : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1+c,\delta')} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1+c,\delta')} e^{\lambda z_2} R(\lambda : A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu \right) d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} e^{\mu z_1 + \mu z_2} R(\mu : A) d\mu,
\end{aligned}$$

e por tanto que

$$S(z_1)S(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} e^{\mu(z_1+z_2)} R(\mu : A) d\mu = S(z_1 + z_2),$$

quando $z_i \in \sum_{\delta'}$. Isto prova (**iii**).

Mostremos agora (**iv**). Seja $0 < \delta' < \delta$. Como a familia de operadores $(S(z))_{z \in \sum_\delta}$ é uniformemente limitada em $\sum_{\delta'}$, é suficiente mostrar a propriedade para $x \in D(A)$. Seja $x \in D(A)$. Da identidade $R(\mu : A)Ax = \mu R(\mu : A)x - x$ e da representação de $S(z)$, $z \in \sum_{\delta'}$, temos que

$$\begin{aligned}
S(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} (e^{\mu z} R(\mu : A) - \frac{1}{\mu}) x d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} e^{\mu z} R(\mu : A) A x d\mu.
\end{aligned}$$

Resulta evidente que $e^{\mu z} R(\mu : A)x \to R(\mu : A)$ se $z \to 0$. Mais ainda, como

$$\| \frac{e^{\mu z}}{\mu} R(\mu : A) A x \| \leq \frac{M}{| \mu |^2} (1 + e^{|z|}) \| x \|,$$

pelo teorema da convergencia domminada concluimos que

$$\lim_{z \in \sum_{\delta'}, z \to 0} (S(z)x - x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(1,\delta')} \frac{R(\mu : A) A x}{\mu} d\mu. \tag{2.19}$$

Obsevamos agora que da analiticidade de $\mu \to \dfrac{R(\mu : A)}{\mu}$ na região a direita de $\gamma(1, \delta)$ e do fato que

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} \frac{R(\mu : A)}{\mu} A x d\mu \to 0,$$

quando $r \to \infty$, onde

$$C_r = \{ r e^{i\theta} : \theta \in (\frac{-\pi}{2} + \delta', \frac{\pi}{2} + \delta') \}$$

obtemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(1,\delta')}\frac{R(\mu:A)}{\mu}Axd\mu=0,$$

o que por (2.19) mostra a propriedade. A prova do Teorema esta agora completa. ∎

Sebemos do Teorema (9) que a famila $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ definida em (2.11) é um semigrupo analitico em $\sum_\delta$. Mais ainda, veremos no proximo resultado que A é o gerador de $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$.

Proposition 2. *Suponha que A verifica a* **Condição $\mathbf{A}_\delta$** *e seja $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ a familia de operadores definida em (2.14). Então $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ é um semigrupo analitico em $\sum_\delta$ e $A:D(A)\subset X\to X$ é seu gerador infinitesimal.*

Demonstração: Do Teorema (9), é claro que $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ é um semigrupo analitico em $\sum_\delta$. Por tanto so resta mostrar que A é seu gerador infinitesimal. Seja B o gerador $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$. Sabemos do Corolario 1, que $R(\lambda:B)=\int_0^\infty e^{\lambda t}S(t)dt$ para todo $\lambda>\omega$ onde ω é o exponente garantido pelo Teorema 1. Seja $\lambda>\omega$ e $r<\lambda$. Da representação de $S(z)$, veja (2.14), e as observações anteriores temos que

$$\begin{aligned}
R(\lambda:B)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_{\gamma(r,\delta')}e^{\mu t}R(\mu:A)d\mu\right)dt\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')}R(\mu:A)x\left(\int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t}dt\right)d\mu\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')}\frac{R(\mu:A)x}{(\mu-\lambda)}d\mu,
\end{aligned}$$

por tanto

$$R(\lambda:B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')}\frac{R(\mu:A)}{(\mu-\lambda)}d\mu. \tag{2.20}$$

Sejam agora $\rho>r$ e $\Lambda(\rho,\delta')$, $\gamma(\rho,r,\delta')$ as curvas de classe C^1 por partes descritas na forma $\Lambda(\rho,\delta')=\{\rho e^{i\theta}:-\pi/2-\delta'\leq\theta\leq\pi/2+\delta'\}$, $\gamma(\rho,r,\delta')=\cup_{i=1}^3\gamma_i(\rho,r,\delta')$ onde

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\rho,r,\delta') &= \left\{se^{i(\pi/2+\delta')}:\ s\in[r,\rho]\right\},\\
\gamma_2(\rho,r,\delta') &= \left\{re^{i\theta}:\ -\pi/2-\delta'\leq\theta\leq\pi/2+\delta'\right\},\\
\gamma_3(\rho,r,\delta') &= \left\{se^{-i(\pi/2+\delta')}:\ \rho\in[r,\rho]\right\},
\end{aligned}$$

orientadas de manera que $\Lambda(\rho,\delta')$ seja descrita no sentido antihorario. Pelo Teorema de Cauchy Remman, sabemos que para $\Gamma(\rho,r,\delta')=\gamma(\rho,r,\delta')\cup\Lambda(\rho,\delta')$

$$\begin{aligned}
R(\lambda:A)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\rho,r,\delta')}\frac{R(\mu:A)}{(\mu-\lambda)}d\mu\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\rho,r,\delta')}\frac{R(\mu:A)}{(\mu-\lambda)}d\mu+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda(r,\delta')}\frac{R(\mu:A)}{(\mu-\lambda)}d\mu,
\end{aligned}$$

o que do fato que

$$\int_{\Lambda(r,\delta')} \| \frac{R(\mu : A)}{(\mu-\lambda)} \| d\mu \leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{M_{\delta'}}{| \rho e^{i\theta} - \lambda) |} d\theta \to 0$$

quando $\rho \to \infty$ e (2.20) permite concluir que $R(\lambda : B) = R(\lambda : A)$ para todo $\lambda > \omega$. Isto prova que $A = B$. A prova está completa. ∎

Antes de enuciar o proximo Teorema precissamos de um lema técnico. A prova do seguinte resulado é simples e em geral limitada a procedimentos algebricos, e por esta razão será omitida, para detalhes, veja [21].

Lemma 2. *Seja $B : D(B) \subset X \to X$ um operador linear. Então as seguintes propriedades são válidas.*

(i) *Para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A)$.*

(ii) *Para todo $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R(\lambda : A)R(\mu : A) = R(\mu : A)R(\lambda : A)$.*

(iii) *Se $\mu \in \rho(A)$ e $|\lambda-\mu| \| R(\mu : A) \| < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu : A)^{n+1}$.*

(iv) *A função $\rho(A) \to \mathcal{L}(X)$; $\lambda \to R(\lambda : A)$ é analítica e $\dfrac{d^n R(\lambda : A)}{d\lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda : A)^{n+1}$.*

No próximo resultado, o principal desta seção, são estabelecidas condições nessesarias e suficientes para que um operador fechado A seja o gerador de um semigrupo analítico.

Theorem 10. *Suponha que $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente limitado $(T(t))_{t\geq 0}$ e que $0 \in \rho(A)$. Então as seguintes condições são equivalentes.*

(a) *O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ pode ser extendido a uma região $\Gamma_\delta = \{z : |argz| < \delta\}$ tal que $(T(z))_{z\in\Gamma_{\delta'}}$ é uniformemente limitado em $\Gamma_{\delta'}$ para todo $0 < \delta' < \delta$.*

(b) *Existe $C > 0$ tal que para todo $\sigma > 0$ e $\tau \neq 0$,*

$$\| R(\sigma + i\tau : A) \| \leq \frac{C}{|\tau|}. \tag{2.21}$$

(c) *Existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que A verifica a* **Condição $\mathbf{A}_\delta$**.

(d) *O semigrupo $(T(t))_{t>0}$ é diferenciável e existe $C > 0$ tal que $\| AT(t) \| \leq \frac{C}{t}$ para todo $t > 0$.*

Demonstração: Vejamos primeiro que (a) implica (b). Sem perda de generalidade, nos assumiremos que $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Seja $0 < \delta' < \delta$ e $C_1 > 0$ tal que $\| T(z) \| \leq C_1$ para todo $z \in \Gamma_{\delta'}$. Estudemos inicialmente o caso $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau < 0$. Sabemos do Corolario 1 que

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-t\lambda} T(t)x dt, \qquad x \in X.$$

Para $r > 0$ definimos a curva C^1 por partes $\Lambda_r = \cup_{i=1}^3 \Lambda_r^i$ onde

$$\begin{aligned}
\Lambda_r^1 &= \left\{\rho e^{-i\delta'} : \rho \in [0, r]\right\}, \\
\Lambda_r^2 &= \left\{re^{-i\theta} : \ \theta \in [0, \delta']\right\}, \\
\Lambda_r^3 &= \{t \ : t \in [0, r]\},
\end{aligned}$$

as que são orientadas de modo que Λ_r^2 seja descrita no horario. Usando que $\mu \to e^{\mu t}T(\mu)$ é analítica em $\Gamma_{\delta'}$ e o fato que

$$\begin{aligned}
\| \int_{\Lambda_r^2} e^{(\sigma+i\tau)\mu} T(\mu) d\mu \| &\leq C_1 \int_0^{\delta'} | e^{r(\sigma+i\tau)e^{-i\theta}} | \, d\theta \\
&\leq C_1 \int_0^{\delta'} e^{-r(\sigma\cos(\theta)-\sin(\theta))} d\theta \\
&\leq C_1 \int_0^{\delta'} e^{r\tau\sin(\theta)} d\theta,
\end{aligned}$$

temos que

$$\| \int_{\Lambda_r^2} e^{(\sigma+i\tau)\mu} T(\mu) d\mu \| \to 0,$$

quando $r \to 0$ o que implica que

$$R(\lambda : A) = \int_{\Gamma_{\delta'}^+} e^{\lambda\mu} T(\mu) d\mu \tag{2.22}$$

onde $\Gamma_{\delta'}^+ = \{\rho e^{-i\delta'} : \rho \geq 0\}$. Usando agora a representação (2.22) vemos que

$$\begin{aligned}
\| R(\lambda : A) \| &= \int_{\Gamma_{\delta'}^+} \| e^{\lambda\mu} T(\mu) \| \, d\mu \\
&\leq C_1 \int_0^{\infty} e^{-\rho(\sigma\cos(\delta')-\tau\sin(\delta'))} d\rho \\
&\leq \frac{C_1}{\sigma\cos(\delta') + \tau\sin(\delta')},
\end{aligned}$$

e então que

$$\| R(\sigma + i\tau : a) \| \leq \frac{C}{-\tau}, \qquad \sigma > 0, \, \tau < 0, \tag{2.23}$$

onde C é independende de τ e σ.

Usando as mesmas ideas anteriores e possivel mostrar que para $\sigma > 0$ e $\tau > 0$

$$R(\sigma + i\tau : A) = \int_{\Gamma_{\delta'}^-} e^{\lambda\mu} T(\mu) d\mu$$

onde $\Gamma_{\delta'}^- = \{\rho e^{-i\delta'} : \rho > 0\}$ o que permite mostrar que

$$\| R(\sigma + i\tau : a) \| \leq \frac{\tilde{C}}{\tau}, \qquad \sigma > 0, \tau > 0, \tag{2.24}$$

sendo $\tilde{C}$ uma constante independente de τ e σ. Agora (2.21) é conseqüência de (2.23) e (2.24).

Mostremos agora que **(b)** $\Rightarrow$**(c)**. Pelo Corolario 1, sabemos que existe $M_1 > 0$ tal que $\| R(\sigma + i\tau) \| \leq \frac{M_1}{\sigma}$ quando $\sigma > 0$. Isto, juntamente com (2.21) nos permite concluir existe $M > 0$, independente de τ e σ, tal que

$$\| R(\sigma + i\tau : A) \| \leq \frac{M}{| \sigma + i\tau |}, \qquad \sigma > 0, \tau \neq 0. \tag{2.25}$$

Seja $z = \sigma + i\tau$ com $\sigma > 0$. Como $\lambda \to R(\lambda : A)$ é análitica em $U = \{z \in \mathbb{N} : Re(z) > 0\}$ do Lema 2 se deduz que existe uma vizinhança U de z tal que para todo λ em este aberto

$$R(\lambda : A)x = \sum_{n=0}^{\infty} R(\sigma + i\tau : A)^{n+1}(\sigma + i\tau - \lambda)^n. \tag{2.26}$$

Se $\lambda = Re(\lambda) + i\tau$, sabemos que a serie (2.26) converge para λ tal que $| R(\sigma + i\tau : A) \| \| \sigma - Re(\lambda) | \leq k < 1$, ou se $| \sigma - Re(\lambda) | < \frac{k|\tau|}{C}$ para algum $0 < k < 1$, onde C é a constante em (2.21). Como $\sigma > 0$ e $k \in (0,1)$ são arbitrarios, das observações anteriores concluimos que

$$\rho(A) \supset \bigcup_{k \in (0,1)} U(k) = \bigcup_{k \in (0,1)} \left\{ \lambda \in \mathbb{N} : | \arg(\lambda) | < \frac{\pi}{2} + k \arctan(\frac{1}{C}) \right\} = \sum\nolimits_{\arctan(\frac{1}{C})},$$

o que prova (2.9).

Em relação a (2.10), sejam $z = \sigma + i\tau$, $\sigma > 0$, e $\lambda = Re(\lambda) + i\tau$ e suponha que $| \sigma - Re(\lambda) | \leq \frac{k|\tau|}{C}$ onde $k \in (0,1)$. Nestas condições, que são as que definen $\sum_{\arctan(\frac{1}{C})}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\| R(\lambda : A)x \| &= \| \sum_{n=0}^{\infty} R(\sigma + i\tau : A)^{n+1}(\sigma + i\tau - \lambda)^n \| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \| R(\sigma + i\tau : A) \|^{n+1} | \sigma - Re(\lambda) |^n \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{C}{| \tau |})^{n+1} (\frac{k | \tau |}{C})^n \\
&\leq \frac{C}{| \tau |} \sum_{k=0}^{\infty} k^{n+1} \\
&\leq \frac{C}{(1-k) | \tau |},
\end{aligned}$$

e então que

$$\| R(\lambda : A)x \| \leq \frac{\sqrt{C^2+1}}{1-k} \cdot \frac{1}{| \lambda |}. \tag{2.27}$$

Do anterior concluimos que para $\delta' = k \arctan(\frac{1}{C})$, existe $M_{\delta'} > 0$ tal que

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{M_{\delta'}}{|\lambda|}, \qquad \lambda \in \sum\nolimits_{\delta'}, \ \lambda \neq 0.$$

o que completa a prova de **(b)** $\Rightarrow$**(c)**.

Vejamos agora que **(c)** $\Rightarrow$**(d)**. Pelo Teorema 9 sabemos que a familia de operadores $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ definida em (2.11) é um semigrupo analitico em $\sum_\delta$. Mais ainda, da definição de $S(z)$ temos que para $t > 0$

$$S(t) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\mu t}R(\mu : A)d\mu, \tag{2.28}$$

onde $\gamma(r,\delta')$ é a curva de classe C^1 por partes descrita em (2.12). Como pela Proposição 2, A é o gerador infinitesimal de $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$, temos que $(S(z))_{z\in\sum_\delta}$ é uma extensão de $(T(t))_{t\geq 0}$ e em particular que

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta')} e^{\mu t}R(\mu : A)d\mu.$$

Como o operador $u \to u^{(1)}$ é fechado no espaço de funções continuas, e o número r, da definição de $T(z)$, é erbitario; para mostrar a diferenciabilidade de $t \to T(t)$ é suficiente provar que a integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(1,\delta')} \mu e^{\mu t}R(\mu : A)d\mu, \tag{2.29}$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$. Diretamente da definição de curva $\gamma(1,\delta')$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(r,\delta')} \| \mu e^{\mu t}R(\mu : A) \| \, d\mu \\
&\leq\; M_{\delta'}\Big(\int_1^\infty e^{\rho t\cos(\frac{\pi}{2}+\delta')}d\rho + \int_1^\infty e^{\rho t\cos(-(\frac{\pi}{2}+\delta'))}d\rho + \int_{-\delta'}^{\delta'} e^{t\cos(\theta)}d\theta\Big) \\
&\leq\; M_{\delta'}\Big(2\int_1^\infty e^{\rho t\cos(\frac{\pi}{2}+\delta')}d\rho + \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1+\theta)}d\theta\Big) \leq \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t},
\end{aligned}$$

onde $M_{\delta'}$ é a constante em (2.10) e c_i, $i = 1, 2$, são independentes de $t > 0$. Do anterior concluimos que

$$\int_{\gamma(r,\delta')} \| \mu e^{\mu t}R(\mu : A) \| \, d\mu \;\leq\; \frac{c}{t}$$

onde $c > 0$ é uma constante indepedente de $t > 0$. A última estimativa mostra que $s \to T(s)$ é diferenciavel em $t > 0$ e que

$$T'(t) = \int_{\gamma(r,\delta')} \mu e^{\mu t}R(\mu : A)d\mu,$$

o que completa a demonstração desta parte do Teorema.

Finalmente, vejamos que **(d)** $\Rightarrow$**(a)**. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é diferenciable, sabemos do Corolario 4 que a função $t \to \mathcal{L}(X)$; $t \to T(t)$ é de clase C^∞ e que $T^{(n)}(t) = (T'(\frac{t}{n}))^n = (AT(\frac{t}{n}))^n$ para todo $t > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos $t > 0$. Usando que $\frac{n^n}{n!} \leq e^n$ temos que

$$\begin{aligned}
\| \frac{T^{(n)}(t)}{n!} \| | z - t |^n \;&\leq\; \frac{1}{n!} \| T'(\frac{t}{n}) \|^n | z - t |^n \\
&\leq\; \frac{1}{n!}(\frac{Cn}{t})^n \mid z - t \mid^n \\
&\leq\; (\frac{eC}{t} \mid z - t \mid)^n
\end{aligned}$$

de onde deduzimos que a serie

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n. \tag{2.30}$$

é convergente para $z \in \mathbb{N}$ tal que $| z - t | < \dfrac{kt}{eC}$ para algum $k \in (0,1)$. Assim a familia $T(z)$ é beim definida na região $\Gamma_{\frac{1}{Ce}} = \{z \in \mathbb{N} : | \arg(z) | < arg(\frac{1}{Ce})\}$.

Mostraremos agora que $(T(z))_{z\in\sum_\delta}$ é um semigrupo analitico em Γ_δ onde $\delta = \arg(\dfrac{k}{Ce})$ e $k \in (0,1)$, o que completará a prova do teorema, pois é evidente que $(T(z))_{z\in\Gamma_\delta}$ é uma extensão de $(T(t))_{t\geq 0}$. O fato que a função $z \to T(z)$ é analítica é claro, pois da representação (2.9) temos que a função e localmente analitica. Vejamos agora que $T(z_1+z_2) = T(z_1)+T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Gamma_\delta$. Seja $t > 0$ e definamos a função $F : \Gamma_\delta \to \mathcal{L}(X)$ por $F(z) = T(t)T(z)-T(t+z)$. É claro que $F(\cdot)$ é uma função analitica e que $F \equiv 0$ sobre $[0,\infty)$ o que nos permite concluir que $F \equiv 0$ sobre Γ_δ. Por tanto $T(t)T(z) = T(t+z)$ para todo $t > 0$ e todo $z \in \Gamma_\delta$. Usando o mesmo argumento anterior, definimos a função $G : \Gamma_\delta \to X$ por $G(z) = T(z_1)T(z) - T(z_1 + z)$ onde $z_1 \in \Gamma_\delta$ é fixo. Sabemos pelo anterior $G \equiv 0$ sobre $[0,\infty)$ o que pela analiticidade de G nos permite concluir que $G \equiv 0$, e por tanto que $T(z_1 + z_2) = T(z_1) + T(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \Gamma_\delta$.

Vejamos finalmente a limitação do semigrupo em Γ_δ. Da definição de Γ_δ, para $z \in \Gamma_\delta$ e $t > 0$ tal que $| t - z | < \dfrac{kt}{eC}$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| T(z) \| &\leq \| T(t) \| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| T^{(n)}(t) \|}{n!} | z - t |^n \\
&\leq \| T(t) \| + \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{Ce}{t})^n (\frac{kt}{Ce})^n \\
&\leq \| T(t) \| + \sum_{k=0}^{\infty} k^n,
\end{aligned}$$

o que implica que $\| T(z) \| \leq \| T(t) \| + \frac{1}{1-k} = M$, para $z \in \Gamma_{\delta'}$, mostrando assim a limitação em $\Gamma_{\delta'}$. A demonstração do Teorema esta completa. ■

O proximo Teorema é um interesante resultado que nos auxiliara no capitulo três quando estudemos o problema da existência de soluções para o problema impulsivo (4.31)-(4.33).

Theorem 11. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo diferenciavel para $t > 0$. Se*

$$\limsup_{t\to 0} t \| AT(t) \| < \frac{1}{e},$$

então A é limitado em X e $(T(t))_{t\geq 0}$ pode ser extendido a um semigrupo analítico em $\mathbb{N}$.

Demonstração: Pelas hipóteses sabemos que existem $k \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ tais que $\| AT(\frac{t}{n}) \| < \frac{1-\delta}{e}$ para todo $n > k$ e cada $t \in [0,1]$. Seja $t \in [0,1]$ e definamos a serie

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

Como $T^{(n)}(t) = (AT(\frac{t}{n}))^n$, veja Corolario 4, e $\dfrac{n^n}{n!} \leq e^n$ quando $n \in \mathbb{N}$; vemos que

$$
\begin{aligned}
\| T(z) \| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{| z - t |^n}{n!} \| T^{(n)}(t) \| \\
&\leq \sum_{n=0}^{k} \frac{| z - t |^n}{n!} \| (AT(\frac{t}{n}))^n \| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{| z - t |^n}{n!} \| (AT(\frac{t}{n})) \|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{k} \frac{| z - t |^n}{n!} \| (AT(\frac{t}{n}))^n \| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{| z - t |^n}{t^n} (1-\delta)^n \frac{n^n}{n!} \frac{1}{e^n} \\
&\leq c_1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{| z - t |^n}{t^n} (1-\delta)^n,
\end{aligned}
$$

o que implica que $T(z)$ esta bem definido quando $\dfrac{| z - t |}{t}(1-\delta) < k < 1$ para $k \in (0,1)$. Por tanto, e possivel definir uma extenção analitica de $(T(t))_{t\geq 0}$ na região

$$\sum = \bigcup_{t \in (0,1]} \{z \in \mathbb{N} : | z - t | < \frac{t}{(1-\delta)}\}.$$

Como 0 é um ponto interior de $\sum$, $T(z)$ é analitico em 0 e por tanto que a função $\sum \to \mathcal{L}(X)$; $z \to T(z)$ é contínua em zero. Finalmente pelo Teorema 4 concluimos que A é um operador limitado e que $T(z)$ pode ser definido para todo $z \in \mathbb{N}$ usando a expressao $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Az)^n}{n!}$. A prova do Teorema está completa. ■

2.5 Potências Fracionarias de Operadores Lineares Fechados

Nesta seção estudaremos potências fracionarias associadas com um operador $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo análitico de operadores em X. Com este objetivo, em toda esta secão sempre assumiremos que a seguinte condição técnica é verificada.

Condição $\mathbf{A}_{\pi,\omega}$. *$A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear fechado com dominio denso em X tal que*

$$\rho(A) \supset \sum\nolimits_{\pi,\omega} \quad := \quad \{\lambda \in \mathbb{N} : \omega < | \arg(\lambda) | \leq \pi\} \cup V$$

e

$$\| R(\lambda : A) \| \quad \leq \quad \frac{M}{1 + |\lambda|}, \qquad \lambda \in \sum\nolimits_{\pi,\omega},$$

onde V é uma vizinhança de zero e $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$.

Nas condições anteriores, deduzimos do Teorema 2 que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analitico que notaremos $(T(z))$. Mais ainda, é fázil deduzir que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno $-A + \delta I$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analitico $S(t) = e^{\delta t}T(t)$. Do anterior e Teorema 10 temos que as seguintes estimativas são validadas.

$$\begin{aligned}
\| T(t) \| &\leq Me^{-\delta t} && (2.31)\\
\| AT(t) \| &\leq \frac{M_1}{t}e^{-\delta t} && (2.32)\\
&\vdots\\
\| A^nT(t) \| &\leq \frac{M_n}{t^n}e^{-\delta t}. && (2.33)
\end{aligned}$$

Da teoria de funções em variavel complexa sabemos que para $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$z^{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\mu^{-n}}{\mu - z}d\mu$$

onde C_r é uma circunferencia centrada em zero e de raio $r >| z |$, orientada no sentido antihorario. Em forma similar ao feito na teoria de funções de variavel complexa temos que

$$A^{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \mu^{-n}(A - \mu I_d)^{-1}d\mu$$

é a inversa do operador A^n. O anterior e a analiticidade da função $z \to (A - zI_d)^{-1}$ em $\rho(A)$, motiva a seguinte definição.

Definition 9. *Para $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é o operador definido por*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r,\delta)} z^{-\alpha}(A - zI)^{-1}dz \tag{2.34}$$

onde $\gamma(r, \delta)$ é a curva descrita em (2.12) e $\delta > 0, r > 0$ são tais que $\gamma(r, \delta) \subset \sum_{\pi,\omega}$.

Lemma 3. *Para cada $\alpha > 0$, $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$. Mais ainda, se $\alpha \in (0,1)$ então*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty s^{-\alpha}(A + sI)^{-1}ds, \tag{2.35}$$

e

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds. \tag{2.36}$$

Demonstração: Primeiramente observamos que sobre a curva $\gamma^1(r, \delta)$,

$$\begin{aligned}
\| \int_{\gamma^1(r,\delta)} z^{-\alpha}(A - zI)^{-11}dz \| &\leq \int_r^\infty \| e^{-\alpha(\log s + i\delta)}(A - se^{i\delta})^{-1}e^{i\delta} \| ds\\
&\leq \int_r^\infty \frac{e^{-\alpha \log s}}{1+s}ds\\
&\leq \int_r^{r+1} \frac{ds}{s^\alpha} + \int_{r+1}^\infty \frac{ds}{s^{\alpha+1}}\\
&\leq \frac{(r+1)^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha(r+1)^\alpha}.
\end{aligned}$$

O mesmo tipo de estimativa feito sobre a curva $\gamma^1(r,\delta)$, nos permite concluir que

$$\| \int_{\gamma^i(r,\delta)} z^{-\alpha}(A-zI)^1 dz \| \leq \frac{(r+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha(r+1)^{\alpha}}., \qquad i=1,3. \tag{2.37}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \| \int_{\gamma^2(r,\delta)} z^{-\alpha}(A-zI)^{-1} dz \| &= \| \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\alpha(\log r + i\theta)}(A - re^{i\theta})^{-1} rie^{i\theta} d\theta \| \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{-\alpha \log r} r}{1+r} d\theta \\ &\leq \int_{-\delta}^{\delta} r^{1-\alpha} d\theta, \end{aligned}$$

assim

$$\| \int_{\gamma^2(r,\delta)} z^{-\alpha}(A-zI)^{-1} dz \| \leq 2\pi r^{1-\alpha}, \tag{2.38}$$

o que juntamente com a estimativa (2.37) nos permite concluir que $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(X)$.

Seja $\alpha \in (0,1)$. Para mostrar que a representação (2.35) é valida, observamos incialmente que como conseqüência do Teorema da convergencia limitada de Lebesgue, a analiticidade do integrando na região $\sum_{\pi,\omega}$ e a estimativa (2.38) temos que

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} z^{-\alpha}(A-zI)^1 dz \tag{2.39}$$

onde $\gamma(\delta) = \gamma^1(\delta) \cup \gamma^2(\delta)$ e

$$\begin{aligned} \gamma^1(\delta) &= \left\{ \rho e^{i(\pi/2+\delta)} : \ \rho \geq 0 \right\}, \\ \gamma^2(\delta) &= \left\{ \rho^{-i(\pi/2+\delta)} : \ \rho \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

estão orientadas no sentido da orientação das curvas $\gamma^i(r,\delta), i = 1,3$. Se $\alpha \in (0,1)$, temos que

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} z^{-\alpha}(A-zI)^{-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} e^{i\delta\alpha}(A - re^{i\delta})^{-1} e^{i\delta} dr \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} e^{-i\delta\alpha}(A - re^{i\delta})^{-1} e^{-i\delta} dr. \end{aligned}$$

Fazendo agora $\delta \to \pi$ e usando a analiticidade do integrando, da equação anterior temos que

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A+r)^{-1}(-1) dr - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha}(A+r)^{-1}(-1) dr \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})(A+r)^{-1} dr \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} 2i \sin(\pi\alpha)(A+r)^{-1} dr \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0 r^{-\alpha}(A+r)^{-1} dr, \end{aligned}$$

ou seja

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty r^{-\alpha}(A+r)^{-1}dr. \tag{2.40}$$

o que prova (2.35). Usando (2.40) e que $(tI + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}T(s)ds$, $t > 0$, (veja Corolario 1) vemos que

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha} &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty r^{-\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-sr}T(s)ds\right)dr \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty T(s)\left(\int_0^\infty r^{-\alpha}e^{-sr}dr\right)ds \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}du\right)\left(\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds\right)
\end{aligned}$$

on temos usado a mudança de variavel $u = st$. Finalmente da definição de função Γ obtemos que

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds,$$

o que completa a prova do lema. ■

No que segue usaremos (2.36) como definição de $(-A^\alpha)$.

Definition 10. *Para $\alpha \geq 0$ definimos o operador A^α por*

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)ds, & \alpha > 0, \\ I_d, & \alpha = 0. \end{cases}$$

O proximo teorema resume algumas importantes propiedades dos operadores $A^{-\alpha}$, $\alpha \geq 0$, as que serão importantes no capítulo 3.

Theorem 12. *As seguintes propriedades são válidas.*

(a) *Se $\alpha, \beta \geq 0$ então $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha}A^{-\beta}$.*

(b) *O conjunto $\{A^{-\alpha} : \alpha \in (0,1)\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$.*

(c) $\lim_{\alpha\downarrow 0} A^{-\alpha}x = x$ *para todo $x \in X$.*

(d) *$A^{-\alpha}$ é injetor para cada $\alpha \geq 0$.*

Demonstração: Mostraremos cada item em forma separada.

(**a**) Da definição dos operadores $A^{-\gamma}$ vemos que

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}T(t+s)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\int_0^\infty (u-t)^{\beta-1}T(u)dudt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \left(\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right)T(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv\cdot\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}T(u)du,
\end{aligned}$$

onde a mudança de variavel $v=\frac{t}{u}$ e a identidade $\frac{\Gamma(v_1+v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)}=\int_0^1 u^{v_1-1}(1-u)^{1-v_2}du$ fueron usadas. É claro agora que $A^{-\alpha}A^{-\beta}=A^{-(\alpha+\beta)}$.

(**b**) Claramente A^{-1}, A^0 são limitados. Por outro lado para, $\alpha\in(0,1)$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| A^{-\alpha}\| &\leq \frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi}\int_0^1 t^{-\alpha}\|(tI+A)^{-1}\|dt+\frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi}\int_1^\infty t^{-\alpha}\|(tI+A)^{-1}\|dt \\
&\leq M\frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi}\int_0^1 t^{-\alpha}dt+M\frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi}\int_1^\infty\frac{dt}{t^{\alpha+1}} \\
&= M\frac{|\sin((1-\alpha)\pi)|}{(1-\alpha)\pi}+M\frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\alpha\pi},
\end{aligned}$$

o que permite mostrar a propriedade, pois a função $t\to\frac{\sin(t)}{t}$ é limitada sobre $(0,1)$. A prova de (**b**) esta agora completa. ■

(**c**) Como pelo item anterior o conjunto $\{A^{-\alpha}:\alpha\in(0,1)\}$ é limitado em $\mathcal{L}(X)$, é suficiente mostrar a propriedade para $x\in D(A)$. Seja $x\in D(A)$ e fixemos $y\in X$ tal que $x=A^{-1}y$. Como a função $\theta\to\Gamma(\theta)$ é contínua, crescente e $\Gamma(1)=1$; para $t\geq 1$ temos que $\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\leq t$. O anterior, em conjunto com o Corolario 1 implica que

$$\begin{aligned}
\| A^{-\alpha}x-x\| &= \| A^{-(1+\alpha)}y-A^{-1}y\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^\infty t^\alpha T(t)ydt-\int_0^\infty T(t)ydt\right\| \\
&= \int_0^\infty\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|\| T(t)y\| dt \\
&\leq M\int_0^k\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|e^{-\delta t}\| y\| dt+M\int_k^\infty te^{-\delta t}\| y\| dt \\
&\leq I_1(k,\alpha)+I_2(k).
\end{aligned}$$

onde hemos usado desigualdade (2.31). É facil mostar que $I_2(k)\to 0$ quando $k\to\infty$ e que para k fixo $I_1(k,\alpha)\to 0$ se $\alpha\to 1$ pois $\Gamma(1)=1$. Isto prova a propriedade.

(d) Como pelas hipoteses A^{-1} é injetor, cada A^{-n}, $n \in \mathbb{N}$ também é injetor. Se $A^{-\alpha}x = 0$ e $n \in \mathbb{N}$ e tal que $n > \alpha$ então $A^{-n}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = 0$ o que implica que $x = 0$ e então que $A^{-\alpha}$ é injetor. A prova do Teorema esta agora completa. ■

Pelo item **(d)** do teorema anterior é possivel introducir a seguinte definição.

Definition 11. *Para $\alpha \geq 0$ definimos $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1} : D(A^{\alpha}) \subset X \to X$ com domínio $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ onde $R(A^{-\alpha}) = \{A^{-\alpha}x : x \in X\}$.*

Theorem 13. *Nas condições anteriores, as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *A^{α} é um operador fechado.*

(b) *Se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^{\alpha}) \subset D(A^{\beta})$.*

(c) *$\overline{D(A^{\alpha})} = X$ para todo $\alpha \geq 0$.*

(d) *Se $\alpha, \beta \geq 0$ então $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta}x$ para $x \in D(A^{\gamma})$ e $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha+\beta)$.*

Demonstração:
(a) Como $A^{-\alpha}$ é contínua, tem-se que $0 \in \rho(A^{-\alpha})$ e por tanto que A^{α} é fechado.
(b) A propriedade é evidente pois pelo Teorema 12 sabemos que $A^{-\alpha} = A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}$.
(c) A propriedade é conseqüência direta da propriedade **(b)** e do Teorema 8.
(d) A prova é obtida, facilmente, usando os resultados anteriores. ■

Em condições mas restrictivas é possivel obter uma formúla explícita para A^{α}, $\alpha > 0$, este é o objetivo do próximo resultado.

Theorem 14. *Se $\alpha \in (0,1)$ e $x \in D(A)$ então*

$$A^{\alpha}x = \frac{sen(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}dt \tag{2.42}$$

Demonstração: Pelo Lema 3 sabemos que

$$A^{\alpha-1}x = \frac{sen(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(tI+A)^{-1}xdt.$$

Como A é um operador fechado e a função $t \to t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x$ é contínua, para completar a prova é suficiente mostrar que esta função é integravel sobre $[0,\infty)$. Usando que $R(\alpha : A) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}T(t)dt$, veja Corolario 1, e (2.31) temos que

$$\begin{aligned}
\| t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x \| &= \| t^{\alpha-1}\int_0^{\infty} e^{-st}T(s)Axds \| \\
&\leq Mt^{\alpha-1}\int_0^{\infty} e^{-s(t+\delta)} \| Ax \| dt \\
&\leq Mt^{\alpha-1} \| Ax \| \frac{1}{t+\delta},
\end{aligned}$$

e então que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \| s^{\alpha-1}A(sI+A)^{-1}x \| ds &\leq M \| Ax \| \int_0^{\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{s+\delta}ds \\
&\leq M \| Ax \| \left(\int_0^1 \frac{1}{\delta s^{1-\alpha}}ds + \int_1^{\infty} \frac{1}{s^{2-\alpha}}ds\right) < \infty,
\end{aligned}$$

o que finalmente mostra o resultado. ■

Finalizamos este capitulo com um resultado que resume algumas propriedades dos operadores $A^\alpha T(t)$ onde $(T(t))_{\geq 0}$ é o semigrupo análitico gerado por A

Theorem 15. *Nas condições e notações anteriores são verificadas as seguintes são validas.*

(a) $T(t)(X) \subset D(A^\alpha)$ *para todo* $t > 0, \alpha \geq 0$.

(b) $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$ *para todo* $t \geq 0$ *e todo* $x \in D(A^\alpha)$.

(c) *Para* $t > 0$ *e* $\alpha > 0$, $A^\alpha T(t)$ *é limitado e existe* $M_\alpha > 0$ *tal que*

$$\| A^\alpha T(t) \| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \tag{2.43}$$

(d) *Para cada* $\alpha \in (0,1]$ *existe* $C_\alpha > 0$ *tal que*

$$\| T(t)x - x \| \leq C_\alpha t^\alpha \| A^\alpha x \|,$$

para todo $x \in D(A^\alpha)$ *e todo* $t > 0$.

Demonstração: Como $T(t)$ é um semigrupo analítico, do Teorema 8 sabemos que para $t > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $T(t)(X) \subset D(A^n)$. A condição **(a)** e agora conseqüência do item **(b)** do Teorema 13.

Vejamos agora **(b)**. Da definição de $A^{-\alpha}$, para $x \in D(A^\alpha)$ e $x = A^{-\alpha}y$ temos que

$$\begin{aligned} T(t)x &= T(t)A^{-\alpha}y \\ &= T(t)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)yds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)T(t)yds \\ &= A^{-\alpha}T(t)y \\ &= A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x, \end{aligned}$$

por tanto que $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$. Isto prova **(b)**.

Pelo item **(a)**, $A^\alpha T(t)$ é um operador fechado e definido em todo X. Assim $A^\alpha T(t)$ é limitado como conseqüência do teorema do gráfico fechado. Mais ainda, se $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $n - 1 < \alpha \leq n$, de 2.33 temos que

$$\begin{aligned} \| A^\alpha T(t) \| &= \| A^{\alpha-n}A^nT(t) \| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1} \| A^nT(t+s) \| ds \\ &\leq \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}ds \\ &\leq \frac{M_n e^{-\delta t}t^{-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}du \\ &\leq \frac{M_\alpha e^{-\delta t}}{t^\alpha}, \end{aligned}$$

onde M_α é uma constante independente de $t > 0$ e a mudança $s = ut$ foi usada. Isto prova **(c)**.

Mostremos para finalizar **(d)**. Usando a propriedade em **(c)** e o Teorema 2; para $x \in D(A^{-\alpha})$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| T(t)x - x \| &= \| \int_0^t AT(s)xds \| \\
&\leq \int_0^t \| A^{1-\alpha}T(s) \| \| A^\alpha x \| ds \\
&\leq C_{1-\alpha} \| A^\alpha x \| \int_0^t s^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{C_{1-\alpha} \| A^\alpha x \| t^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}$$

o que prova **(d)** e completa a demonstração do Teorema. ■

Capítulo 3

O problema de Cauchy abstrato não homogêneo

Neste capítulo estudamos o problema semilinear

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), \qquad 0 < t < T, & (3.1)\\ u(0) &= u_0, & (3.2) \end{aligned}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e $f : [0,T] \times X \to X$ é uma função apropriada.

3.1 O problema de valor inicial não homogêneo

Nesta primeira seção consideramos o modelo diferencial mais simples

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t), \qquad 0 < t < T, & (3.3)\\ u(0) &= u_0, & (3.4) \end{aligned}$$

que nos auxiliará no estudo do problema (3.1)-(3.2).

Definition 12. *Uma função $u : [0,T] \to X$ é uma solução clássica do problema (3.3)-(3.4) se $u \in C([0,T) : X) \cap C^1((0,T) : X)$; $u(t) \in D(A)$ para todot $\in (0,T)$ e (3.3)-(3.4) são verificadas.*

Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (3.3)-(3.4) e $f \in L^1([0,T] : X)$, então para $0 < s < t < T$ temos

$$\frac{d}{ds}[T(t-s)u(s)] \;=\; -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)),$$

de onde segue que

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Isso mostra o seguinte resultado:

Proposition 3. *Se $f \in L^1([0,T]:X)$ então o problema (3.3)-(3.4) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, se $u(\cdot)$ é solução clássica então*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0,T].$$

Motivados pela Proposição 3 e pelo fato de que em geral $D(A) \neq X$, consideramos a seguinte definição:

Definition 13. *Uma função $u \in C([0,T]:X)$ é uma solução fraca do problema (3.3)-(3.4) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0,T].$$

É importante observar que em geral a solução fraca de (3.3)-(3.4) não é uma solução clássica. Por exemplo, assuma que $x \notin D(A)$ e que $T(t_0)x \notin D(A)$ para algum $t_0 > 0$. Considere o problema

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + T(t)x, \qquad t > 0, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

A solução fraca de (3.6) é dada por

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = tT(t)x.$$

Como $T(t)x$ não é diferenciável, (3.6) não possui solução clássica.

Nos próximos resultados estudamos condições sob as quais o problema (3.3)-(3.4) possui solução clássica.

Theorem 16. *Sejam $u_0 \in D(A)$ e $f \in L^1([0,T]:X) \cap C((0,T];X)$ e definamos a função $v : [0,T] \to X$ por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \le t < T. \tag{3.7}$$

O problema (3.3)-(3.4) tem uma solução clássica $u(\cdot)$ sobre $[0,T)$ se alguma das seguintes condições é verificada:

(i) *$v(t)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$;*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < T$ e $Av(\cdot)$ é contínua em $(0,T)$.*

Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (3.3)-(3.4) sobre $[0,T)$, então $v(\cdot)$ satisfaz **(i)** *e* **(ii)**.

Demonstração. Da definição de $v(\cdot)$ temos que para $t \in (0,T)$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(t+h-s)f(s)\,ds - \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds\right) \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \qquad (3.8)$$

Se $v(\cdot)$ é diferenciável em $(0,T)$, da continuidade de f e de (3.8) segue que $v(t) \in D(A)$ para cada $t \in (0,T)$ e que $Av(t) = \dot{v}(t) - f(t)$. Mais ainda, como $v(0) = 0$ concluímos que $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ é a solução clássica de (3.3)-(3.4). Portanto se vale **(i)**, o problema (3.3)-(3.4) possui uma solução clássica.

Suponha agora válida a condição **(ii)**. Como $v(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$, segue da continuidade de f e de (3.8) que $v(t)$ é diferenciável à direita em $t \in (0,T)$ e que $\frac{d^+}{dt}v(t) = Av(t) + f(t)$. Mais ainda, $\frac{d^+}{dt}v(t)$ é contínua em $(0,T)$ pois $Av(\cdot)$ é contínua. Isto implica que $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável e que $\dot{v}(t) = Av(t) + f(t)$. Portanto $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ é solução clássica de (3.3)-(3.4).

Se $u(\cdot)$ é a solução clássica de (3.3)-(3.4), segue facilmente da continuidade de $f(\cdot)$ e de (3.8) que as condições **(i)** e **(ii)** são verificadas e por isso omitiremos os detalhes desta parte da demostração. A prova está completa. ∎

Corollary 5. *Se $u_0 \in D(A)$ e $f(\cdot) \in C^1([0,T] : X)$, então o problema (3.3)-(3.4) possui uma solução clássica sobre $[0,T)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 16 é suficiente provar que a função $v(\cdot)$ definida em (3.7) é continuamente diferenciável em $(0,T)$. Sejam $t \in (0,T)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in (0,T)$. Da definição de $v(\cdot)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s+h)ds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s)\left[\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right] ds
\end{aligned}$$

e assim

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s)\left[\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\right] ds. \qquad (3.9)$$

Como $f \in C^1([0,T] : X)$, segue de (3.9) que

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T)$. Portanto $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0,T)$. ∎

Corollary 6. *Se $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0,T] : [D(A)])$, então o problema (3.3)-(3.4) tem uma única solução clássica.*

Demonstração. Seja $v(\cdot)$ a função definida em (3.7). É Fácil ver que $v(t) \in D(A)$ e que

$$Av(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

para todo $t \in [0,T]$. Agora a propriedade é conseqüência da condição **(ii)** do Teorema 16. ■

Definition 14. *Uma função $u \in C([0,T]:X)$ é uma solução forte do problema (3.3)-(3.4) se $u' \in L^1([0,T]:X)$, $u(0) = u_0$ e a equação (3.3) é satisfeita para quase todo $t \in [0,T]$.*

É óbvio que a solução clássica de (3.3)-(3.4) é uma solução forte. Entretanto se $A \equiv 0$ e $f \in L^1([0,T]:X)$, mas $f \notin C([0,T]:X)$, a função $u(t) = x + \int_0^t f(s)ds$, $x \in X$, é uma solução forte de (3.3)-(3.4), mas não é clássica.

Como no caso de soluções clássicas, estudamos a seguir condições suficientes para que uma solução fraca seja uma solução forte.

Theorem 17. *Sejam $u_0 \in D(A)$, $f \in L^1([0,T))]:X)$ e $v(\cdot)$ a função definida em $[0,T)$ por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

O problema (3.3)-(3.4) tem solução forte se alguma das seguintes condições é satisfeita:

(i) *$v(t)$ é diferenciável q.t.p em $[0,T]$ e $\dot{v}(t) \in L^1([0,T]:X)$;*

ii) *$v(t) \in D(A)$ q.t.p em $[0,T]$ e $Av(\cdot) \in L^1([0,T]:X)$.*

Mais ainda, se $u \in C([0,T]:X)$ é uma solução forte de (3.3)-(3.4) então $v(\cdot)$ satisfaz as condições **(i)** *e* **(ii)**.

Demonstração. A demonstração se faz usando as mesmas idéias da prova do Teorema 16. Apenas observamos que como $f \in L^1([0,T]:X)$ o termo $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$ em (3.8) converge a $f(t)$ *q.t.p* sobre $[0,T]$.

3.2 O problema quase linear

Estudamos nesta seção o problema semilinear

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t,u(t)), \qquad t \in (0,T), && (3.10)\\ u(0) &= u_0 \in U \subset X, && (3.11) \end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, $U \subset X$ é aberto e $f:[0,T]\times U \to X$ é uma função contínua.

Por analogia ao problema de Cauchy (3.3)-(3.4), adotamos as seguintes definições:

Definition 15. *Uma função* $u \in C([0,T]:U)$ *é uma solução fraca do problema de Cauchy (3.10)-(3.11) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad t \in [0,T].$$

Definition 16. *Uma função* $u:[0,T] \to X$ *é uma solução clássica do problema (3.10)-(3.11) se* $u \in C([0,T]:X) \cap C^1((0,T):X)$, $u(t) \in D(A)$ *para todo* $t \in (0,T)$ *e* $u(t)$ *satisfaz (3.10)-(3.11).*

Definition 17. *Uma função* $u \in C([0,T]:X)$ *é uma solução forte do problema (3.10)-(3.11) se* $u' \in L^1([0,T]:X)$, $u(0) = u_0$ *e a equação (3.10) é satisfeita para quase todo* $t \in [0,T]$.

Usando o princípio de contração, apresentamos a seguir um resultado de existência e unicidade de solução fraca para o problema (3.10)-(3.11).

Theorem 18. *Sejam* $u_0 \in X$ *e* $f \in C([0,T] \times X : X)$ *e suponha que existe* $L > 0$ *tal que*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|,$$

para todo $x, y \in X$. *Então existe uma única solução fraca* $u(\cdot, u_0)$ *do problema de Cauchy (3.10)-(3.11). Mais ainda, a aplicação* $\Gamma : X \to C([0,T]:X)$ *definida por* $\Gamma u_0 = u(\cdot, u_0)$ *é Lipschitz.*

Demonstração. No espaço $C([0,T]:X)$ munido da norma da convergência uniforme, $\| \cdot \|_T$, definimos o operador $F : C([0,T]:X) \to C([0,T]:X)$ por

$$Fu(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in [0,T].$$

Mostramos a seguir que F é uma contração em $C([0,T]:X)$. Seja $M = \sup_{t\in[0,T]} \| T(t) \|$ e fixemos $u, v \in C([0,T]:X)$. Da definição de F, temos que para $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \| Fu(t) - Fv(t) \| &\leq ML \int_0^t \| u(s) - v(s) \| ds, \\ &\leq MLt \| u - v \|_T . \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \| F^2u(t) - F^2v(t) \| &\leq \int_0^t M \| f(s, Fu(s)) - f(s, Fv(s)) \| ds \\ &\leq \int_0^t ML \| Fu(s) - Fv(s) \| ds \\ &\leq \int_0^t M^2L^2 s \| u - v \|_T ds \\ &\leq M^2L^2 \frac{t^2}{2} \| u - v \|_T, \end{aligned}$$

e assim

$$\| F^2u - F^2v \|_T \leq M^2L^2\frac{t^2}{2} \| u - v \|_T .$$

É fácil mostrar que em geral

$$\| F^{n-1}u(t) - F^{n-1}v(t) \| \leq M^{n-1}L^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \| u - v \|_T,$$

o que implica que

$$\| F^n u - F^n v \|_T \leq \frac{(MLT)^n}{n!} \| u - v \|_T .$$

Como $\frac{(MLT)^n}{n!} \to 0$ quando $n \to \infty$, vemos que para n suficientemente grande F^n é contração e portanto $F(\cdot)$ tem um ponto fixo $u(\cdot, u_0) \in C([0,T] : X)$. Claramente este ponto fixo é uma solução fraca do problema (3.10)-(3.11).

Estudamos agora a aplicação $u_0 \to u(\cdot, u_0)$. Sejam $u_0, v_0 \in X$ e $u = u(\cdot, x_0), v = v(\cdot, x_0)$. Para $t \in [0,T]$ temos

$$\begin{aligned} \| u(t) - v(t) \| &\leq \| T(t)u_0 - T(t)v_0 \| + \int_0^t \| T(t-s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)) \| ds \\ &\leq M \| u_0 - v_0 \| + ML \int_0^T \| u(s) - v(s) \| ds, \end{aligned}$$

o que pela desigualdade de Gronwall-Bellman implica que

$$\| u(t) - v(t) \| \leq Me^{MLT} \| u_0 - v_0 \|$$

e portanto

$$\| u - v \|_T \leq Me^{MLT} \| u_0 - v_0 \| .$$

Isso mostra que a aplicação $u_0 \to u(\cdot, u_0)$ é Lipschitz e que a solução fraca de (3.10)-(3.11) é única. A prova do teorema agora está completa. ■

A demonstração do próximo resultado é análoga à do Teorema 18 e por esta razão será omitida.

Corollary 7. *Seja $g \in C([0,T] : X)$ e suponha que se verificam as condições do Teorema 18. Então a equação integral*

$$w(t) = g(t) + \int_0^t T(t-s)f(s,w(s))ds, \qquad t \in [0,T],$$

tem uma única solução $w \in C([0,T] : X)$.

Para mostrar o próximo teorema, precisamos do seguinte lema:

Lemma 4. *Sejam $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0,T] \times X : X)$ e assuma que existe $L > 0$ tal que*

$$\| f(t,x) - f(s,y) \| \leq L(| t - s | + \| x - y \|),$$

para todo $x, y \in X$ e todo $s,t \in [0,T]$. Então a solução fraca do problema (3.10)-(3.11) é Lipschitz em $[0,T]$.

Demonstração. Sejam $u(\cdot) = u(\cdot, u_0)$ a solução fraca de (3.10)-(3.11), $M = \sup_{t\in[0,T]} \| T(t) \|$ e $N = \sup_{t\in[0,T]} \| f(t, u(t)) \|$ e fixemos $c_1 > 0$ tal que

$$\| T(t+h)u_0 - T(t)u_0 \| < c_1 h,$$

para todo $t \in [0, T]$. Da definição de solução fraca temos

$$\begin{aligned}
\| u(t+h) - u(t) \| &\leq \| T(t+h)u_0 - T(t)u_0 \| + \int_0^h \| T(t+h-s)f(s, u(s)) \| ds \\
&\quad + \int_0^t \| T(t-s)(f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))) \| ds \\
&\leq c_1 h + MNh + M \int_0^t L[h + \| u(s+h) - u(s) \|]ds \\
&\leq (c_1 + MN + LTM)h + ML \int_0^t \| u(s+h) - u(s) \| ds.
\end{aligned}$$

Assim pela desigualdade de Gronwall-Bellman

$$\| u(t+h) - u(t) \| \leq (c_1 + MN + LTM)e^{MLT} h,$$

o que prova o resultado. ■

Como no caso do problema homogêneo, uma solução fraca não necessariamente é uma solução clássica. O teorema a seguir estabelece condições sob as quais uma solução fraca é uma solução clássica. No próximo resultado, para uma função diferenciável $f : [0, T] \times X \to X$ introduzimos a decomposição

$$f(t+s, x+y) - f(t, x) = (D_1 f(t, x), D_2 f(t, x))(s, y) + \| (s, y) \| R(t, x, s, y),$$

onde $R(t, x, s, y) \to 0$ se $(s, y) \to 0$.

Theorem 19. *Seja $u_0 \in D(A)$ e assuma que $f(\cdot)$ verifica as condições do Lema 4. Se além disso $f(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$, então a solução fraca $u(\cdot) = u(\cdot, u_0)$ de (3.10)-(3.11) é uma solução clássica.*

Demonstração. Seja $v \in C([0, T] : X)$ tal que

$$\begin{aligned}
v(t) &= T(t)Au_0 + T(t)f(0, u_0) + \int_0^t T(t-s)D_1 f(s, u(s))ds \qquad (3.14)\\
&\quad + \int_0^t T(t-s)\left[D_2 f(s, u(s))\right](v(s)),\ ds \\
v(0) &= Au_0 + f(0, u_0). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

A existência e unicidade de solução para a equação integral (3.14)-(3.15) segue diretamente do Corolário 7, pois a função $s \mapsto D_2 f(s, u(s)) \in C([0, T] : L(X))$. Mostramos agora que $u'(\cdot) = v(\cdot)$. Sejam $M = \sup_{t\in[0,T]} \| T(t) \|$ e $N = \sup_{s\in[0,T]} \| D_2 f(s, u(s)) \|$. Parao $\epsilon > 0$, fixemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\| \frac{T(h) - I}{h} u_0 - Au_0 \| &< \frac{\epsilon}{3M}, \\
\| T(h)f(\theta, u(\theta)) - f(0, u_0) \| &< \frac{\epsilon}{3M}.
\end{aligned}$$

Da definição de solução fraca, para $0 < h < \delta$ e $t \in [0,T)$ temos $\| \dfrac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t) \|$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \| T(t)(\frac{T(h)u_0 - u_0}{h} - Au_0) \| \\
& + \frac{1}{h}\int_0^h \| T(t)[T(h-s)f(s,u(s)) - f(0,u(0))] \| \, ds \\
& + \int_0^t M \| \frac{f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))}{h} - D_1 f(s,u(s)) - D_2 f(s,u(s))(v(s)) \| \, ds \\
\leq\ & \frac{2\epsilon}{3} + M\int_0^t \| [D_2 f(s,u(s))] \|_{L(X)} \| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - v(s) \| \, ds \\
& + M\int_0^t \frac{\| h, u(s+h) - u(s) \|}{h} \| R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s)) \| \, ds,
\end{aligned}
$$

o que pelo Lema 4 implica que

$$
\begin{aligned}
\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t) \| \ \leq\ & \frac{2\epsilon}{3} + MN\int_0^t \| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - v(s) \| \, ds \\
& + M(1+C)\int_0^t \| R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s)) \| \, ds,
\end{aligned}
$$

onde C é a constante Lipschitz de $u(\cdot)$. Como $R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))$ é uniformemente limitada para $s \in [0,T]$ e $\| R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s)) \| \to 0$ quando $h \to 0$, para cada $s \in [0,T]$, podemos reescrever a última desigualdade na forma

$$
\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t) \| \ \leq\ \frac{2\epsilon}{3} + \xi(h) + MN\int_0^t \| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - v(s) \| \, ds,
$$

onde $\xi(h) \to 0$ se $h \to 0$. Assim por Gronwall-Bellman temos

$$
\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - v(t) \| \ \leq\ (\frac{2\epsilon}{3} + \xi(h))e^{MNT},
$$

o que mostra que $u'(\cdot)$ existe em $[0,T)$ e que $u'(\cdot) = v(\cdot)$. Com estimativas similares se prova que $u'(T)$ existe. Isso mostra que $u' \in C([0,T] : X)$.

Para concluir a prova, somente resta mostrar que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0,T]$. Pelo item **(i)** do Teorema 16, sabemos que o problema de valor inicial

$$
\begin{aligned}
w'(t) &= Aw(t) + f(t,u(t)), \qquad t \in [0,T], \\
w(0) &= u_0
\end{aligned}
$$

possui uma única solução clássica $w(\cdot)$, pois $f(t,u(t))$ é continuamente diferenciável sobre $[0,T]$ e $u_0 \in D(A)$. Claramente, $w(\cdot) = u(\cdot)$, pelo que em particular $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0,T]$. Portanto $u(\cdot)$ é uma solução clásica de (3.10)-(3.11). A prova está completa. ■

Estudamos a seguir a existência de soluções fracas para (3.10)-(3.11) usando o clásico Teorema de ponto fixo de Schauder, veja Martin [15], Corolário 2.3.1. Introduzimos para começar a seguinte definição:

Definition 18. *Um C_0-semigrupo operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é compacto para $t_0 > 0$ se $T(t)$ é compacto para todo $t > t_0$. Dizemos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto se é compacto para $t > 0$.*

Note que se $T(t)$ é compacto para $t \geq 0$ então, em particular, o operador identidade é compacto, o que somente é possível se X é de dimensão finita. Como este caso é de pouco interesse, assumiremos que $T(t)$ é compacto para $t > 0$.

Para mostrar nosso próximo resultado precisamos do seguinte lema:

Lemma 5. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de operadores lineares em X e $K \subset X$ relativamente compacto. Então o conjunto de funções $U = \{T(\cdot)x : x \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,T] : X)$.*

Demonstração. Para mostrar o resultado, usamos o Teorema de Áscoli-Arzelá. É claro que para cada $t \in [0,T]$ o conjunto $\{T(t)x : x \in X\}$ é relativamente compacto em X, pois $T(t)$ é contínuo. Mostramos agora que o conjunto de funções $\{T(\cdot)x : x \in K\}$ é equicontínuo em $t = 0$. Se a propriedade é falsa, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, com $0 < h_n \leq \frac{1}{n}$, tais que $\| T(h_n)x_n - x_n \| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando a compacidade de K, sabemos que existe uma subseqüência $(x_{n_j})_{n_j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a um ponto $x \in K$. Nessas condições temos

$$\epsilon \leq \| T(h_{n_j})x_{n_j} - x_{n_j} \| \leq \| T(h_{n_j}) \| \| x_{n_j} - x \| + \| T(h_{n_j})x - x \| + \| x - x_{n_j} \| \tag{3.16}$$

o que é absurdo, pois o lado direito da desigualdade (3.16) converge a zero se $n_j \to \infty$, pois $(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente limitado em $[0,1]$. Portanto o conjunto U é equicontínuo em $t = 0$. Usando agora as propriedades do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é fácil concluir que $\{T(\cdot)x : x \in K\}$, é equicontínuo para todo $t > 0$. Portanto, por Áscoli-Arzelá $\{T(\cdot)x : x \in K\}$ é relativamente compacto. ■

Theorem 20. *Sejam $U \subset X$ aberto, $u_0 \in U$ e $f \in C([0,T] \times U : X)$ e assuma que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é compacto. Então existe uma solução fraca de (3.10)-(3.11) definida em $[0,t_1]$ para algum $0 < t_1 \leq T$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $\| T(t) \| \leq M$ para todo $t \in [0,T]$. Usando a continuidade de $f(\cdot)$, fixamos números positivos $\delta, N > 0$ tais que $B_\delta(u_0, X) \subset U$ e $\| f(t,x) \| \leq N$ para todo $(t,x) \in [0,\delta] \times B_\delta(u_0,X)$. Fixemos agora $0 < \delta_1 < \delta$ tal que

$$\| T(t)u_0 - u_0 \| < \frac{\delta}{2}, \qquad 0 < t < \delta_1, \tag{3.17}$$

$$MN\delta_1 < \frac{\delta}{2}. \tag{3.18}$$

Sobre o espaço $P = \{u \in C([0,\delta_1] : X) : u(0) = u_0 , \| u(t) - u_0 \| \leq \delta_1, \forall\, t \in [0,\delta_1]\}$, definimos o operador $F : P \to C([0,\delta_1] : X)$ por

$$Fu(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad t \in [0,\delta_1].$$

Se F tem um ponto fixo, então o problema (3.10)-(3.11) tem uma solução fraca em $C([0,\delta_1] : X)$. Para mostrar que F tem um ponto fixo em P, usaremos o clássico Teorema de ponto fixo de Schauder, veja [15] Corolário 2.3.1) . Por isso, a seguir mostraremos que F é um operador contínuo com valores em $F(P)$, que $F(P) = \{Fu; u \in P\}$ é equicontínuo em $[0, \delta_1]$ e que o conjunto $FP(t) = \{Fu(t); u \in P\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, \delta_1]$. Estudamos cada uma dessas propriedades de forma separada.

(a) A função F é contínua e $F(P) \subset P$.

Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência com valores em P e $u \in P$ tais que $u_n \to u$ em P. Como f é limitada em $[0, \delta_1] \times B_{\delta_1}(u_0, X)$, segue diretamente do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_0^{\delta_1} \| f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \| \, ds \to 0$$

se $n \to \infty$, o que implica a continuidade de F. Por outro lado, se $u \in P$ e $t \in [0, \delta_1]$, da definição de F e de (3.17), (3.18) temos

$$\begin{aligned} \| Fu(t) - u_0 \| &\leq \| T(t)u_0 - u_0 \| + \| \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) \| \, ds \\ &< \frac{\delta}{2} + MN\delta_1, \end{aligned}$$

o que mostra que $Fu \in P$ e portanto $F(P) \subset P$.

(b) $FP(t)$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, \delta_1]$.

Se $t = 0$ a propriedade é óbvia. Sejam $t > 0$ e $0 < \epsilon < t$. Se $u \in P$, da definição de F vemos que

$$\begin{aligned} Fu(t) &= T(t)u_0 + \int_0^{t-\epsilon} T(t-s) f(s, u(s)) ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s) f(s, u(s)) ds \\ &= T(t)u_0 + T(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} T(t-s-\epsilon) f(s, u(s)) ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s) f(s, u(s)) ds. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \| T(t-s-\epsilon) f(s, u(s)) \| &\leq MN, \\ \int_{t-\epsilon}^t \| T(t-s) f(s, u(s)) \| &\leq MN\epsilon, \end{aligned}$$

para $s \in [0, \delta_1]$, segue de (3.19) que

$$Fu(t) \in \{T(t)u_0\} + T(\epsilon)(B_{MN\delta_1}(0, X)) + C_\epsilon,$$

onde $C_\epsilon \subset X$ e $diam(C_\epsilon) \leq 2MN\epsilon$. O anterior implica que $FP(t)$ é um conjunto totalmente limitado em X, pois $T(\epsilon)$ é compacto, e conseqüentemente $FP(t)$ é relativamente compacto em X, uma vez que X é métrico.

(c) O conjunto $FP = \{Fu : u \in P\}$ é equicontínuo em $[0, \delta_1]$.

Sejam $t' \in [0, \delta_1]$, $0 < \epsilon < t'$ e $\epsilon' = \frac{\epsilon}{8MN}$. Usando que $T(\epsilon')B_N(0, X)$ é compacto, pelo Lema 5 fixamos $0 < \varrho < \delta_1$ tal que

$$\begin{aligned} \varrho MN &< \frac{\epsilon}{4}, \\ \| T(h)x_0 - x_0 \| &< \frac{\epsilon}{4M}, \quad 0 < h < \varrho \\ \| (T(s) - T(s'))x \| &< \frac{\epsilon}{4M}. \end{aligned}$$

quando $x \in T(\epsilon')B_N(0, X)$ e $s, s' \in [0, T]$ são tais que $| s - s' | < \varrho$. Nestas condições, para $0 < t' < t \leq \delta_1$, com $t - t' < \varrho$, temos

$$\begin{aligned} \| Fu(t') - Fu(t) \| &\leq \| T(t') \| \| u_0 - T(t - t')u_0 \| \\ &+ \int_0^{t'-\epsilon'} M \| T(t' - s - \epsilon') - T(t - s - \epsilon')T(\epsilon')f(s, u(s)) \| ds \\ &+ \int_{t'-\epsilon'}^{t'} 2MNds + \int_{t'}^{t} MNds \\ &< M\frac{\epsilon}{4M} + M\frac{\epsilon}{4M} + 2MN\epsilon' + MN\varrho \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\| Fu(t') - Fu(t) \| < \epsilon$, para todo $u \in P$ e todo $0 < t - t' < \varrho$, o que mostra que FP é equicontínuo à direita em t. A equicontinuidade à esquerda em $t \in (0, \delta_1]$ é provada usando as mesmas idéias e estimativas. Portanto FB é equicontínuo sobre $[0, \delta_1]$.

Segue do teorema de Áscoli-Arzelá e de **(a)**, **(b)**, **(c)**, que $F(P)$ é relativamente compacto em $C([0, \delta_1] : X)$ e conseqüentemente que F é completamente contínuo. Pelo Teorema de Schauder, veja [15] Corolário 2.3.1, F tem um ponto fixo $u(\cdot)$ em P. Obviamente $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (3.10)-(3.11), o que completa a prova. ∎

Capítulo 4

Aplicações

O interesse no estudo de equações diferenciais com impulsos tem crescido muito nos últimos anos e a pesquisa nesta direção tem produzido um número considerável de publicações bem recentes. Entre as referências fundamentais neste tema encontram-se Lakshmikanthan & Bainov [60], Bainov [5]. Os problemas impulsivos descrevem processos de evolução que sofrem variações de estado de curta duração e que podem ser consideradas instantâneas. Este fenômeno, também conhecido como ação impulsiva, corresponde às descontinuidades de primeira espécie das soluções. Os modelos impulsivos estudados ainda são simples e envolvem, na sua maioria, impulsos pré-fixados onde os momentos de impulsos são conhecidos de antemão. Neste capitulo estudaremos um par de modelos diferencias de grande interesse e que em geral generalizam boa parte da literatura existente a este respeito, veja por exemplo Liu [14], Benchohra [5] e especialmente o survey Rogovchenko [20].

4.1 Existência de Soluções para uma Equação Funcional Impulsiva

Iniciamos o estudo de equações impulsivas estudando a existência de soluções para uma classe de equações funcionais impulsivas modeladas na forma

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), \qquad t \in I = (0, T], \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{4.2}$$

$$\Delta u(t_i) = I_i(u(t_i)), \tag{4.3}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ definido sobre um espaço de Banach X, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < T$, $f : I \times X^2 \mapsto X$, $I_i : X \mapsto X$ são funções apropriadas e a notação $\Delta u(t_i)$ é definida por $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$.

O problema diferencial (4.1)-(4.3) foi estudado recentemente por Liu em [14], para o caso $a(t) = t$, $t \in [0, T]$. Nesse trabalho, Liu mostra a existência de soluções fracas e clássicas para (4.1)-(4.3) usando o teorema de ponto fixo para contrações e o Teorema 6.1.5 em Pazy [17], veja pp.187, a respeito de regularidade de soluções fracas.

Nesta seção apresentaremos novos resultados de existência de soluções fracas, tanto locais como globais, para o problema (4.1)-(4.3). A diferença com o trabalho de Liu [14] é que nossos resultados serão provados usando critérios de ponto fixo para operadores condensantes, especificamente Leray-Schauder e Sadovskii, veja Teoremas 21 e 22.

4.1.1 Existência de soluções fracas

Como já mencionado, nossos resultados serão obtidos usando alguns clássicos resultados de ponto fixo para operadores condensantes, os quais incluímos a seguir.

Theorem 21. *(Leray - Schauder) Seja $D \subset X$ convexo tal que $0 \in D$. Se $F : D \to D$ é uma função completamente contínua, então F possui um ponto fixo em D ou o conjunto $\{x \in D : x = \lambda F(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado em X.*

Theorem 22. *(Sadovskii) Seja $D \subset X$ convexo, limitado e fechado. Se $F : D \to D$ é uma função condensante, então F tem um ponto fixo em D.*

No que se segue, $\mathcal{PC} = \mathcal{PC}([0,T] : X)$ será o espaço

$$\mathcal{PC} = \mathcal{PC}([0,T] : X) = \left\{ u : [0,T] \to X : \begin{array}{c} u \in C([0,t_1] : X) \bigcap C((t_i, t_{i+1}] : X) \\ \text{e } u(t_i^-) \text{ existe, } \forall\, i = 1, ...n-1 \end{array} \right\},$$

munido da norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_T$.

Para $u \in PC([0,T] : X)$, usaremos a notação $\tilde{u}$ para a função definida por:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \neq t_i \\ u(t_i^-), & t = t_i \end{cases}$$

e para $B \subset \mathcal{PC}([0,T] : X)$, $\tilde{B}$ denotará o conjunto $\tilde{B} = \{\tilde{u} : u \in B\}$.

Como o domínio do operador A pode ser diferente de X, é natural pensar em um conceito mais fraco de solução para o problema (4.1)-(4.3). Se $u \in \mathcal{PC}([0,T] : X)$ é solução do problema (4.1)-(4.3), é fácil mostrar que para $t \in [0,T]$, com $t \neq t_i$,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definition 19. *Uma função $u \in \mathcal{PC}([0,T] : X)$ é uma solução fraca do problema impulsivo (4.1)-(4.3) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)), \qquad t \in [0,T].$$

Como estaremos interessados em mostrar existência de soluções fracas para (4.1)-(4.3) usando teoremas de ponto fixo para funções condensantes, consideramos o seguinte resultado do tipo Áscoli-Arzelá em $\mathcal{PC}([0,T]:X)$. No próximo resultado, para $u \in B$ e $i \in \{1,2,....,n-1\}$ definimos as funções $\tilde{u}_0 \in C([0,t_1]:X)$ e $\tilde{u}_i \in C([t_i,t_{i+1}]:X)$ por

$$\widetilde{u}_0(t) = u(t) \qquad \text{para } t \in [0,t_1],$$

$$\widetilde{u}_i(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } t \in (t_i,t_{i+1}], \\ u(t_i^+), & \text{para } t = t_i. \end{cases}$$

Mais ainda, $\widetilde{B}_i$, $i = 0,1,2,..n-1$, será o conjunto $\widetilde{B}_i = \{\tilde{u}_i : u \in B\}$.

Theorem 23. *Um conjunto $B \subset \mathcal{PC}([0,T]:X)$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes propriedades se verificam:*

(a) *Para todo $t \in I$, os conjuntos $B(t) = \{u(t) : u \in B\}$ e $\tilde{B}(t) = \{\tilde{u}(t) : u \in B\}$ são relativamente compactos em X;*

(b) *O conjunto B é equicontínuo à esquerda em cada $t \in I$;*

(c) *O conjunto $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita em cada $t \in I$.*

Demonstração. Suponha que as condições **(a)**, **(b)** e **(c)** são verificadas. É conseqüência direta das hipóteses e do clássico Teorema de Áscoli-Arzelá que os conjuntos $\tilde{B}_0$ e $\widetilde{B}_i$, $i = 1,2,...n$, são relativamente compactos em $C([0,t_1]:X)$ e $C([t_i,t_{i+1}]:X)$, respectivamente. Seja $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em B. Das considerações anteriores, existe uma subseqüência de $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$, que denotamos $(u^{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_1^{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}}$ é convergente a uma função $v_1 \in C([0,t_1]:X)$. Similarmente, a seqüência $(u^{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência, que denotamos $(u^{k_2})_{k_2\in\mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_2^{k_2})_{k_2\in\mathbb{N}}$ converge a uma função $v_2 \in C([t_1,t_2]:X)$. Continuando com esse raciocínio, concluímos que existe uma subseqüência de $(u^{k_{n-1}})_{k_{n-1}\in\mathbb{N}}$, que denotamos $(u^{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_n^{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ converge a uma função $v_n \in C([t_{n-1},t_n]:X)$. É claro que a subseqüência $(u^{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ converge para $u \in \mathcal{PC}$, onde u é a função tal que $\tilde{u}_i = v_i$ para cada $i = 1,2...,n$. Isto prova que B é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$.

Suponha agora que $B \subset \mathcal{PC}$ é relativamente compacto. Por Áscoli-Arzelá vemos facilmente que, para $t \neq t_i$, $B(t)$ e $\tilde{B}(t)$ são relativamente compactos e B é equicontínuo em t. Para estudar o caso $t = t_i$, mostramos inicialmente que para cada $i = 1,2,...n$, a função $\psi_i : \mathcal{PC} \to X$ onde $\psi_i(u) = u(t_i^+)$ é contínua. Sejam $\epsilon > 0$ e $u \in \mathcal{PC}$. Para todo $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(u,\mathcal{PC})$ existe $\delta_v > 0$ tal que $\| v(t_i^+) - v(t_i+h) \| < \frac{\epsilon}{3}$ quando $0 < h \leq \delta_v$. Com estas escolhas, para $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(u,\mathcal{PC})$ e $0 < h \leq \delta = \min\{\delta_u,\delta_v\}$ temos

$$\begin{aligned} \| u(t_i^+) - v(t_i^+) \| &\leq \| u(t_i^+) - u(t_i+h) \| + \| u(t_i+h) - v(t_i+h) \| \\ &\quad + \| v(t_i+h) - v(t_i^+) \| < \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova que ψ_i é contínua e portanto que $\tilde{B}(t_i)$ é relativamente compacto em X. Mostramos agora a equicontinuidade de $\tilde{B}$ à direita em $t = t_i$ raciocinando por absurdo. Suponha que existem $\epsilon > 0$ e seqüências $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{PC}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, com $0 < h_n < \frac{1}{n}$, tais que

$$\| u^k(t_i^+) - u^k(t_i+h_n) \| \geq \epsilon.$$

Como B é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$, existem uma subseqüência de $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$, que continuamos denotando por $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$, e $u \in \mathcal{PC}$ tais que $u^k \to u \in \mathcal{PC}$ quando $n \to \infty$. Da continuidade de ψ_i podemos fixar $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \| u(t_i^+) - u^k(t_i^+) \| &< \frac{\epsilon}{3}, \\ \| u^n - u \|_{\mathcal{PC}} &< \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

para todo $n > N_\epsilon$. Nestas condições, para $n > N_\epsilon$ temos

$$\begin{aligned} \| u(t_i^+) - u(t_i + h_n) \| &\geq -\| u(t_i^+) - u^k(t_i^+) \| + \| u^k(t_i^+) - u^k(t_i + h_n) \| \\ &\quad - \| u^k(t_i + h_n) - u(t_i + h_n) \| \\ &> -\frac{\epsilon}{3} + \epsilon - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $u \in \mathcal{PC}$. Isso mostra que $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita em cada t_i. A prova do teorema está agora completa. ■

Para estudar o problema (4.1)-(4.3), assumiremos que as seguintes condições são verificadas:

($\mathbf{A_1}$) A função $a : I \to I$ é contínua e $a(t) \leq t$ para todo $t \in [0, T]$;

($\mathbf{A_2}$) A função $f : I \times X^2 \to X$ verifica a seguintes condições do tipo Caratheodory:

- **(a)** $f(t, \cdot) : X \to X$ é contínua para quase todo $t \in [0, T]$;
- **(b)** $f(\cdot, x) : I \mapsto X$ é integrável para todo $x \in X$;
- **(c)** Existem funções contínuas $m : [0, T] \to [0, \infty)$ e $W : [0, \infty) \to (0, \infty)$, com $W(\cdot)$ não decrescente, tais que

$$\| f(t, x, y) \| \leq m(t) W(\| x \| + \| y \|),$$

para todo $t \in I$ e todo $x, y \in X$.

Theorem 24. *Seja $u_0 \in X$ e suponha que as seguintes propriedades são válidas:*

($\mathbf{H_1}$) *Os operadores I_i, $i = 1, ..., n$, são completamente contínuos e limitados em X. Seja $N_i = \sup\{\| I_i(x) \| : x \in X\}$;*

($\mathbf{H_2}$) *Para todo $t \in [0, T]$ e $r > 0$ o conjunto $\{T(t) f(s, x, y) : s \in [0, t], \| x \| \leq r, \| y \| \leq r\}$ é relativamente compacto em X.*

Se $2M \int_0^T m(s) ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)}$, onde $c = 2\left(M \| u_0 \| + \sum_{i=1}^n M N_i\right)$ e $M = \sup_{t\in[0,T]} \| T(t) \|$, então o problema (4.1)-(4.3) tem pelo menos uma solução fraca.

Demonstração. Seja $\Gamma : \mathcal{PC}([0,T] : X) \mapsto \mathcal{PC}([0,T] : X)$ a função definida por

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s),u(a(s)))ds + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)), \quad t \in I. \tag{4.5}$$

A função Γ está bem definida e pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue é fácil mostrar que Γ é contínua. Como um ponto fixo de Γ é uma solução fraca de (4.1)-(4.3), no que vem a seguir mostramos que Γ verifica as hipóteses do Teorema 21. Primeiro provamos que o conjunto $\{u \in \mathcal{PC} : \lambda\Gamma u = u,\ \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $\mathcal{PC}([0,T] : X)$. Seja $\lambda \in (0,1)$ e assuma que $u_\lambda \in \mathcal{PC}$ é tal que $\lambda \Gamma u_\lambda = u_\lambda$. Diretamente da definição de Γ temos

$$\begin{aligned}
\| u_\lambda(t) \| &\leq \lambda \| T(t) \| \| u_0 \| + \lambda \int_0^t \| T(t-s)f(s,u_\lambda(s),u_\lambda(a(s))) \| ds \\
&\quad + \lambda \sum_{t_i<t} \| T(t-t_i)I_i(u_\lambda t_i)) \| \\
&\leq M \| u_0 \| + M \int_0^t m(s)W(\| u_\lambda(s) \| + \| u_\lambda(a(s)) \|)ds + \sum_{i=1}^n MN_i.
\end{aligned}$$

Denotando por $x_\lambda(t)$ o lado direito da desigualdade anterior, temos

$$x'_\lambda(t) \leq Mm(t)W(2x_\lambda(t)), \tag{4.6}$$

pois $W(\cdot)$ é não decrescente e $a(t) \leq t$ para todo $t \in I$. Segue de (4.6) e da hipótese que

$$\int_{2x_\lambda(0)}^{2x_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} \leq 2M \int_0^T m(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

o que nos permite concluir que o conjunto de funções $\{x_\lambda : \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $C([0,T] : X)$ e, conseqüentemente, que o conjunto $\{u_\lambda : u_\lambda = \Gamma u_\lambda,\ \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $\mathcal{PC}([0,T] : X)$, pois $\| u_\lambda(t) \| \leq x_\lambda(t)$ para todo $t \in [0,T]$.

Mostramos agora que para todo $B \subset \mathcal{PC}$ limitado, o conjunto $\Gamma B = \{\Gamma u : u \in B\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$. Para isto, dado $r > 0$ fixamos $B_r = B_r(0, \mathcal{PC})$ e consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 u(t) = T(t)u_0 + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)), \tag{4.7}$$

$$\Gamma_2 u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s,u(s),u(a(s)))ds. \tag{4.8}$$

Usando o Teorema 23, mostramos a seguir que os conjuntos $\Gamma_i(B_r)$, $i = 1,2$, são relativamente compactos em $\mathcal{PC}$. Estudamos cada caso separadamente.

Caso 1 O conjunto $\Gamma_1(B_r)$ é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$.

Vejamos para começar a equicontinuidade dos conjuntos $\Gamma_1(B_r)$, $\widetilde{\Gamma_1(B_r)}$. Sejam $\epsilon > 0$, $t \in I \setminus \{t_1, ..., t_n\}$ e $\delta_1 > 0$ tal que $\{t_1, ..., t_n\} \cap [t - \delta_1, t + \delta_1] = \emptyset$. Como o conjunto $\cup_{i=1}^n I_i(B_r(0,X))$ é relativamente compacto em X e $(T(t))_{t\geq 0}$ é fortemente contínuo,

pelo Lema 5 existe
$0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que

$$\| (T(t) - T(s))I_i(x) \| < \frac{\epsilon}{2n}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n} I_i(B_r(0, X)), \tag{4.9}$$

$$\| (T(t) - T(s))u_0 \| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.10}$$

quando $| t - s | < \delta_2$. Nestas condições, para $0 < h < \delta_2$ e $u \in B_r$ temos

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma_1 u(t-h) - \Gamma_1 u(t) \| \\
&\leq \| (T(t-h) - T(t))u_0 \| + \| \sum_{t_i < t} (T(t-h-t_i) - T(t-t_i))I_i(u(t_i)) \| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{t_i < t} \| (T(t-h-t_i) - T(t-t_i))I_i(u(t_i)) \| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2n} = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra a equicontinuidade de $\Gamma_1 B_r$ à esquerda em $t \neq t_i$. A equicontinuidade de $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ à direita em $t \neq t_i$ é provada de forma similar.

Seja agora $t = t_i$ e fixemos $\delta > 0$ tal que $\{t_j : j \neq i\} \cap [t_i - \delta, t_i + \delta] = \emptyset$ e (4.9)-(4.10) sejam satisfeitas. Da definição de Γ, para $u \in B_r$

$$\Gamma_1 u(t_i) = T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j))$$

e então para $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_1 u(t_i - h) - \Gamma_1 u(t_i) \| &\leq \| (T(t_i - h) - T(t_i))u_0 \| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \| (T(t_i - h - t_j) - T(t_i - t_j))I_j(u(t_j)) \| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

e portanto $\Gamma_1 B_r$ é equicontínuo à esquerda em $t = t_i$.

Mostramos agora a equicontinuidade de $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ à direita em $t = t_i$. Pela definição de $\widetilde{\Gamma_1 u}$, para $u \in B_r$

$$\widetilde{\Gamma_1 u}(t_i) = T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)).$$

Fixemos $\delta > 0$ tal que $\{t_j : j \neq i\} \cap [t_i - \delta, t_i + \delta] = \emptyset$ e (4.9)-(4.10) sejam válidas. Para $u \in B_r$ e $0 < h < \delta$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| \widetilde{\Gamma_1 u}(t_i + h) - \widetilde{\Gamma_1 u}(t_i) \| &\leq \| (T(t_i + h) - T(t_i))u_0 \| \\
&\quad + \| \sum_{j=1}^{i} (T(t_i + h - t_j) - T(t_i - t_j))I_j(u(t_j)) \| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ é equicontínuo à direita em $t = t_i$.

Isso mostra que $\Gamma_1 B_r$ verifica a condições **(b)**, **(c)** do Teorema 23.

Mostramos agora que $\Gamma_1 B_r(t)$ e $\widetilde{\Gamma_1 B_r}(t)$ são relativamente compactos para todo $t \in [0,T]$. Como os operadores I_i são completamente contínuos, para cada $s \in I$ o conjunto $U(s,r) = \{T(s)I_i(x) :\| x \| \leq r, i = 1,2,...,n\}$ é relativamente compacto em X. Se $t \neq t_i$, $i \in \mathbb{N}$, e $u \in B_r$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 B_r(t) &\subseteq \{T(t)u_0\} + \{\sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(x) :\| x \| \leq r\} \\
&\subseteq \{T(t)u_0\} + \sum_{t_i<t} U(t-t_i,r),
\end{aligned}
$$

o que prova que $\Gamma_1 B_r(t)$ é relativamente compacto em X para $t \neq t_i$, $i = 1,2,...,n$.

Estudemos agora o caso $t = t_i$. Como

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 u(t_i) &= T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)) \quad \text{e} \\
\widetilde{\Gamma_1 u}(t_i) &= T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)),
\end{aligned}
$$

vemos que para $u \in B_r$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 B_r(t_i) &\subseteq \{T(t_i)u_0\} + \sum_{j=1}^{i-1} U(t_i - t_j, r) \quad \text{e} \\
\widetilde{\Gamma_1 B_r}(t_i) &\subseteq \{T(t_i)u_0\} + \sum_{j=1}^{i} U(t_i - t_j, r),
\end{aligned}
$$

o que implica que $\Gamma_1 B(t_i)$ e $\widetilde{\Gamma_1 B}(t_i)$ são relativamente compactos em X.

Pelo Teorema 23 concluímos que $\gamma_1 B_r$ é relativamente compacto em $PC([0,T] : X)$. Portanto γ_1 é um operador completamente contínuo.

Caso 2: O conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é relativamente compacto em $PC([0,T] : X)$.

Como $\Gamma_2(B_r)$ é um conjunto de funções contínuas, podemos usar o clássico Teorema de Áscoli-Arzelá para mostrar a propriedade. Estudamos primeiro a equicontinuidade de $\Gamma_2(B_r)$. Sejam $\epsilon > 0$ e $t < t' < T$. Por hipótese, sabemos que existe um compacto $U(\delta, r)$ tal que $\{T(\delta)f(s,x,y) : s \in [0,T], x,y \in B_r(0,X)\} \subset U(\delta,r)$. Usando a continuidade de $m(\cdot)$ e o Lema 5, escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\int_s^{s'} m(s)ds &< \frac{\epsilon}{6MW(2r)}, \\
\| (T(s) - T(s'))x \| &< \frac{\epsilon}{3MT}, \qquad x \in U(\delta, r),
\end{aligned}
$$

se $s, s' \in I$ e $| s - s' | < \delta$. Assim, para $u \in B_r$ e $t \in I$ tal que $0 < t' - t < \delta$ temos que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_2 u(t) - \Gamma_2 u(t') \| &\leq \int_0^{t-\delta} \| (T(t-s-\delta) - T(t'-s-\delta))T(\delta) f(s, u(s), u(a(s))) \| ds \\
&+ \int_{t-\delta}^{t} \| (T(t-s) - T(t'-s)) f(s, u(s), u(a(s))) \| ds \\
&+ \int_t^{t'} \| T(t'-s) f(s, u(s), u(a(s)) \| ds \\
&\leq \int_0^{t-\delta} \frac{\epsilon}{3MT} ds + 2M \int_{t-\delta}^{t} m(s) W(\| u(s) \| + \| u(a(s)) \|) ds \\
&+ M \int_t^{t'} m(s) W(\| u(s) \| + \| u(a(s)) \|) ds \\
&< \frac{\epsilon}{3MT}(t-\delta) + 2MW(2r) \int_{t-\delta}^{t} m(s) ds + MW(2r) \int_t^{t'} m(s) ds \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma_2 B_r$ é equicontínuo à esquerda em $t' \in (0, T]$. A equicontinuidade à direita em $t' \in [0, T)$ é provada usando argumentos análogos. Isto completa a demonstração da equicontinuidade de $\Gamma_2 B_r$.

Estudamos agora a compacidade do conjunto $\Gamma_2 B_r(t)$. Como $\Gamma_2 B_r(0) = \{0\}$, somente mostramos que $\Gamma_2 B_r(t)$ é relativamente compacto para todo $t \neq 0$. Sejam $0 < \epsilon < t \leq T$ e $U(\epsilon, r) \subset X$ compacto tal que $\{T(\epsilon) f(s, x, y) : s \in [0, T],\ x, y \in B_r(0, X)\} \subset U(\epsilon, r)$. Usando as considerações anteriores e o Teorema do Valor Médio para Integral de Bochner, veja Martin [15] pp. 25,temos que para $u \in B_r$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 u(t) &= \int_0^{t-\epsilon} T(t-s-\epsilon) T(\epsilon) f(s, u(s), u(a(s) ds + \int_{t-\epsilon}^{t} T(t-s) f(s, u(s), u(a(s))) ds \\
&\in (t-\epsilon) \overline{conv(\{T(s)x; x \in U(\epsilon, r), s \in [0, T]\})} + C_1,
\end{aligned}$$

onde $conv(B)$ é a envolvente convexa de B e $C_1 \subset X$ é tal que $diam(C_1) < M \int_{t-\epsilon}^{t} m(s) ds$. Isto prova que $\Gamma_2 B_r$ é um conjunto totalmente limitado em X e portanto relativamente compacto em X, completando a prova de que Γ_2 é completamente contínuo.

É claro agora que Γ verifica as condições do Teorema 21. Portanto Γ possui um ponto fixo em $\mathcal{PC}$ e conseqüentemente existe uma solução fraca do problema impulsivo (4.1)-(4.3). ∎

Quando as funções I_i são Lipschitz, o seguinte resultado é válido:

Theorem 25. *Assuma que a condição* $(\mathbf{H_2})$ *do Teorema 24 se verifica. Suponha ainda que a seguinte propriedade é satisfeita:*

$(\mathbf{H_3})$ *Existem constantes positivas L_i, $i = 1, ..., n$, tais que*

$$\| I_i(x) - I_i(y) \| \leq L_i \| x - y \|, \qquad \forall (x, y) \in X^2.$$

Se $M \sum_{i=1}^{n} L_i + M \liminf_{r \to \infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s) ds < 1$, *então existe uma solução fraca do problema impulsivo (4.1)-(4.3).*

Demonstração. Seja $\Gamma : \mathcal{PC}([0,T]:X) \to \mathcal{PC}([0,T]:X)$ a função definida em (4.5) e considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ introduzida em (4.7)-(4.8). Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r(0,\mathcal{PC})) \subset B_r(0,\mathcal{PC})$ e $\Gamma_i(B_r(0,\mathcal{PC})) \subset B_r(0,\mathcal{PC})$, para $i = 1,2$. De fato, se a afirmação é falsa, para cada $r > 0$ existe $x_r \in B_r = B_r(0,\mathcal{PC})$ tal que $\| \Gamma x_r \|_T > r$. Então

$$r < \| \Gamma x_r \|_T \leq M \| u_0 \| + M\sum_{i=1}^{n}(\| I_i(x_r) - I_i(0) \| + \| I_i(0) \|) + MW(2r)\int_0^T m(s)ds,$$

de onde segue que

$$1 \leq M\sum_{i=1}^{n} L_i + M \liminf_{r\to\infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s)ds,$$

o que é absurdo. Isto prova que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$. Mais ainda, é fácil observar das estimativas que r pode ser escolhido tal que $\Gamma_i(B_r) \subseteq B_r$, $i = 1,2$.

Mostramos agora que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 : B_r \to B_r$ verifica as hipóteses do Teorema 22. Pela prova do Teorema 24, o operador $\Gamma_2 : B_r \to B_r$ é completamente contínuo. Usando $(\mathbf{H_3})$ vemos que para $x, y \in B_r$

$$\begin{aligned} \| \Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 y(t) \| &\leq \sum_{i=1}^{n} ML_i \| x(t_i) - y(t_i) \| \\ &\leq (\sum_{i=1}^{n} ML_i) \| x - y \|_T \end{aligned}$$

e então

$$\| \Gamma_1 x - \Gamma_1 y \|_T \leq (\sum_{i=1}^{n} ML_i) \| x - y \|_T,$$

o que mostra que $\Gamma_1 : B_r \mapsto B_r$ é uma contração.

Portanto $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ é um operador condensante em B_r e pelo Teorema 22, Γ possui um ponto fixo em B_r. Este ponto fixo é uma solução fraca do problema (4.1)-(4.3). Agora a prova do teorema está completa. ■

O próximo resultado é uma conseqüência direta do Teorema 25 e por isto omitimos a demonstração.

Corollary 8. *Suponha que a condição* $(\mathbf{H_2})$ *do Teorema 24 se verifica e que cada função* I_i *é uma transformação linear contínua em* X.

Se

$$M\sum_{i=1}^{n} \| I_i \|_{L(X)} + M \liminf_{r\to\infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s)ds < 1,$$

então existe uma solução fraca de (4.1)-(4.3).

4.1.2 Existência de soluções globais

Nesta parte do trabalho estudamos a existência de soluções globais para o problema impulsivo

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), \qquad t > 0, & (4.11)\\ u(0) &= u_0 & (4.12)\\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)) \qquad 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ... & (4.13) \end{aligned}$$

onde A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente e não limitada de números reais positivos e $f : [0,\infty) \times X^2 \to X$ é uma função contínua.

Para estudar existência de solução para (4.11)-(4.13), fixemos $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ positiva, contínua, não decrescente, com $g(0) = 1$ e tal que $g(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ e usamos as notações $\mathcal{P}C([0,\infty) : X)$, $C_g^0(X)$ e $(\mathcal{P}C)_g^0(X)$ para os espaços:

$$\mathcal{P}C([0,\infty) : X) = \{x : [0,\infty) \to X : x\,|_{[0,T]} \in \mathcal{P}C([0,T] : X),\ \forall\, T,\ T \neq t_i\}$$

$$C_g^0(X) = \{x \in C([0,\infty) : X) : \lim_{t\to\infty} \frac{\| x(t) \|}{g(t)} = 0\},$$

$$(\mathcal{P}C)_g^0(X) = \left\{x \in \mathcal{P}C([0,\infty) : X) : \lim_{t\to\infty} \frac{\| x(t) \|}{g(t)} = 0\right\},$$

munidos das normas

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\geq 0} \| x(t) \|, \qquad \| x \|_g = \sup_{t\geq 0} \frac{\| x(t) \|}{g(t)} \qquad \text{e} \qquad \| x \|_{\mathcal{P}g} = \sup_{t\geq 0} \frac{\| x(t) \|}{g(t)},$$

respectivamente. É fácil mostrar que esses espaços são espaços de Banach. Além disso,o seguinte resultado é válido:

Theorem 26. *Um conjunto $B \subset C_g^0(X)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

(a) *B é equicontínuo;*

(b) *$\frac{\|x(t)\|}{g(t)} \to 0$ uniformemente para $x \in B$ quando $t \to \infty$;*

(c) *$B(t) = \{x(t) : x \in B\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \geq 0$.*

Para $B \subset (\mathcal{P}C)_g^0(X)$ e $T > 0$ com $T \neq t_i$, usaremos a notação B_T para o conjunto $B_T = \{u_T = u\,|_{[0,T]}: u \in B\}$. Observe que $B_T \subset \mathcal{P}C([0,T] : X)$.

Para mostrar a existência de soluções para o problema (4.11)-(4.13), usaremos o Teorema 21. Por esta razão consideramos o seguinte resultado:

Theorem 27. *Um conjunto $B \subset (PC)_g^0(X)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

(a) B_T *é relativamente compacto em* $\mathcal{P}C([0,T]:X)$ *para todo* $T>0$;

(b) $\frac{\|x(t)\|}{g(t)} \to 0$ *uniformemente para* $x \in B$, *quando* $t \to \infty$.

Demonstração. Suponha que $B \subset (PC)_g^0(X)$ é relativamente compacto. A propriedade **(a)** é clara, pois $i_T : (\mathcal{P}C)_g^0(X) \to \mathcal{P}C([0,T]:X), u \mapsto u_T$, é contínua. Se a condição **(b)** é falsa, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in B$ e $s_n \geq n$ tais que $\frac{\|x_n(s_n)\|}{g(s_n)} \geq \epsilon$. Usando a compacidade de B, podemos assumir, passando por subseqüências se necessário, que $(x_n)_{\in \mathbb{N}}$ converge a uma função $x \in (PC)_g^0(X)$. Em particular, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| x_n - x \|_{\mathcal{P}g} < \frac{\epsilon}{2},$$

quando $n \geq N_\epsilon$. Então para $n > N_\epsilon$ temos

$$\frac{\| x(s_n) \|}{g(s_n)} \geq \frac{\| x_n(s_n) \|}{g(s_n)} - \frac{\| x(s_n) - x_n(s_n) \|}{g(s_n)} \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\| x(t_n) \|}{g(t_n)} \geq \frac{\epsilon}{2},$$

o que é absurdo, pois $x \in (PC)_g^0(X)$. Isto prova que a condição **(b)** é satisfeita.

Suponha agora que as condições **(a)**, **(b)** são verificadas. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em B. Como para todo $T>0$ o conjunto B_T é relativamente compacto em $\mathcal{P}C([0,T]:X)$, podemos, usando um processo de diagonalização, achar uma subseqüência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que para evitar notações excessivas continuamos denotando do mesmo modo, e uma função $x \in \mathcal{P}C([0,\infty):X)$ tais que $(x_n)_T \to x_T$ em $\mathcal{P}C([0,T]:X)$ para todo $T>0$. Afirmamos que $x \in (\mathcal{P}C)_g^0(X)$ e que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x em $(\mathcal{P}C)_g^0(X)$. Mostramos primeiro que $x \in (\mathcal{P}C)_g^0(X)$. Seja $\epsilon > 0$ e fixemos $T>0$ tal que $\frac{\|u(t)\|}{g(t)} < \frac{\epsilon}{2}$, $u \in B$, quando $t > T$. Como $x_n \to x$ uniformemente em compactos, para cada $t \geq 0$ existe $N_{t,\epsilon}$ tal que $\| x_n(t) - x(t) \| < \epsilon$ para todo $n \geq N_{t,\epsilon}$. Nestas condições, para $t > T$

$$\begin{aligned}
\frac{\| x(t) \|}{g(t)} &\leq \frac{\| x(t) - x_{N_{t,\epsilon}}(t) \|}{g(t)} + \frac{\| x_{N_{t,\epsilon}}(t) \|}{g(t)} \\
&\leq \| x(t) - x_{N_{t,\epsilon}}(t) \| + \frac{\| x_{N_{t,\epsilon}}(t) \|}{g(t)} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\| x(t) \|}{g(t)} < \epsilon, \text{ para } t > T$$

e portanto $x \in (\mathcal{P}C)_g^0(X)$. Mostramos agora a convergência. Sejam $\epsilon > 0$ e $T_1 > 0$ tais que

$$\sup\left\{ \frac{\| x(t) \|}{g(t)}, \frac{\| x_n(t) \|}{g(t)} : n \in \mathbb{N},\, t \geq T_1 \right\} \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.14}$$

Usando que $(x_n)_{T_1} \to x_{T_1}$ em $\mathcal{P}C([0,T_1]:X)$, escolhemos $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\| x(t) - x_n(t) \|: t \in [0,T],\ n \geq N_\epsilon\} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Segue de (4.14) e (4.15) que para $n > N_\epsilon$

$$\begin{aligned} \| x_n - x \|_{\mathcal{P}g} &\leq \sup\{\frac{\| x_n(t) - x(t) \|}{g(t)} : t \in [0,T_1]\} + \sup\{\frac{\| x_n(t) - x(t) \|}{g(t)} : t \geq T_1\} \\ &\leq \sup\{\| x_n(t) - x(t) \|: t \in [0,T_1]\} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $x_n \to x$ em $(\mathcal{P}C)^0_g(X)$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é arbitrária, concluímos que B é relativamente compacto em $(\mathcal{P}C)^0_g(X)$. A prova do teorema está completa. ■

Apresentamos agora um primeiro resultado de existência de soluções globais.

Theorem 28. *Suponha que as seguintes propriedades são verificadas:*

($\tilde{\mathbf{H}}_1$) *As funções I_i, $i \in \mathbb{N}$, são completamente contínuas, limitadas e $\sum_{i=1}^{\infty} N_i < \infty$, onde $N_i = \sup\{\| I_i(x) \|: x \in X\}$;*

($\tilde{\mathbf{H}}_2$) *Para todo $t > 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{T(t)f(s,x,y) : s \in [0,t],\ x,y \in B_r(0,X)\}$ é relativamente compacto em X;*

($\mathbf{H}_4$) *Para todo $K > 0$, $\frac{1}{g(t)}\int_0^t m(s)W(Kg(s))ds \to 0$ quando $t \to \infty$.*

Seja $c = M \| x_0 \| + M\sum_{i=1}^{\infty} N_i$. Se $2M\int_0^{\infty} m(s)ds < \int_c^{\infty} \frac{1}{2W(s)}ds$, então existe uma solução fraca do problema (4.11)-(4.13).

Demonstração. Para uma função $u \in (\mathcal{P}C)^0_g(X)$ definimos $\Gamma u \in (\mathcal{P}C)([0,\infty):X)$ por

$$\Gamma u(t) \;=\; T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s),u(a(s)))ds + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)). \tag{4.16}$$

Usando que $\| u(t) \| \leq \| u \|_g\, g(t)$, da definição de γu vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\| \Gamma u(t) \|}{g(t)} &\leq \frac{\| T(t)u_0 \|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)}\int_0^t m(s)W(\| u(s) \| + \| u(a(s)) \|)ds \\ &\quad + \frac{1}{g(t)}\sum_{t_i<t} \| T(t-t_i) \|\, N_i \\ &\leq \frac{M \| u_0 \|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)}\int_0^t m(s)W(\| u \|_g\, g(s) + \| u \|_g\, g(a(s)))ds + \frac{M}{g(t)}\sum_{t_i<t} N_i \\ &\leq \frac{M \| u_0 \|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)}\int_0^t m(s)W(2 \| u \|_g\, g(s))ds + \frac{M}{g(t)}\sum_{i=1}^{\infty} N_i, \end{aligned}$$

o que implica por $(\mathbf{H_4})$ que $\dfrac{\| \Gamma u(t) \|}{g(t)} \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso mostra que $\Gamma u \in (\mathcal{P}C)^0_g(X)$ e portanto Γ define uma função de $(\mathcal{P}C)^0_g(X)$ em $(\mathcal{P}C)^0_g(X)$.

Para provar que γ possui um ponto fixo, mostramos que Γ verifica as hipóteses do Teorema 21. Vejamos inicialmente a continuidade. Sejam $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $(PC)^0_g(X)$ e $x \in (PC)^0_g(X)$ tais que $x_n \to x$ em $(PC)^0_g(X)$. Para $\epsilon > 0$, fixemos $L > 0$ tal que

$$\frac{M}{g(t)}\int_0^t m(s)W(2Kg(s))ds + \frac{2M}{g(t)}\sum_{i=1}^{\infty} N_i < \frac{\epsilon}{3}, \qquad t \geq L, \tag{4.17}$$

onde $K = \sup\{\| x_n \|_g, \| x \|_g \colon n \in \mathbb{N}\}$. Como f é contínua, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue e de $(\mathbf{A_2})$, temos que existe $N^1_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N^1_\epsilon$

$$\int_0^L \| f(s, x_n(s), x_n(a(s)))ds - \int_0^L f(s, x(s), x(a(s))) \| ds < \frac{\epsilon}{3M}. \tag{4.18}$$

Usando agora a continuidade das funções I_i e o fato de que $x_n \to x$ uniformemente em compactos de $[0, \infty^+)$, escolhemos N^2_ϵ tal que para todo $n > N^2_\epsilon$

$$\sum_{t_i \leq L} \| I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i)) \| < \frac{\epsilon}{3M}. \tag{4.19}$$

Usando (4.18) e (4.19) segue que para $n \geq N^3_\epsilon = \max\{N^1_\epsilon, N^2_\epsilon\}$ e $t \in [0, L]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\| \Gamma x_n(t) - \Gamma x(t) \|}{g(t)} &\leq \frac{M}{g(t)}\int_0^t \|)(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(t, x(s), x(a(s)))) \| ds \\
&\quad + \frac{1}{g(t)}\sum_{t_i \leq L} M \| I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i)) \| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sup\{\frac{\| \Gamma x_n(t) - \Gamma x(t) \|}{g(t)} : t \in [0, L],\ n \geq N^3_\epsilon\} \leq \epsilon. \tag{4.20}$$

Por outro lado, de (4.17), (4.18) e (4.19) temos que para $t \geq L$ e $n \geq N^3_\epsilon$

$$\begin{aligned}
&\frac{\| \Gamma x_n(t) - \Gamma x(t) \|}{g(t)} \\
&\leq \frac{1}{g(t)}\int_0^L \| T(t-s)(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s)))) \| ds \\
&\quad + \frac{1}{g(t)}\int_L^t \| T(t-s)(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s)))) \| ds \\
&\quad + \frac{M}{g(t)}\sum_{t_i \leq L} \| I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i)) \| + \frac{1}{g(t)}\sum_{t_i \geq L} 2MN_i \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{M}{g(t)}\int_L^t m(s)W(2Kg(s))ds + \frac{1}{g(t)}\sum_{t_i \geq L} 2MN_i + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

e assim

$$\sup\{\frac{\| \Gamma x_n(t) - \Gamma x(t) \|}{g(t)} : t \geq L, \ n \geq N_\epsilon^3\} \ \leq \ \epsilon. \tag{4.21}$$

Segue agora de (4.20) e (4.21) que $\| \Gamma x_n - \Gamma x \|_g \leq \epsilon$, quando $n \geq N_\epsilon^3$ o que mostra que γ é contínua.

Mostramos agora que γ é completamente contínua usando o Teorema 27. Sejam $r > 0$ e $B_r = B_r(0, (\mathcal{P}C)_g^0(X))$. Usando as mesmas idéias e estimativas da demonstração do Teorema 24 vemos que $\Gamma(B_r)_T$ é relativamente compacto em $\mathcal{P}C([0,T] : X)$ para todo $T > 0$, $T \neq t_i$. Mais ainda, como para $x \in B_r$

$$\frac{\| \Gamma x(t) \|}{g(t)} \leq \frac{M \| u_0 \|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s) W(2 \| x \|_g \, g(s)) ds + \frac{M}{g(t)} \sum_{i=1}^{\infty} N_i,$$

segue de $(\mathbf{H_4})$ que $\frac{\|\Gamma x(t)\|}{g(t)} \to 0$ uniformemente para $x \in B_r$ quando $t \to \infty$. Assim $\gamma(B_r)$ verifica as hipóteses do Teorema 27 e portanto é relativamente compacto em $(PC)_g^0(X)$. Isto prova que γ é completamente contínua, pois r é arbitrário.

Mostramos agora que o conjunto $U = \{x_\lambda \in (PC)_g^0(X) : \lambda \Gamma x_\lambda = x_\lambda, \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $(PC)_g^0(X)$. Se $x_\lambda \in U$, para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \| x_\lambda(t) \| &\leq \| T(t) u_0 \| + \int_0^t m(s) W(\| x_\lambda(s) \| + \| x_\lambda(a(s)) \|) ds + \sum_{i=1}^{\infty} M N_i \\ &\leq M \| x_0 \| + M \int_0^t m(s) W(\| x_\lambda(s) \| + \| x_\lambda(a(s)) \| \, ds + M \sum_{i=1}^{\infty} N_i. \end{aligned}$$

Denotando por $u_\lambda(t)$ o lado direito da última desigualdade, obtemos que

$$\dot{u}_\lambda(t) \leq M m(t) W(2 u_\lambda(t))$$

e portanto que

$$\int_{2u_\lambda(0)=c}^{2u_\lambda(t)} \frac{1}{W(s)} ds \leq 2M \int_0^t m(s) ds < \int_c^{\infty} \frac{1}{W(s)} ds. \tag{4.22}$$

Como x_λ e λ são arbitrários, é conseqüência de (4.22) que o conjunto $\{u_\lambda ; \lambda \in (0,1)\}$ é limitado em $C([0,\infty) : X)$, o que implica que U é limitado em $(PC)_g^0(X)$.

Isso mostra que γ verifica as hipóteses do Teorema 27 e prova que existe uma solução fraca do problema (4.11)-(4.13). A prova está completa. ■

Theorem 29. *Suponha que as condições* $(\tilde{\mathbf{H}}_2)$ *e* $(\mathbf{H_4})$ *são verificadas. Suponha ainda que*

$(\tilde{\mathbf{H}}_3)$ *Para cada* $i \in \mathbb{N}$ *existe* $L_i > 0$ *tal que*

$$\| I_i(x) - I_i(y) \| \leq L_i \| x - y \|, \qquad \forall \ (x,y) \in X^2;$$

Se

$$M\sum_{i=1}^{\infty}L_i+\limsup_{|(t,r)|\to\infty}M\int_0^t m(s)\frac{W(2rg(s))}{rg(s)}ds<1, \tag{4.23}$$

então existe uma solução fraca do problema (4.11)-(4.13).

Demonstração. Para $u\in(\mathcal{P}C)_g^0(X)$ definimos $\Gamma:(\mathcal{P}C)_g^0(X)\to(\mathcal{P}C)([0,\infty):X)$, onde

$$\Gamma u(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s,u(s),u(a(s)))ds+\sum_{t_i<t}T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Da prova do Teorema 28 sabemos que $\Gamma u\in(\mathcal{P}C)_g^0(X)$ e que $\Gamma:(\mathcal{P}C)_g^0(X)\to(\mathcal{P}C)_g^0(X)$ é contínua. Considere a decomposição $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 u(t)=T(t)u_0+\sum_{t_i<t}T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Seja $B_r=B_r(0,(\mathcal{P}C)_g^0(X))$. Afirmamos que existe $r>0$ tal que $\Gamma B_r\subset B_r$ e $\Gamma_i B_r\subset B_r$, $i=1,2$. De fato, se a nossa afirmação é falsa então para cada $r>0$ existem $x_r\in B_r$ e $t^r>0$ tais que $r<\|\Gamma x_r(t^r)\|$. Logo

$$\begin{aligned}
r<\frac{\|\Gamma x_r(t^r)\|}{g(t^r)} &\le \frac{M\|u_0\|}{g(t^r)}+\frac{M}{g(t^r)}\int_0^{t^r}m(s)W(\|x_r(s)\|+\|x_r(a(s))\|)ds\\
&\quad+\frac{M}{g(t^r)}\sum_{t_i<t^r}(L_i\|x_r(t_i)\|+\|I_i(0)\|)\\
&\le \frac{M\|u_0\|}{g(t^r)}+\frac{M}{g(t^r)}\int_0^{t^r}m(s)W(2rg(s))ds+\frac{Mrg(t_i)}{g(t^r)}\sum_{t_i<t^r}L_i\\
&\quad+\frac{M}{g(t^r)}\sum_{t_i<t^r}\|I_i(0)\|.
\end{aligned}$$

Dependendo de o conjunto $u=\{t^r:r>0\}$ ser limitado ou não, da desigualdade anterior obtemos

$$\begin{cases}1 & \le M\sum_{i=1}^{n}L_i, \text{ se } U \text{ é limitado}\\ 1 & \le M\sum_{i=1}^{\infty}L_i+\limsup_{|(t,r)|\to\infty}M\int_0^t m(s)\frac{W(2rg(s))}{rg(s)}ds, \text{ se } U \text{ não é limitado,}\end{cases}$$

o que é absurdo. Isto prova que existe r_0 tal que $\Gamma B_{r_0}\subset B_{r_0}$. Mais ainda, a mesma estimativa mostra que é possível assumir que $\Gamma_i B_{r_0}\subset B_{r_0}$, $i=1,2$.

Usando a prova do Teorema 28, vemos que γ_2 é completamente contínua em B_{r_0}. Além disso, γ_1 é uma contração em B_{r_0}. De fato, se $x,y\in B_r$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Gamma_1 x(t)-\Gamma_1 y(t)\|}{g(t)} &\le \frac{M}{g(t)}\sum_{t_i<t}\|L_i\|\|x(t_i)-y(t_i)\|\\
&\le \frac{M}{g(t)}\sum_{t_i<t}g(t_i)\|L_i\|\|x-y\|_g
\end{aligned}$$

e então

$$\| \Gamma_1 x - \Gamma_1 y \|_g \leq \ M \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \| L_i \| \| x - y \|_g . \tag{4.25}$$

Segue agora de (4.23) e (4.25) que γ_1 é uma contração em B_{r_0}.

Das considerações anteriores, deduzimos que γ uma uma função condensante em B_{r_0}. A existência de uma solução fraca do problema (4.11)-(4.13) é agora conseqüência do Teorema 22. A prova está completa. ■

Theorem 30. *Suponha que as condições* $(\tilde{\mathbf{H}}_2)$ *e* $(\mathbf{H}_4)$ *são verificadas. Assuma também que:*

$(\tilde{\mathbf{H}}_1')$ *Cada função* I_i *é um operador linear contínuo;*

$(\mathbf{H}_5)$ *Para cada* $s \geq 0$, $f(s,\cdot) = L(s,\cdot) + h(s)$, *onde* $L(s,\cdot)$ *é um operador linear limitado e* $h(\cdot)$ *é uma função contínua tal que* $\frac{1}{g(t)}\int_0^t h(s)ds \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Se $M\sum_{i=1}^{\infty} L_i + M \sup_{t\geq 0} \frac{1}{g(t)} \int_0^t \| L(s) \| g(s)ds < 1$, *então existe uma única solução fraca do problema (4.11)-(4.13).*

Demonstração. Seja $\Gamma : (\mathcal{PC})_g^0(X) \to (\mathcal{PC})([0,\infty) : X)$ a função definida na demonstração do Teorema 28, veja (4.16). Sabemos da prova do Teorema 28 que Γ é uma função bem definida , contínua e com valores em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Mostramos agora que γ é uma contração em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Fixemos $x, y \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$. Se $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\| \Gamma x(t) - \Gamma y(t) \|}{g(t)} &\leq \frac{M}{g(t)} \left[\sum_{t_i<t} \| I_i \| \| x(t_i) - y(t_i) \| + \int_0^t \| L(s) \| \| x(s) - y(s) \| ds \right] \\
&\leq \frac{Mg(t_i)}{g(t)} \sum_{t_i<t} \| I_i \| \| x - y \|_g + \| x - y \|_g \frac{M}{g(t)} \int_0^t \| L(s) \| g(s)ds \\
&\leq \left[M \sum_{t_i<t} \| I_i \| + M \int_0^t \| L(s) \| ds \right] \| x - y \|_g
\end{aligned}$$

e portanto

$$\| \Gamma x - \Gamma y \|_g \ \leq \ \left(M \sum_{i=1}^{\infty} \| I_i \| + \frac{M}{g(t)} \int_0^t \| L(s) \| g(s)ds \right) \| x - y \|_g,$$

o que implica que Γ é uma contração.

Pelo teorema de ponto fixo para contrações, γ possui um único ponto fixo $x \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$. Este ponto fixo é a única solução fraca do problema (4.11)-(4.13). A prova está completa. ■

O resultado seguinte é uma conseqüência óbvia do teorema anterior.

Corollary 9. *Assuma que se verificam as condições* $\tilde{\mathbf{H}}_1', \tilde{\mathbf{H}}_2, \mathbf{H}_4, \mathbf{H}_5$. *Se*

$$M \sum_{i=1}^{\infty} L_i + M \int_0^{\infty} \| L(s) \| ds \ < 1,$$

então existe uma única solução fraca do problema (4.11)-(4.13).

4.1.3 Um exemplo: A equação do calor com impulsos.

Para finalizar esta seção, consideramos brevemente a equação do calor com impulsos. Seja $X = L^2([0,\pi])$ munido da norma usual que denotaremos $\|\cdot\|_2$, e A o operador $Ax = x''$ com domínio

$$D(A) := \{f \in L^2([0,\pi]) : f''(\cdot) \in L^2([0,\pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Nestas condições, A é o gerador de um C_0-semigrupo compacto, $(T(t))_{t\geq 0}$, em X. Mais ainda, A tem espectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com correspondentes autovetores $z_n(\xi) := (\frac{2}{\pi})^{1/2} sen(n\xi)$ e as seguintes propriedades são válidas:

(a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X,

(b) Se $f \in D(A)$ então $A(f) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle f, z_n\rangle z_n$,

(c) Para cada $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle f, z_n\rangle z_n$. Mais ainda, segue das expressões anteriores que $\|T(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

(d) O operador $(-A)^{1/2}$ é dado por

$$(-A)^{1/2} f = \sum_{n=1}^{\infty} n < f, z_n > z_n, \tag{4.26}$$

com domínio $D((-A)^{1/2}) = \{f(\cdot) \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n < f, z_n > z_n \in X\}$. Mais ainda $\| (-A)^{\frac{1}{2}} \| = 1$

Consideremos agora o problema impulsivo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(\xi,t) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi,t) + F(\xi, t, w(\xi,t), w(\xi, a(t))), && (4.27)\\
w(0,t) &= w(\pi, t) = 0, \qquad t \in I, && (4.28)\\
w(\xi, t_i) &= P_i(w(\cdot, t_i))(\xi), \qquad \xi \in [0,\pi], && (4.29)
\end{aligned}$$

onde $0 < t_1 < t_2 < .... < t_n < \pi$ e

(1) A função $F : [0,\pi] \times I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes propriedades:

   (a) $F(\xi, t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua *q.t.p.* em $(\xi, t) \in [0,\pi] \times I$.

   (b) Para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$, a função $F(\cdot, w_1, w_2) : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável.

   (c) Existe uma função integrável e positiva $\eta(\cdot)$, definida sobre $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ tal que

$$| F(\xi, t, w_1, w_2) | \leq \eta(\xi, t)(| w_1 | + | w_2 |)$$

   para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

(2) As funções $P_i : X \to X$ são completamente contínuas. Assumimos ainda que para cada $r > 0$ existem constantes $\alpha_{i,r} > 0$ tais que $\|P_i(x)\|_2 \leq \alpha_{i,r}$. Exemplos de operadores com essas propriedades podem ser encontrados em [15].

Seja $f : [0,T] \times X^2 \to X$ o operador definido por $f(t,x,y)(\xi) = F(\xi, t, x(\xi), y(\xi))$. Nessas condições, para $x, y \in X, \| x \|_2, \| y \|_2 \leq r$, temos

$$\begin{aligned}
\| f(t,x,y) \|_2 &\leq \left(\int_0^\pi | F(\xi, t, x(\xi), y(\xi)) |^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^\pi \eta^2(\xi, t) \left(| x(\xi) | + | y(\xi) | \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \eta(\cdot, t)_{0,\pi} \left(\| x \|_2 + \| y \|_2 \right).
\end{aligned}$$

onde $\eta(\cdot, s)_{0,\pi} = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \eta(\theta, s)$.

Theorem 31. *Suponha que as condições anteriores são satisfeitas. Se*

$$2M \int_0^T \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \liminf_{r \to \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} \alpha_{i,r} < 1, \tag{4.30}$$

onde $\eta(\cdot, s)_{0,\pi} = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \eta(\theta, s)$, *então existe uma solução fraca do problema impulsivo (4.27)-(4.29).*

Demonstração. Seja $\Gamma : \mathcal{PC} \to \mathcal{PC}$ o operador definido em (4.5). Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$, onde $B_r = B_r(0, \mathcal{PC})$. Se a propriedade á falsa, para cada $r > 0$ podemos escolher $x_r \in B_r$ tal que $r < \| \Gamma x_r \|$. Assim

$$r < \| \Gamma x_r \| \leq \| x_0 \| + 2r \int_0^t \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \sum_{j=1}^n \alpha_{i,r}$$

portanto

$$1 \leq 2 \int_0^T \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \liminf_{r \to \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} M \alpha_{i,r},$$

o que é absurdo.

As mesmas idéias da demonstração do Teorema 24 mostram que Γ é completamente contínuo em B_r. Agora a existência de soluções para (4.27)-(4.29) é conseqüência do do Teorema de ponto fixo de Schauder, veja [15] pp. . A prova está completa. ■

4.2 Existência de Soluções para Equações impulsivas do Tipo Neutro com Retardamento não Limitado

Neste seção estabelecemos dois resultados de existência de soluções para uma classe de equações do tipo neutro com retardamento não limitado modeladas na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t) + G(t, x_t)) &= Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in I = [0, a], && (4.31) \\
x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, && (4.32) \\
\triangle x(t_i) &= I_i(x_{t_i}) && (4.33)
\end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X; $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < a$ são pontos fixos; $F(\cdot), G(\cdot), I_i(\cdot), i = 1, 2, ..n$, são funções apropriadas; e a notação $\triangle\xi(t_i)$ representa o impulso de uma função $\xi(\cdot)$ no ponto t_i, é dizer $\triangle\xi(t_i) = \xi(t_i^+) - \xi(t_i^-)$.

Em geral os resultados são obtidos usando alguns teorema de ponto fixo para operadores condensantes em espaços de Banach.

Recentemente varios artigos que estudam a existência de soluções fracas para problemas do tipo neutro com retardamento, veja por exemplo [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] tem aparecido na literatura. Em todos esses trabalhos, e con a finalidade de usar o Teorema de ponto fixo de Leray Schaaders, os autores usarão uma hipótese técnica a qual é válida somente se o espaço X é de dimensão finita. Este fato é relevante pois nestas condições não é possível o estudo de equações diferenciais parciais do tipo neutro, o que era o objetivo desses trabalhos. De fato, os autores assumieron a seguinte hipótese técnica.

Hipótese: *" A is the infinitesimal generator of a compact analytic semigroup of bounded linear operators $(T(t))_{t\geq 0}$ on X and there exist positive constants M_1, M_2 such that*

$$\| T(t) \| \leq M_1 \quad \textit{and} \quad \| AT(t) \| \leq M_2,$$

for every $t \in [0, a]$.

Sabemos do Teorema 11 que a condição de limitação sobre a familia de operadores $AT(t)$ implica que A é um operador limitado e portanto que a função $t \to \mathcal{L}(X)$; $t \to T(t)$ é continua em $[0, a]$, veja Teorema 4. As observações anteriores e o fato que cada $T(t)$, $t > 0$, e compacto implicam que $T(0) = I_d$ é compacto e conseqüentemente que X é de dimensão finita.

Equações de tipo neutro aparecem em muitas areas das matemáticas aplicadas e estas tem recevido muita atenção nos últimos anos. Um livro clássico a este respeito é [10]. O trabalho de pesquisa em equações diferenciais parcias do tipo neutro com retardamento não limitado fue iniciado por Hernández & Henríquez em [11, 12]. Em essos artigos Hernández & Henríquez mostraron existência de soluções fracas, fortes e periódicas para o modelo neutro

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) + G(t, x_t)) &= Ax(t) + F(t, x_t), \qquad t \geq 0, \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

sendo A o gerador infinitesimal de um semigrupo analitico em X e $\mathcal{B}$ é um espaço de fase definido de maneira axiomática. Em geral os resultados nesses trabalhos são obtidos usando o Teorema de ponto de Sadovskii (veja [18]).

Para estudar o problema impulsivo (4.31)-(4.33) adotamos as notações, definições e resultados técnicos da seção 4.1.

Como mencionamos previamente, para estudar o problema (4.31)-(4.33) assumiremos que os espaço das historias, o espaço de fase, esta definido de maneira axiomática de forma similar a o feito por Hale and Kato em [9]. Assim neste trabalho, $\mathcal{B}$ espaço linear formado por funções definidas sobre $(-\infty, 0]$ e com valores em X, verificando os seguintes axiomas.

(A) Se $x : (-\infty, a) \to X$, $a > 0$, é tal que $x(\cdot)|_{[0,a]} \in \mathcal{PC}$ e $x_0 \in \mathcal{B}$, então para todo $t \in [0, a]$ as seguintes propriedades são verificadas.

(i) $x_t \in \mathcal{B}$.

(ii) $\| x_t \|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup\{\| x(s) \|: 0 \leq s \leq t\} + M(t) \| x_0 \|_{\mathcal{B}}$,

sendo $K, M : [0,\infty) \to [0,\infty)$, K é continua, M é localmente limitada e K, M independentes de $x(\cdot)$.

(A1) Se $x(\cdot)$ é a função em **(A)**, então a função $[0,a] \to \mathcal{B}$, $t \to x_t$ é contínua.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

4.2.1 Existência de soluções.

Nesta seção estudamos existência de soluções para o problema neutro (4.31)-(4.33). Nesta parte do trabalho, sempre $A : D(A) \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico uniformemente limitado, $(T(t))_{t\geq 0}$, de operadores lineares em X con $0 \in \rho(A)$ e tal que $\| T(t) \| \leq \tilde{M}$ para todo $t \geq 0$. Do capitulo 2, sabemos que em estas condições é possível definir as potências fracionarias $(-A)^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, de $-A$, como sendo operadores lineares fechados em X com domínio $D(-A)^{\alpha}$ denso em X. Mais ainda, sabemos que a expressão $\| x \|_{\alpha} = \| (-A)^{\alpha} x \|$ define uma norma em $D(-A)^{\alpha}$ e que $X_{\alpha} = (D(-A)^{\alpha}, \| \cdot \|_{\alpha})$ é um espaço de Banach. Lembramos que no capitulo 2 deste trabalho é feito um estudo detalhado a respeito de potências fracionarias. Uma refêrencia complementaria é o livro de Pazy [17].

Para comenzar introduzimos o conceito de solução fraca.

Definition 20. *Uma função $x : (-\infty, a] \to X$ é uma solução fraca do problema de Cauchy abstrato (4.31)-(4.33) se: $x_0 = \varphi$; $x(\cdot)|_{[0,a]} \in \mathcal{PC}$; para todo $0 \leq t < a$ a função $s \to AT(t-s)G(s,x_s)$ é integrable sobre $[0,t)$ e*

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi)) - G(t,x_t) - \int_0^t AT(t-s)G(s,x_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)F(s,x_s)ds + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i}), \qquad t \in I. \end{aligned}$$

Observation 5. *É importante observar que nossa definição de solução fraca é diferente a aquela introduzida em [7]. Lamentavelmente, o conceito adotado por Benchohra esta errado. Em relação com isto veja [14] e [16].*

Observation 6. *Se $x(\cdot)$ é uma solução fraca de (4.31)-(4.33), da relação $A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x$, temos que*

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t)(\varphi(0) + G(0,\varphi) - G(t,x_t)) - \int_0^t AT(t-s)G(s,x_s)ds \\ &\quad + \int_0^t AT(t-s)G(t,x_t)ds + \int_0^t T(t-s)F(s,x_s)ds \\ &\quad + \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i}), \qquad t \in I. \end{aligned}$$

No restante deste capítulo, consideraremos as seguintes condições técnicas.

$\mathbf{H_1}$ A função $F : I\times\mathcal{B}\times X \to X$ verifica as seguintes propriedades de tipo Caratheodory:

(i) Para todo $t \in I$, a função $F(t,\cdot) : \mathcal{B} \times X \to X$ é contínua.

(ii) Para todo $\psi \in \mathcal{B}$ a função $F(\cdot,\psi) : I \to X$ é fortemente mensuravel.

$\mathbf{H_2}$ Existem constantes positivas $0 < \beta < 1$, c_1, c_2 tais que G é X_β valuada, $(-A)^\beta G : I \times \mathcal{B} \to X$ é contínua e

$$\| (-A)^\beta G(t,\psi) \| \leq c_1 \| \psi \|_{\mathcal{B}} + c_2, \qquad (t,\psi) \in I \times \mathcal{B}.$$

$\mathbf{H_3}$ Existe uma função contínua $m_F : I \to [0,\infty)$ e uma função continua e não decrescente $W_F : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$\| F(t,\psi) \| \leq m_F(t) W_F(\| \psi \|_{\mathcal{B}}), \qquad (t,\psi) \in I \times \mathcal{B}.$$

$\mathbf{G_\varphi}$ Seja $\varphi \in \mathcal{B}$, $y : (-\infty,a] \to X$ a única extensão de φ tal que $y(t) = T(t)\varphi(0)$ em I e $S(a) = \{x : (-\infty,a] \to X : x_0 = 0;\ x \in \mathcal{PC}(I : X)\}$ munido da métrica da convergência uniforme sobre I. Diremos que condição $\mathbf{G_\varphi}$ é verificada se o conjunto de funções $\{t \to G(t, x_t + y_t) : x \in Q\}$ é equicontinuo sobre I para todo conjunto limitado $Q \subset S(a)$.

Estamos agora em condições de mostrar o principal resultado deste trabalho.

Theorem 32. *Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ e assuma que $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_3}$ e $\mathbf{G_\varphi}$ são verificadas. Suponha, mais ainda, que as as seguintes propriedades são satisfeitas.*

(a) *Para cada $r > 0$ e todo $\epsilon > 0$, existem conjuntos compactos $W^i_{\epsilon,r} \subset X$ tais que $T(\epsilon)(-A)^\beta G(s,\psi) \in W^1_{\epsilon,r}$ e $T(\epsilon)F(s,\psi) \in W^2_{\epsilon,r}$ para todo $(s,\psi) \in I \times B_r(0,\mathcal{B})$.*

(b) *As funções I_i são completamente continuas e existem constantes c_i^j, $i = 1,2,..n, j = 1,2$ tais que $\| I_i(\psi) \| \leq c_i^1 \| \psi \|_{\mathcal{B}} + c_i^2$, para todo $\psi \in \mathcal{B}$.*

Se

$$\mu = K_a[c_1 + \frac{C_{1-\beta} c_1 a^\beta}{\beta} + \tilde{M} \sum_{i=1}^{n} c_i] < 1 \quad e \quad \frac{K_a \tilde{M}}{1-\mu} \int_0^t m_F(s) ds < \int_c^\infty \frac{1}{W_F(s)} ds,$$

sendo

$$c = \frac{1}{1-\mu} \left[(M_a + \tilde{M}(K_a c_1 + H)) \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a \left[c_2(\tilde{M} + \| (-A)^\beta \| + \frac{a^\beta C_{1-\beta}}{\beta}) + \tilde{M} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \right] \right],$$

então existe pelo menos uma solução fraca do problema impulsivo (4.31)-(4.33).

Demonstração: Sejam $y(\cdot)$, $S(a)$ como em condição $\mathbf{G}_\varphi$ e $\Gamma : S(a) \to S(a)$ a função definida por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} T(t)G(0,\varphi) - G(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)G(s, x_s + y_s)ds & \\ + \int_0^t T(t-s)F(s, x_s + y_s)ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}), & t \in I, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Das hipóteses, sabemos que as funções $s \to (-A)^\beta G(s, x_s + y_s)$ e $s \to G(s, x_s + y_s)$ são integraveis. Mais ainda, como $T(\cdot)$ é analítico (veja Teorema 10), a função $[0,t) \to \mathcal{L}(X)$; $s \to AT(t-s)$ é contínua o que da estimativa

$$\| (-A)T(t-s)G(s, x_s + y_s) \| = \| (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^\beta G(s, x_s + y_s) \| \leq \frac{C_{1-\beta}Cte}{(t-s)^{1-\beta}},$$

e o teorema Bochner's permite mostrar que $s \to \| AT(t-s)G(s, x_s + y_s) \|$ é integravel sobre $[0,t)$. É claro agora que Γ esta corretamente definida e tem valores em $S(a)$.

Seja $(x^n)_n$ uma seqüência em $S(a)$ convergente a $x(\cdot)$. Dos axiomas do espaço de fase $\mathcal{B}$, temos que o conjunto $U = \{x_s^n + y_s, x_s + y_s : s \in [0,a], n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$ o que implica que $(-A)^\beta G(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre U e por tanto que

$$\begin{aligned} G(t, x_t^n + y_t) &\to G(t, x_t + y_t), \\ \int_0^t (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^\beta G(s, x_s^n + y_s)ds &\to \int_0^t (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^\beta G(s, x_s + y_s)ds \end{aligned}$$

uniformemente sobre $[0,a]$ quando $n \to \infty$. O argumento anterior e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue mostram que $\Gamma(x^n) \to \Gamma(x)$ em $S(a)$ quando $n \to \infty$. Por tanto, Γ é contínua.

Para provar a existência de soluções mostraremos que Γ verifica as hipóteses do Teorema 21. Com esta finalidade, inicialmente faremos estimativas *a priori* para as soluções da equação integral $x = \lambda\Gamma x$, $\lambda \in (0,1)$. Sejam $\lambda \in (0,1)$ e $x^\lambda(\cdot)$ uma solução de $x = \lambda\Gamma x$. Fazendo uso de $\mathbf{H_1}$-$\mathbf{H_3}$, da notação $v^\lambda(t) := M_a \| \varphi \|_{\mathcal{B}} + K_a\tilde{M} \| \varphi(0) \| + K_a \| x^\lambda \|_t$ e o fato que $\| x_t + y_t \|_{\mathcal{B}} \leq v^\lambda(t)$ sobre I, vemos que

$$\begin{aligned} \| x^\lambda(t) \| \leq\; & \tilde{M} \| G(0,\varphi) \| + \| (-A)^{-\beta} \| c_2 + \| (-A)^{-\beta} \| c_1 v^\lambda(t) \\ & + C_{1-\beta}c_1 \int_0^t \frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}ds + \frac{C_{1-\beta}c_2T^\beta}{\beta} + \tilde{M}\int_0^t m_F(s)W_F(v^\lambda(s))ds \\ & + \tilde{M}\sum_{t_i \leq t}(c_i^1 \| v(t) \|_{\mathcal{B}} + c_i^2). \end{aligned}$$

Da definição de $v^\lambda(\cdot)$ temos que

$$\begin{aligned} \| v^\lambda(t) \| \leq\; & M_a \| \varphi \| + K_a \left[\tilde{M} \| \varphi(0) \| + \tilde{M} \| G(0,\varphi) \| + c_2(\| (-A)^\beta \| + \frac{a^\beta C_{1-\beta}}{\beta}) \right] \\ & + \mu v^\lambda(t) + K_a\tilde{M}\int_0^t m_F(s)W_F(v^\lambda(s))ds + K_a\tilde{M}\sum_{i=1}^n c_i^2, \end{aligned}$$

e portanto que

$$\begin{aligned} v^\lambda(t) &\leq \frac{1}{1-\mu}\left[(M_a+\tilde{M}(K_a c_1+H)) \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a c_2(\tilde{M}+ \parallel (-A)^\beta \parallel + \frac{a^\beta C_{1-\beta}}{\beta})\right] \\ & \frac{K_a\tilde{M}}{1-\mu}\int_0^t m_F(s)W_F(v^\lambda(s))ds + \frac{\tilde{M}K_a}{1-\mu}\sum_{i=1}^n c_i^2. \end{aligned}$$

Se notamos por $\beta^\lambda(t)$ ao lado direito da ultima desigualdade, obtemos que

$$\beta'_\lambda(t) \leq \frac{K_a\tilde{M}}{1-\mu} m_F(t)W_F(\beta_\lambda(t))$$

e então que

$$\int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W_F(s)} \leq \frac{K_a\tilde{M}}{1-\mu}\int_0^t m_F(s)ds < \int_{\beta_\lambda(0)}^\infty \frac{1}{W_F(s)}ds,$$

o que mostra que as funções $\beta^\lambda(\cdot)$ são uniformemente limitadas sobre I. Isto prova que as funções $x^\lambda(\cdot)$ são uniformemente limitadas sobre I.

Mostramos agora que a função Γ é completamente contínua. Para este fim, usando a observação (6) reescrevemos Γ na forma $\Gamma = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i$ sendo $\Gamma_i x = 0$ on $(-\infty, 0]$, $i = 1, 2, \ldots 4$, e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= T(t)(G(0,\varphi) - G(t, x_t + y_t)), \\ \Gamma_2 x(t) &= -\int_0^t AT(t-s)G(s, x_s + y_s)ds, \\ \Gamma_3 x(t) &= \int_0^t T(t-s)F(s, x_s + y_s)ds + \int_0^t AT(t-s)G(t, x_t + y_t)ds, \\ \Gamma_4 x(t) &= \sum_{t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}), \end{aligned}$$

para $t \in I$. Na continuação mostramos que cada operador Γ_i é completamente contínuo. No que resta da demonstração, $B_r = B_r(0, S(a))$. Para iniciar, observamos que

$$r^\star := K_a r + M_a \parallel \varphi \parallel_{\mathcal{B}} + K_a\tilde{M}H \parallel \varphi(0) \parallel \geq \parallel x_t + y_t \parallel_{\mathcal{B}}$$

quando $(t, x) \in I \times B_r$.

Step 1. Γ_1 é completamente continuo

Estudemos primeiramente a equicontinuidade do conjunto $\Gamma_1 B_r$. Seja $0 < \epsilon < t_0 < t \leq a$ e $W^1_{\epsilon,r^\star}$ o conjunto compacto da hipóteses (**a**). Usando a condição $\mathbf{G}_\varphi$ e que o conjunto de funções $\{s \to T(s)x : x \in W^1_{\epsilon,r^\star}\}$ é uniformemente equicontinuo sobre $[0, a]$, veja Lema 2.17 em Nogueira [16], podemos escolher $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} \parallel T(s+h)x - T(s)x \parallel &< \epsilon, \qquad s \in I,\ x \in W^1_{\epsilon,r^\star}, \\ \parallel G(t, x_t + y_t) - G(t_0, x_{t_0} + y_{t_0}) \parallel &< \epsilon, \qquad x \in B_r, \end{aligned}$$

quando $0 < h < \delta$ e $| t - t_0 | < \delta$. Nestas condições temos que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_1 x(t_0) - \Gamma_1 x(t) \| &\leq \| (T(t_0) - T(t))G(0,\varphi) \| \\
&+ \| T(t_0) \| \| G(t_0, x_{t_0} + y_{t_0}) - G(t, x_t + y_t) \| \\
&+ \| (-A)^{\beta}(T(t_0 - \epsilon) - T(t - \epsilon))T(\epsilon)(-A)^{-\beta} G(t, x_t + y_t) \| \\
&\leq \| (T(t_0) - T(t))G(0,\varphi) \| + (\| T(t_0) \| + \| (-A)^{-\beta} \|)\epsilon
\end{aligned}$$

quando $| t - t_0 | < \delta$, o que mostra que $\Gamma_1(B_r)$ é equicontinuo pela direita no ponto t_0. A equicontinuidad pela isquerda no ponto $t_0 \geq 0$ é provada em forma análoga e omitiremos detalhes.

É claro que $\Gamma_1(B_r)(0)$ é compacto. Mais ainda, da continuidade de $(-A)^{-\beta}$ e a relação

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(B_r)(t) &= \{T(t)G(0,\varphi) + T(t-\epsilon)(-A)^{-\beta}T(\epsilon)(-A^{\beta})G(t, x_t + y_t) : x \in B_r\} \\
&\subset T(t)G(0,\varphi) + T(t-\epsilon)(-A)^{-\beta} W^1_{\epsilon, r^*}
\end{aligned}$$

para $0 < \epsilon < t$, inferimos que $\Gamma_1(B_r)(t)$ é relativamente compacto em X. Portanto, Γ_1 é completamente contínuo.

Step 2. A função Γ_2 é completamente contínua

Mostremos para começar que $\Gamma_2 B_r$ é equicontinuo. Seja $0 < \epsilon < t_0 < a$ e $W^1_{\frac{\epsilon}{2}, r^*}$ o conjunto compacto em (**a**). Como $s \to (-A)^{1-\beta}T(s)$ é contínua sobre $(0, a]$ na topologia uniforme de operadores limitados, temos que o conjunto de funções $\{ s \to (-A)^{1-\beta}T(s)x : x \in W^1_{\frac{\epsilon}{2}, r^*} \}$ é uniformemente equicontínuo sobre $[\frac{\epsilon}{2}, a]$. Fixemos $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$\| (-A)^{1-\beta}T(s)x - (-A)^{1-\beta}T(s')x \| < \epsilon, \qquad x \in W^1_{\frac{\epsilon}{2}, r^*},$$

quando $\frac{\epsilon}{2} \leq s, s' \leq a$ e $| s - s' | < \delta$. Se $0 < t - t_0 < \delta < \epsilon$, então

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma_2 x(t) - \Gamma_2 x(t_0) \| \\
&\leq \| \int_0^{t_0 - \epsilon} (-A)^{1-\beta}(T(t-s) - T(t_0 - s))(-A)^{\beta} G(s, x_s + y_s) ds \| \\
&\quad + \int_{t_0-\epsilon}^{t_0} \| T(t - t_0) - I \| \| (-A)^{1-\beta} T(t_0 - s)(-A)^{\beta} G(s, x_s + y_s) \| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \| (-A)^{1-\beta} T(t-s)(-A)^{\beta} G(s, x_s + y_s) \| ds \\
&\leq \int_0^{t_0-\epsilon} \| (-A)^{1-\beta}[T(t - s - \frac{\epsilon}{2}) - T(t_0 - s - \frac{\epsilon}{2})]T(\frac{\epsilon}{2})(-A)^{\beta} G(s, x_s + y_s) \| ds \\
&\quad + 2\tilde{M} C_{1-\beta}(c_1 r^* + c_2)(\frac{\epsilon^{\beta}}{\beta} + \frac{(t - t_0)^{\beta}}{\beta}) \\
&\leq (t_0 - \epsilon)\epsilon + 4\tilde{M} C_{1-\beta}(c_1 r^* + c_2)\frac{\epsilon^{\beta}}{\beta},
\end{aligned}$$

o que implica que $\Gamma_2(B_r)$ é equicontinuo a direita no ponto t_0. Similarmente é possivel mostrar a equicontinuidade de $\Gamma_2(B_r)$ a esquerda no ponto t_0. Assim, podemos concluir que $\Gamma_2(B_r)$ é equicontinuo sobre $[0, a]$.

Mostramos agora que $\Gamma_2(B_r)(t)$ é relativamente compact para todo $t \in I$. O caso $t=0$ é trivial. Seja $0<\epsilon<t\leq a$ e $W^1_{\frac{\epsilon}{2},r^*}$ sendo o conjunto compacto da condição (a). Usando que $(-A)^{\beta}T(\cdot)$ é fortemente continua sobre $[\frac{\epsilon}{2},a]$, deduzimos usando os mesmos argumentos da prova do Lema 2.17 em [16], que o conjunto $W_\epsilon=\{(-A)^{1-\beta}T(s)x : s\in[\frac{\epsilon}{2},a],\ x\in W^1_{\frac{\epsilon}{2},r^*}\}$ é relativamente compacto em X. Do teorema do valor medio para a integral de Bochner, veja [15] lema 2.1.3, vemos que

$$\begin{aligned}\Gamma_2x(t) &= \int_0^{t-\epsilon}(-A)^{1-\beta}T(t-s-\frac{\epsilon}{2})T(\frac{\epsilon}{2})(-A)^{\beta}G(s,x_s+y_s)ds\\ &\quad+\int_{t-\epsilon}^{t}(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}G(s,x_s+y_s)ds\\ &\in (t-\epsilon)\overline{conv(W_\epsilon)}+C_\epsilon\end{aligned}$$

sendo $co(W_\epsilon)$ a envolvente convexa de W_ϵ e $diam(C_\epsilon)\leq 2C_{1-\beta}(c_1r^*+c_2)\frac{\epsilon^\beta}{\beta}$, o que nos permite concluir das observações anteriores que $\Gamma_2(B_r)(t)$ é totalmente limitado e portanto relativamente compacto em X. Por tanto, Γ_2 é completamente contínuo.

Procedendo como no passo 2, inferimos que Γ_3 é completamente contínuo. Nos omitimos os detalhes desta parte da demonstração.

Step 3 O operador Γ_4 é completamente contínuo.

Para mostrar esta propriedade, usaremos o Teorema 23. É claro que $\Gamma_4B_r(t)$ é relativamente compacto para cada $t\neq t_i$, $i=1,2,...n$. Mais ainda, como os conjuntos $U(t_i,t_j,r^*)=\{T(t_i-t_j)I_j(B_{r^*}(0,X))\}$, $t_i\leq< t_j$, são relativamente compactos em X, das expressões

$$\begin{aligned}\widetilde{[\Gamma_4x]}_i(t_i) &= \sum_{j=1}^{i-1}T(t_i-t_j)I_j(x_{t_j}+y_{t_j})+I_i(x_{t_i}+y_{t_i})\in\sum_{j=1}^{i}U(t_i,t_j,r^*), i\geq 1, x\in B_r,\\ \widetilde{[\Gamma_4x]}_i(t_{i+1}) &= \sum_{j=1}^{i}T(t_{i+1}-t_j)I_j(x_{t_j}+y_{t_j})\in\sum_{j=1}^{i}U(t_{i+1},t_j,r^*),\quad i\geq 0,\ x\in B_r,\end{aligned}$$

inferimos que os conjuntos $\widetilde{[\Gamma_4B_r]}_i(t)$ são relativamente em X para todo $i=0,1,2,..n$.

Agora mostramos que cada conjunto $\widetilde{[\Gamma_4B_r]}_i$, $i=1,2,3,..n-1$, é equicontinuou sobre $[t_i,t_{i+1}]$. Usando que $\bigcup_{i=1}^{n}I_i(B_{r^*})$ é relativamente compacto; par $\epsilon>0$ fixamos $\delta>0$ tal que

$$\|\,(T(s)-T(s'))x\,\|\leq\frac{\epsilon}{n\tilde{M}},\qquad x\in\bigcup_{i=1}^{n}I_i(B_{r^*}),$$

when $|\,s-s'\,|<\delta$. Agora, distinguimos três casos.

1. Quando $t\in(t_i,t_{i+1})$ fixamos $0<\delta_1<\delta$ tal que $[t-\delta_1,t+\delta_1]\subset(t_i,t_{i+1})$. Se $x\in B_r$ e $0<h<\delta_1$ vemos que

$$\|\,\widetilde{[\Gamma_4x]}_i(t+h)-\widetilde{[\Gamma_4x]}_i(t)\,\|=\|\sum_{j=1}^{i}\|\,(T(t+h-t_j)-T(t-t_j))I_j(x_{t_j}+y_{t_j})\,\|\leq\epsilon,$$

o que mosra que $\widetilde{[\Gamma_4]}(B_r)$ é equicontinuo em t.

2. Se $t = t_i$, para $0 < h < \min\{t_{i+1} - t_i, \delta\}$ e $x \in B_r$ temos que

$$\| \widetilde{[\Gamma_4 x]}(t_i + h) - \widetilde{[\Gamma_4 x]}x(t_i) \| = \sum_{j=1}^{i} \| (T(t_i + h - t_j) - T(t_i - t_j))I_j(x_{t_j} + y_{t_j}) \| \leq \epsilon.$$

Portanto, $\widetilde{[\Gamma_4]}(B_r)$ é equicontinuo a direita em t_i.

3. Se $t = t_{i+1}$ e $0 < h < \min\{t_{i+1} - t_i, \delta\}$ então

$$\| \widetilde{[\Gamma_4 x]}_i(t_{i+1}-h) - \widetilde{[\Gamma_4 x]}_i(t_{i+1}) \| = \sum_{j=1}^{i} \| (T(t_{i+1}-h-t_j) - T(t_{i+1}-t_j))I_j(x_{t_j}+y_{t_j}) \| \leq \epsilon,$$

para todo $x \in B_r$. Conseqüentemente, $\widetilde{[\Gamma_4]}_i(B_r)$ is equicontinuo a esquerda em t_{i+1}.

Do anterior segue que $\widetilde{[\Gamma_4]}_i(B_r)$ é relativamente compacto em $C([t_i, t_{i+1}] : X)$ para cada $i = 1, 2, ...n$. Similarmente, podemos mostrar que $\widetilde{[\Gamma_4]}_0(B_r)$ e $\widetilde{[\Gamma_4]}_n(B_r)$ são relativamente compactos em $C([0, t_1] : X)$ e $C([t_n, a] : X)$ respectivamente. Portanto, Γ_4 é completamente contínuo.

Finalmente, o Teorema de Leray Schauder, veja Teorema 21 garante a existência de um ponto fixo para Γ. Claramente este ponto fixo é uma solução fraca do problema (4.31). ∎

No próximo resultado usamos o Teorema de ponto fixo de Sadovskii (veja [18]), para mostrar a existência de soluções para o sistema (4.31)-(4.33).

Theorem 33. *Sejam $\varphi \in \mathcal{B}$, $y(\cdot)$ como em condição $\mathbf{G}_\varphi$ e assuma que as condições $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ valem. Suponha, mais ainda, que as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *Para cada $r > 0$ e todo $\epsilon > 0$ existe um compacto $W_{\epsilon,r} \subset X$ tal que $T(\epsilon)F(s, \psi) \in W_{\epsilon,r}$ para todo $s \in I$, $\psi \in B_r[0, \mathcal{B}]$.*

(b) *Existem constantes positivas L_G, L_j, $j = 1, 2, ...n$ tais que*

$$\begin{aligned} \| I_j(\psi_1) - I_j(\psi_2) \| &\leq L_j \| \psi_1 - \psi_2 \|, & \psi_i \in \mathcal{B}, \\ \| (-A)^\beta G(t, \psi_1) - (-A)^\beta G(t, \psi_2) \| &\leq L_G \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, & (t, \psi_i) \in I \times \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Se $L_G K_a(\| (-A)^{-\beta} \| + \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta}) + \tilde{M} \sum_{i=1}^{n} L_i K_a + \liminf_{r \to \infty} \int_0^a m_F(s) W_F(K_a r + \| y_s \|_{\mathcal{B}}$ $)ds < 1$, *então existe uma soluçõa fraca de (4.31)-(4.33).*

Demonstração: Seja $\Gamma : S(a) \to S(a)$ a função definida na prova do Teorema 32 e considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ onde $\Gamma_i x = 0$ sobre $(-\infty, 0]$, $i = 1, 2$, e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= T(t)G(0, \varphi) + \int_0^t T(t-s)F(s, x_s + y_s)ds, \\ \Gamma_2 x(t) &= -G(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)G(s, x_s + y_s)ds + \sum_{t_i < t} T(t - t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}), \end{aligned}$$

quando $t \in I$. Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r(0, S(a))) \subset B_r(0, S(a))$. Se a afirmação é falsa, para cada $r > 0$ existe $x^r \in B_r$ e $t^r \in I$ tal que $r <\| \Gamma x^r(t^r) \|$ e então

$$\begin{aligned}
r <\| \Gamma x^r(t^r) \| &\leq \tilde{M} \| G(0,\varphi) \| + \| (-A)^{-\beta} \| L_G \| x^r_{t^r} \|_{\mathcal{B}} + \| G(t^r, y_{t^r}) \| \\
&+ \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}} (L_G \| x^r_s \|_{\mathcal{B}} + \| G(s, y_s) \|_{\mathcal{B}}) ds \\
&+ \int_0^{t^r} m_F W_F(\| x^r_s \|_{\mathcal{B}} + \| y_s \|_{\mathcal{B}}) ds + \tilde{M} \sum_{t_i < t^r} (L_i \| x^r_{t_i} \|_{\mathcal{B}} + \| I_i(y_{t_i}) \|) \\
&\leq \tilde{M} \| G(0,\varphi) \| + \| (-A)^{-\beta} \| L_G K_a r + \| G(t^r, y_{t^r}) \| + L_G K_a r \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} \\
&+ \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta} \| G(s, y_s) \|}{(t^r - s)^{1-\beta}} ds + \int_0^a m_F(s) W_F(K_a r + \| y_s \|_{\mathcal{B}}) ds \\
&+ \tilde{M} \sum_{i=1}^n (L_i K_a r + \| I_i(y_{t_i}) \|)
\end{aligned}$$

e portanto,

$$1 \leq K_a \left[L_G(\| (-A)^{-\beta} \| + \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta}) + \tilde{M} \sum_{i=1}^n L_i \right] + \liminf_{r \to \infty} W_F(K_a r + \| y_s \|_{\mathcal{B}}) \int_0^a m_F(s) ds$$

o qual é um absurdo.

Seja $r_0 > 0$ tal que $\Gamma(B_{r_0}) \subset B_{r_0}$. Da prova do Teorema 32 sabemos que Γ_1 é completamente continuo em B_{r_0}. Mais ainda, da estimativa

$$\| \Gamma_2 u - \Gamma_2 v \|_a \leq K_a \left(L_G \left(\| (-A)^{-\beta} \| + \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} \right) + \tilde{M} \sum_{i=1}^n L_i \right) \| u - v \|_a,$$

concluímos que Γ_2 é uma contração em B_{r_0}. Portanto, Γ é um operador condensante em B_{r_0}. A existência de uma solução fraca de (4.31)-(4.33) é agora conseqüência do Teorema 22. ∎

4.2.2 Um Exemplo

Nesta parte final do capitulo apresentamos um exemplo de equação do tipo neutro com retardamento não limitado, a qual é uma generalização do exemplo em Hernández & Henriquez [11]. Consideremos o seguinte problema diferencial

$$\begin{aligned}
[u(t,\xi) + \int_{-\infty}^t \int_0^\pi b(s-t,\eta,\xi) u(s,\eta) d\eta ds]' &= \frac{\partial^2 u(t,\xi)}{\partial \xi^2} \\
&+ \int_{-\infty}^t a(s-t) u(s,\xi) ds + J(t,\xi), \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad t \geq 0, && (4.35) \\
u(\tau,\xi) &= \varphi(\tau,\xi), \qquad \tau \leq 0, \ 0 \leq \xi \leq \pi. && (4.36) \\
I_i(u_{t_i})(\xi) &= \int_{-\infty}^{t_i} a_i(s - t_i) u(s,\xi) ds. && (4.37)
\end{aligned}$$

Para estudar este problema devemos introduzir todo um esquema técnico que nos permita que o problema seja modelado como o problema neutro (4.31)-(4.33). Consideremos o espaço de fase $\mathcal{B} := L^2(g; X)$. Seja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ positiva, contínua, não decrescente, com $g(0) = 1$ e tal que $g(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Definimos o espaço $\mathcal{B} := L^2(g; X)$ como o espaço das funções mensuráveis, $\varphi : (-\infty, 0] \to X$ tais que $\int_{-\infty}^{0} g(\theta) \parallel \varphi(\theta) \parallel^2 d\theta < \infty$. No que segue assumiremos que $g(\cdot)$ verifica as mesmas condições técnicas do exemplo em [11]. Em particular, assumiremos que existe uma função não negativa, integrável e localmente limitada $\gamma(\cdot)$ definida sobre $(-\infty, 0]$ tal que $g(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi) g(\theta)$, para todo $\xi \leq 0$ e todo $\theta \in (-\infty, 0] \setminus N_\xi$ sendo $N_\xi \subseteq (-\infty, 0]$ um conjunto de medida zero. Nestas condições o espaço $\mathcal{B}$ verifica os axiomas $\mathbf{A}, \mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B}$. Mais ainda, temos que $M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$ e que $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^{0} g(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$ para todo $t \geq 0$.

Usando os operadores de substituição

$$\begin{aligned}
G(t, \psi)(\xi) &:= \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{\pi} b(s,\, \eta,\, \xi) \psi(s,\, \eta) d\eta ds, \\
F(t, \psi)(\xi) &:= \int_{-\infty}^{0} a(s) \psi(s, \xi) ds, \\
f(t) &:= J(t, \cdot), \\
I_i(\psi) &= \int_{-\infty}^{0} a_i(s) \psi(s, \xi) ds,
\end{aligned}$$

o problema (4.34)-(4.37) pode ser modelado na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t) + G(t, x_t)) &= Ax(t) + F(t, x_t) + f(t), \\
x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}, \\
\Delta(x_{t_i}) &= I_i(x_{t_i}),
\end{aligned}$$

Theorem 34. *Suponha que todas as condições técnicas descritas anteriormente são verificadas. Assuma, mais ainda, que as seguintes propriedades são validas.*

(a) $b(\eta, \zeta, s)$, $\frac{\partial}{\partial \zeta} b(\eta, \zeta, s)$, *são funções integráveis*, $b(\eta, \pi, s) = b(\eta, 0, s) = 0$.

(b) *A função* $a(\cdot)$ *é integrável e* $N_1 := \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a^2(\theta)}{g(\theta)} d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

(c) *As funções* $a_i(\cdot)$ *são integráveis e* $L_i := \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a_i^2(\theta)}{g(\theta)} d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ *para cada* $i = 1, 2, ...n$.

Seja $\varphi \in \mathcal{B}$ *e assuma que*

$$N K_a (1 + 2\pi^{\frac{1}{2}}) + K_a \sum_{i=1}^{n} L_i + N_1 \pi < 1. \tag{4.38}$$

sendo

$$N = \sup_{s\in[0,\pi]} \left\{ \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{1}{g(s)} (b(\eta,\zeta,s))^2 d\eta d\zeta ds, \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{1}{g(s)} \left(\frac{\partial b(\eta,\zeta,s)}{\partial \zeta} \right)^2 d\eta d\zeta ds \right\}.$$

Então existe uma solução fraca do problema impulsivo (4.34)-(4.37).

Demonstração: Fazendo uso de **(a)**, **(b)**,**(c)** e da desigualdade de Hölder, segue que $F(t,\cdot)$, $G(t,\cdot), I_i$ são operadores lineares continuous e que $\| F(t,\cdot) \| \leq N_1$, $\| I_i(\cdot) \| \leq L_i$ e $\| G(t,\cdot) \| \leq N^{\frac{1}{2}}$. Por outro lado, usando **(a)** e (4.26) temos que $G(\cdot)$ assume valores em $D(-A)^{1/2}$ e que $\| (-A)^{1/2} G(t,\cdot) \| \leq N^{\frac{1}{2}}$. Agora a existência de uma solução fraca para o problema neutro (4.34)-(4.37) é conseqüência direta de 4.38 e do Teorema de Existência 33.

Referências Bibliográficas

[1] Balachandran; K. Dauer, J. P. Existence of solutions of nonlinear neutral integrodifferential equations in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000), no. 1, 93–105.

[2] Balachandran, K.; Sakthivel, R.; Dauer, J. P. Controllability of neutral functional integrodifferential systems in Banach spaces. *Comput. Math. Appl.* 39 (2000), no. 1-2,

[3] Balachandran, K. Sakthivel, R. Existence of solutions of neutral functional integrodifferential equation in Banach spaces. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 109, (1999), no. 3, 325-332.

[4] Benchohra, M.; Ntouyas, S. K. Nonlocal Cauchy problems for neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001), no. 2, 573–590.

[5] Benchohra, M.; Henderson, J.; Ntouyas, S. K. Existence results for impulsive multivalued semilinear neutral functional differential inclusions in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 263 (2001), no. 2, 763–780

[6] Benchohra, M.; Ntouyas, S. K. Neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8) 4 (2001), no. 3, 767–782.

[7] Benchohra, M.; Ntouyas, S. K. Nonlocal Cauchy problems on semi-infinite intervals for neutral functional differential and integrodifferential inclusions in Banach spaces. *Math. Slovaca* 51 (2001), no. 5, 529–545.

[8] Goldstein, J. Semigroups of linear operators and applications. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985.

[9] Hale, Jack K.; Kato, Junji. Phase space for retarded equations with infinite delay. *Funkcial. Ekvac.* 21 (1978), no. 1, 11–41.

[10] Hale, Jack K.; Verduyn Lunel, Sjoerd M. Introduction to functional-differential equations. Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] Hernández, Eduardo; Henríquez, Hernán R. Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, 499–522.

[12] Hernández, Eduardo; Henríquez, Hernán R. Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, 452–475.

[13] Hino, Yoshiyuki; Murakami, Satoru; Naito, Toshiki Functional-differential equations with infinite delay. Lecture Notes in Mathematics, 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] Liu, James H. *Nonlinear impulsive evolution equations.* Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 6 (1999), no. 1, 77–85.

[15] R. H. Martin, Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, 1987.

[16] Nogueira, Sérgio H. Resultados de Existência de Soluções de Equações Funcionais Impulsivas. Tese de Mestrado.

[17] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[18] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle. *Funct. Anal. Appl.* **1** (1967), 74-76.

[19] Granas, A. Frigon, M. A Topological methods in differential equations and inclusions. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, 472. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995.

[20] Rogovchenko, Yuri V. *Impulsive evolution systems: main results and new trends.* Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 3 (1997), no. 1, 57–88.

[21] Taylor, Angus E. Introduction to functional analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London 1958

[22] Yosida, Kôsaku Yosida, Kôsaku Functional analysis. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123 Academic Press, Inc., New York; Springer-Verlag, Berlin 1965.