

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2585

**TEORIA DE GRUPOS APLICADA AOS
PADRÕES DE PAPÉIS DE PAREDE**

**Vinícius Bazan Pinto Fernandes
Míriam Garcia Manoel**

Nº 81

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMC

São Carlos
Setembro/2011

Resumo

Grupo é a estrutura matemática que usamos para estudar simetrias de objetos, de fenômenos químicos, físicos, da natureza, nas artes, enfim. Os grupos dos papéis de parede, ou como também costumamos dizer *wallpaper groups*, descrevem de forma sistemática todos os possíveis padrões simétricos que se repetem no plano. Estas notas se propõem a fornecer um aprofundamento no que diz respeito à teoria de grupos voltada ao estudo dessas simetrias. Assumimos do leitor familiaridade com as noções básicas da teoria de grupos, incluindo aqui as definições e alguns dos teoremas abordados em uma primeira disciplina de Álgebra da graduação. De qualquer forma, esperamos ter incluído todo o material necessário para desenvolver a teoria de forma auto-consistente, propondo referências sobre a álgebra básica utilizada a quem deseje mais detalhes. Vamos aproveitar a riqueza do apelo geométrico das simetrias para estudarmos o grupo Euclideo como um produto semi-direto, para compreender sobre a teoria de ação e representação de grupos e, principalmente, deduzir de forma detalhada que são num total de 17 todos os subgrupos do grupo Euclideo que geram os padrões do plano. Ao final, apresentamos um vasto número de exemplos visuais de padrões num exercício de identificá-los com cada um dos 17 grupos dos papéis de parede.

Sumário

1	Introdução	4
2	Preliminares	5
2.1	O produto semi-direto	5
2.2	Ação de grupos	7
2.3	O grupo Euclideo	8
2.3.1	O grupo Euclideo como um produto semi-direto	9
2.3.2	Caracterização do subgrupo O	10
2.3.3	Caracterização das isometrias do plano	11
3	Os grupos dos padrões no plano (<i>wallpaper groups</i>)	12
3.1	Rede Oblíqua	15
3.1.1	p1:	15
3.1.2	p2:	16
3.2	Rede Retangular	17
3.2.1	pm:	17
3.2.2	pg:	18
3.2.3	p2mm:	20
3.2.4	p2mg:	20
3.2.5	p2gg:	22
3.3	Rede Retangular Centrada	22
3.3.1	cm:	23
3.3.2	c2mm:	24
3.4	Rede Quadrada	25
3.4.1	p4:	25
3.4.2	p4mm:	26
3.4.3	p4gm:	28
3.5	Rede Hexagonal	30
3.5.1	p3:	30
3.5.2	p3m1:	31
3.5.3	p31m	33
3.5.4	p6:	35
3.5.5	p6mm:	36
4	Ilustrações	37
4.1	p1	37
4.2	p2	38
4.3	pm	39
4.4	pg	40
4.5	p2mm	40
4.6	p2mg	41
4.7	p2gg	41
4.8	cm	42

4.9	c2mm	43
4.10	p4	43
4.11	p4mm	44
4.12	p4gm	44
4.13	p3	45
4.14	p3m1	45
4.15	p31m	46
4.16	p6	46
4.17	p6mm	47

1 Introdução

Por estar presente em um número muito grande de modelos do universo, a teoria geral de grupos desempenha um papel crucial em matemática e em outras ciências. É através de grupos e suas representações, por exemplo, que se desenvolve o estudo sistemático da ocorrência de simetrias em cristais, por fornecer simplificações tanto nos cálculos quanto na interpretação dos resultados. Simetria de uma imagem é uma transformação dada por uma rotação, reflexão, translação, ou mesmo uma combinação dessas, que deixa esta imagem invariante. Ou seja, não há como distinguir a figura inicial e a final antes ou depois desta transformação.

Historicamente, os padrões vêm sendo classificados há mais de 2500 anos, muito devido à inclinação que a mente humana tem em buscar ordem, padrões, simetrias, mesmo nos mais (aparentemente) caóticos sistemas. Cotidianamente, padrões com distintas leis de formação e de diferentes naturezas são observados não somente em objetos de decoração (como os papéis de parede), mas também em estruturas de cristais, em fractais, numa diversidade de sistemas dinâmicos, em partituras musicais (com padrões de disposição de notas em compassos), em poesias (no tocante aos esquemas de rimas que seguem estruturas definidas), nas sequências numéricas, entre outros exemplos.

O estudo sistemático de padrões tem seus primeiros registros nos estudos de Pitágoras (500 a.C.) dos sólidos regulares e, posteriormente, Arquimedes (250 a.C.). Já no século XVI, Kepler estudou as *tessellations* regulares no plano, estruturas de repetição de uma figura bidimensional de tal forma que todo o plano seja preenchido (sem brechas). Observou que só há três possíveis tipos desses mosaicos regulares, formados por triângulos, quadrados e hexágonos.

Por volta do século XIX deu-se início à classificação das redes planas e espaciais, fundamentais no estudo da formação dos padrões bi e tridimensionais. O caso plano tem como principal nome, Evgraf Fedorov, que chegou à demonstração da existência de somente 17 grupos de padrões planos. Auguste Bravais, por sua vez, classificou as 14 redes espaciais (redes de Bravais), que dão fundamento aos arranjos periódicos dos cristais.

Um ponto relevante neste estudo é a classificação dos grupos finitos que descrevem padrões no plano e no espaço. No caso plano, objetivo principal deste trabalho, ocorrem 17 estruturas simétricas de padrões periódicos, cada um associado a um grupo específico, os chamados grupos cristalográficos planos ou *wallpaper groups*. No espaço tridimensional, por sua vez, são 230 grupos que descrevem de maneira unívoca todo o arranjo de objetos idênticos dispostos num retículo periódico. É notória e de fácil percepção a ocorrência das simetrias em objetos do cotidiano, tal como se nota nas artes em geral, em papéis de parede, em utensílios adornados produzidos pelo homem e na própria natureza. É nesta linha que apresentamos nossos exemplos.

Em uma visão ampla, as simetrias, no plano, de um padrão, se traduzem sob a forma de transformações (rotações, reflexões, translações, ou uma combinação dessas) que o deixam invariante.

Em relação à estrutura do trabalho, é feita uma divisão em três seções. A Seção 2 é devotada a preliminares. A Seção 3 traz os *wallpaper groups* propriamente ditos, com suas estruturas, princípios de formação e demonstrações dos resultados. Finalmente, a Seção 4 contém ilustrações dos padrões de papel de parede, a fim de dar maior concretude ao tema em estudo e apresentar realizações de cada um dos 17 grupos em estudo.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos o que acreditamos ser um material sobre as bases da Álgebra para uma leitura fluente das seções posteriores, assumindo familiaridade com as noções básicas da teoria de grupos de uma primeira disciplina de Álgebra da graduação, como a disciplina SMA 305 Álgebra I, do departamento de Matemática do ICMC, USP.

Começemos com uma menção sobre o objeto principal destas notas: o conceito de simetria. Como uma definição provisória, embora já bastante esclarecedora, chamamos *simetria* de um objeto um movimento rígido que deixa sua figura inalterada, ou seja, se não distinguimos a figura antes ou após o efeito deste movimento. Esta idéia, unida ao efeito de aplicarmos a um objeto duas de suas simetrias, ou o movimento inverso de uma sua simetria, nos leva a reconhecer, de uma forma até bastante natural, que o conjunto de todas as simetrias de um objeto tem a estrutura matemática de grupo.

O efeito do grupo das simetrias de um dado objeto sobre este objeto é formalizado, do ponto de vista matemático, através da noção de ação deste grupo sobre o espaço de configurações. Na Subseção 2.2 tratamos brevemente desta noção. A construção dos grupos de simetrias das possíveis configurações que aparecem em padrões simétricos planos resulta em subgrupos finitos do grupo Euclidiano $\mathbf{E}_2$, em geral não comutativos e que têm uma estrutura algébrica do chamado produto semi-direto. A definição de produto semi-direto de dois grupos é apresentada na Subseção 2.1.

2.1 O produto semi-direto

Começamos lembrando a definição do produto direto de dois grupos:

Definição 2.1. *Dados dois grupos N e H , o produto direto $N \times H$ é o conjunto dos pares ordenados (n, h) , com $n \in N$, $h \in H$, com a operação definida a partir das operações de N e H em cada coordenada correspondente:*

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2),$$

para quaisquer $n_1, n_2, \in N$, $h_1, h_2, \in H$.

Observe que, se 1_N e 1_H denotam os elementos neutros em N e H respectivamente, então o elemento neutro em $N \times H$ é o par $(1_N, 1_H)$.

Exemplo 2.2. *Para $n \geq 3$ qualquer, dados dois grupos cíclicos de ordens n e 2 , isto é, $\mathbf{Z}_n = \langle a \rangle$ e $\mathbf{Z}_2 = \langle b \rangle$, com $a^n = b^2 = 1$, podemos tomar o produto direto $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_2$, onde*

$$(a^i, b^j)(a^k, b^l) = (a^{i+k}, b^{j+l}), \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad 1 \leq j, l \leq 2.$$

Este é um grupo cíclico com $2n$ elementos, gerado por (a, b) .

Para a próxima definição lembramos aqui que um automorfismo de um grupo G é um isomorfismo de G em G . Lembremos ainda que o conjunto de todos estes automorfismos, denotado por $\text{Aut}(G)$ tem, por sua vez, estrutura de grupo com a operação de composição de funções.

Definição 2.3. Sejam N e H grupos e seja $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ um homomorfismo de H no grupo dos automorfismos de N . Chamamos de **produto semi-direto** de N por H , e denotamos por $N \times_{\varphi} H$, o grupo dos pares ordenados (n, h) , com $n \in N$, $h \in H$, com a operação de produto dada por

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2), \quad (2.1)$$

para quaisquer $n_1, n_2, \in N$, $h_1, h_2, \in H$.

É um exercício fácil mostrar que o elemento neutro de $N \times_{\varphi} H$ é $(1_N, 1_H)$ e o elemento inverso de (n, h) é $(\varphi(h^{-1})(n^{-1}), h^{-1})$.

Ainda, H é isomorfo ao subgrupo $\{1_N\} \times_{\varphi} H$ de $N \times_{\varphi} H$ pelo isomorfismo natural $h \mapsto (1_N, h)$. Também, N é isomorfo ao subgrupo $N \times_{\varphi} \{1_H\}$ de $N \times_{\varphi} H$ pelo isomorfismo natural $n \mapsto (n, 1_H)$. Além disso, por construção do produto semi-direto temos que $N \times_{\varphi} \{1_H\}$ é um subgrupo normal de $N \times_{\varphi} H$.

Observe que os produtos direto e semi-diretos são iguais como conjuntos. Além disso, o produto semi-direto se reduz a um produto direto quando φ , da Definição 2.3, é o homomorfismo trivial $\varphi(h) = I_N$, para todo $h \in H$.

Exemplo 2.4. Para $n \geq 3$ qualquer, considere o grupo diedral $\mathbf{D}_n$, grupo gerado por dois elementos a e b com $a^n = b^2 = 1$ e $ba = a^{-1}b$. Tomemos os grupos cíclicos $\mathbf{Z}_2 = \langle b \rangle$, $\mathbf{Z}_n = \langle a \rangle$. Notemos que $\mathbf{Z}_n$ é um subgrupo normal de $\mathbf{D}_n$. Vamos construir agora um homomorfismo $\varphi : \mathbf{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{Z}_n)$. Primeiro, devemos ter

$$\varphi(1)(a) = a,$$

ou seja, $\varphi(1)$ deve ser a identidade de $\mathbf{Z}_n$ (caso contrário, φ não seria homomorfismo de grupos). Tomemos agora

$$\varphi(b)(a) = a^{-1}.$$

Como $\mathbf{Z}_n$ é Abeliano, segue que a inversão dada na expressão acima é de fato um automorfismo de $\mathbf{Z}_n$. Usando a igualdade $ba = a^{-1}b$, decorre que a operação

$$(a^i, b^j)(a^k, b^l) = (a^i\varphi(b^j)(a^k), b^{j+l}), \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad 1 \leq j, l \leq 2, \quad (2.2)$$

define de fato no produto cartesiano entre $\mathbf{Z}_n$ e $\mathbf{Z}_2$ uma estrutura de produto semi-direto de $\mathbf{Z}_n$ por $\mathbf{Z}_2$.

Finalmente, notemos que

$$(a^i, b^j) = (a^i, 1)(1, b^j), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq 2,$$

$(a, 1)$ tem ordem n , $(1, b)$ tem ordem 2 e, além disso,

$$(1, b)(a, 1) = (a, 1)^{n-1}(1, b).$$

Logo, o produto semi-direto $\mathbf{Z}_n \times_{\varphi} \mathbf{Z}_2$ com a operação (2.2) é isomorfo a $\mathbf{D}_n$.

Observação 2.5. Um exemplo importante de produto semi-direto é o grupo Euclideo, denotado por $\mathbf{E}_2$. Este é o grupo mais importante do estudo apresentado nestas notas e para ele devotamos a Subseção 2.3.

2.2 Ação de grupos

Falando de uma maneira geral, o estudo da ocorrência de simetrias em um dado objeto, em um determinado sistema, se utiliza da teoria de ação de grupos de forma muito efetiva uma vez que a partir dela podemos descrever o efeito dos elementos de um grupo transformando o espaço em que se insere este objeto. Neste caso, o grupo é chamado de grupo de transformação, que age no espaço de configurações (que assumimos aqui um espaço vetorial) como uma transformação linear deste espaço. A definição é dada a seguir:

Definição 2.6. *Seja G um grupo e V um espaço vetorial de dimensão finita. Uma **ação** de G em V é uma aplicação*

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, x) &\rightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

tal que

(a) *Se 1_G denota a identidade de G , então $1_G \cdot x = x$, para todo $x \in V$.*

(b) *Se $g_1, g_2 \in G$, então $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, para todo $x \in V$.*

Exemplo 2.7. *A ação trivial de qualquer grupo G sobre um espaço vetorial V qualquer, definida por*

$$g \cdot x = x, \quad \forall g \in G, \quad \forall x \in V.$$

Exemplo 2.8. *A ação do grupo aditivo $T = \mathbf{R}^2$ sobre o espaço vetorial $V = \mathbf{R}^2$, ambos com a soma usual de vetores no plano, dada pela translação:*

$$v \cdot x = x + v, \quad \forall v \in T, \quad \forall x \in V.$$

De fato,

$$0 \cdot x = x + 0 = x$$

e

$$v_1 \cdot (v_2 \cdot x) = (x + v_2) + v_1 = x + (v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) \cdot x,$$

para todo $x \in V$ e $v_1, v_2 \in T$. Neste caso, chamamos T o grupo das translações no plano .

Exemplo 2.9. *A ação do grupo $\mathbf{O}(2)$ das matrizes ortogonais de ordem 2 sobre $\mathbf{R}^2$ dada pelo produto de matriz por vetor: $M \cdot x = Mx$, para qualquer $M \in \mathbf{O}(2)$ e $x \in V$.*

Definição 2.10. *Dada uma ação de G em V e $x \in V$, o subconjunto de V dado por*

$$G \cdot x = \{g \cdot x : \forall g \in G\}$$

*é chamado **órbita** de x .*

Exemplo 2.11. *Retomemos o Exemplo 2.9. Dado um vetor não-nulo $x \in \mathbf{R}^2$, a órbita de x pela ação do grupo $\mathbf{O}(2)$ é a circunferência de centro na origem e raio $\|x\|$. Quando $x = 0$, sua órbita é apenas $\{0\}$.*

Exemplo 2.12. *Passemos agora a um exemplo de órbita que é bastante importante em nosso estudo. Este é o que chamamos uma rede plana, usado de forma sistemática na construção dos padrões simétricos que apresentamos na Seção 3:*

Dadas dois elementos linearmente independentes do grupo T das translações no plano, seja H o subgrupo gerado por estes elementos. Temos então a ação natural de H em $\mathbf{R}^2$ dada pela restrição da ação de T apresentada no Exemplo 2.8. Consideremos agora a órbita da origem em $\mathbf{R}^2$ pela ação de H . E denotemos por L esta órbita. Tomando em L um vetor $\mathbf{u}$ não-nulo de comprimento mínimo e escolhendo um segundo vetor $\mathbf{v} \in L$ de forma que este tenha comprimento mínimo possível, maior que o de $\mathbf{u}$, e tal que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam linearmente independentes, concluímos que L é caracterizada como o conjunto das combinações lineares de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com coeficientes em $\mathbf{Z}$:

$$L = \{m\mathbf{u} + n\mathbf{v} : m, n \in \mathbf{Z}\}.$$

*Este conjunto é o que chamamos **rede** gerada por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. A prova desta caracterização é dada em [1, Theorem (25.1)]. Na Seção 3 deduzimos a caracterização de todos os padrões simétricos do plano a partir das possíveis redes que podem gerar tais padrões.*

Definição 2.13. *Dada uma ação de G em V e $x \in V$, o conjunto*

$$\Sigma_x = \{g \in G : g \cdot x = x\},$$

*isto é, o conjunto dos elementos de G que deixam x fixo, é chamado **estabilizador** de x .*

Notemos que o estabilizador de um elemento é um subgrupo de G .

Exemplo 2.14. *No Exemplo 2.9, se tomamos a base canônica em $\mathbf{R}^2$ e $x = (x_1, 0)$, então $\Sigma_x = \mathbf{Z}_2$, gerado pela matriz de reflexão com relação ao eixo horizontal. Para o vetor nulo, temos $\Sigma_0 = \mathbf{O}(2)$.*

Dois resultados interessantes que relacionam a órbita e o estabilizador de um elemento são apresentados na proposição seguinte:

Proposição 2.15. *Considere a ação de um grupo G sobre um espaço vetorial V . Então,*

(a) *Pontos numa mesma órbita têm estabilizadores conjugados. Mais precisamente, dados $x \in V$ e $g \in G$,*

$$\Sigma_{g \cdot x} = g \Sigma_x g^{-1}.$$

(b) *Se G é um grupo finito, então para $x \in V$ qualquer, temos $|G| = |\Sigma_x| |G(x)|$.*

Prova. Veja [2, Lemma XIII 1.1, Proposition XIII 1.2].

Observação 2.16. Deixamos para a Subseção 2.3 a apresentação detalhada da ação do grupo Euclidiano $\mathbf{E}_2$ sobre $\mathbf{R}^2$.

2.3 O grupo Euclidiano

Para dar início à descrição dos possíveis padrões de papel de parede do ponto de vista algébrico, faz-se necessária a apresentação do grupo Euclidiano, denotado por $\mathbf{E}_2$. A importância deste grupo advém do fato de ser formado pelas isometrias do plano, ou seja, transformações

lineares que preservam distâncias. Dados dois pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no plano, uma transformação $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é uma isometria se

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

A preservação das distâncias é crucial para a descrição das simetrias no plano. Um exemplo é a rotação de um polígono regular em torno do seu centro, que consiste de um movimento rígido que preserva a distância entre os pontos que o constituem. Não há, entre as configurações inicial e final, deslocamento relativo entre esses pontos.

Notemos rapidamente que a composição de isometrias também é uma isometria:]dadas $f, g \in \mathbf{E}_2$ e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ quaisquer, temos

$$\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{y}))\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Ainda, o operador identidade do plano é uma isometria; além disso, se uma transformação é isometria, então sua inversa também o é, o que faz $\mathbf{E}_2$ ter de fato estrutura de grupo com a operação de composição.

2.3.1 O grupo Euclideo como um produto semi-direto

Translações são isometrias e o conjunto das translações é um subgrupo de $\mathbf{E}_2$, que vamos denotar por T . Rotações em torno da origem e reflexões por retas pela origem são também isometrias. Estas transformações, também chamadas transformações ortogonais, formam também um subgrupo de $\mathbf{E}_2$, que vamos denotar por O . Com argumentos geométricos podemos mostrar que combinações destas transformações formam todo o grupo Euclideo. Mais especificamente, um elemento qualquer de $\mathbf{E}_2$ é ou uma rotação em torno da origem seguida por uma translação ou uma reflexão por uma reta pela origem seguida de uma translação (nos referimos a [1] para a demonstração deste fato). Isto, por sua vez, pode ser expresso da seguinte forma: dado $g \in \mathbf{E}_2$ qualquer, existe uma translação por um vetor $\mathbf{v}$ e uma matriz M , de rotação ou reflexão, tal que

$$g(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \quad (2.3)$$

E, reciprocamente, dado um vetor $\mathbf{v}$ e uma matriz M , de rotação ou reflexão, a expressão acima determina uma isometria no plano.

Passemos agora à justificativa de que o grupo Euclideo tem estrutura de um produto semi-direto, a saber, produto semi-direto de T por O . Notemos inicialmente que T é subgrupo normal. Se identificarmos o elemento g em (2.3) com o par $(\mathbf{v}, M)$, obtemos o conjunto das isometrias como o produto cartesiano dos subgrupos T e O . Nos resta agora provar que esta identificação pode ser feita não apenas como conjuntos, mas como grupos: se compusermos dois elementos $g_1 = (\mathbf{v}_1, M_1)$ e $g_2 = (\mathbf{v}_2, M_2)$ de $\mathbf{E}_2$ segundo (2.3), a esta composta estará associado o par $(\mathbf{v}_1 + M_1\mathbf{v}_2, M_1M_2)$. Concluimos assim que a identificação acima faz de $\mathbf{E}_2$ um produto semi-direto, a saber,

$$\mathbf{E}_2 = T \times_{\varphi} O,$$

onde $\varphi : O \rightarrow \text{Aut}(T)$, $\varphi(M)(\mathbf{v}) = M\mathbf{v}$, com a operação

$$(\mathbf{v}_1, M_1)(\mathbf{v}_2, M_2) = (\mathbf{v}_1 + M_1\mathbf{v}_2, M_1M_2).$$

Definição 2.17. Para $g = (\mathbf{v}, M) \in \mathbf{E}_2$, g é chamado **isometria direta** se M é uma rotação. Do contrário, se M é uma reflexão, então g é chamado **isometria reversa**.

Esta nomenclatura está relacionada diretamente à orientação do sistema de coordenadas. Quando aplicada a uma base do sistema, uma isometria direta leva esta base a outra de mesma orientação. Já uma isometria reversa leva uma base positivamente orientada em uma base negativamente orientada, e vice-versa.

2.3.2 Caracterização do subgrupo O

Vamos aqui obter a forma matricial que pode ser associada a cada transformação ortogonal. Fixando uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$, temos que a cada elemento de O está associada uma matriz ortogonal, que vamos ainda denotar por M . Temos então:

Proposição 2.18. Fixada uma base ortonormal de $\mathbf{R}^2$, a matriz M associada a cada elemento de O pode assumir uma das duas seguintes formas:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

A primeira é a matriz de rotação de ângulo θ no sentido anti-horário e a segunda é a matriz de reflexão em torno de uma reta que passa pela origem e forma ângulo de $\varphi/2$ com o eixo- x .

Demonstração. Seja

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a matriz associada a um elemento qualquer de O , expressa numa base ortonormal de $\mathbf{R}^2$. Como M é ortogonal, ou seja, $MM^t = I_2$, segue que

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

A primeira e a terceira equações caracterizam circunferências de raio unitário centradas na origem. Podemos, portanto, escrever as entradas de M em termos de senos e cossenos, com um ajuste de sinais dados a partir da segunda equação, obtendo as seguintes possibilidades:

1. $a = \cos\alpha, c = -\sin\alpha, b = \sin\alpha, d = \cos\alpha$;
2. $a = \cos\alpha, c = \sin\alpha, b = -\sin\alpha, d = \cos\alpha$;
3. $a = \cos\alpha, c = \sin\alpha, b = \sin\alpha, d = -\cos\alpha$;
4. $a = -\cos\alpha, c = \sin\alpha, b = \sin\alpha, d = \cos\alpha$,

onde $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Logo, segue que a matriz ortogonal pode possuir uma das formas:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

□

Fixada a base canônica de $\mathbf{R}^2$, vamos daqui para frente usar a identificação de uma transformação linear com sua matriz para identificar o subgrupo de O com o grupo $\mathbf{O}(2)$.

2.3.3 Caracterização das isometrias do plano

Nesta subseção vamos descrever todas as possíveis isometrias do plano. Começamos com a descrição de uma lista e depois apresentamos o resultado de que estas são todas as possíveis. Para tanto, usamos a Proposição 2.18 da subseção anterior.

São isometrias do plano as seguintes transformações:

1. Translação por um vetor $\mathbf{v}$: $(\mathbf{v}, I)$;
2. Rotação de ângulo θ em torno da origem: $(\mathbf{0}, A_\theta)$;
3. Rotação de ângulo θ em torno de um ponto $\mathbf{c}$: $(\mathbf{c} - A_\theta \mathbf{c}, A_\theta)$;

Vamos justificar esta expressão: Com um apelo geométrico podemos facilmente observar que uma rotação de ângulo θ em torno de um ponto $\mathbf{c}$ leva $\mathbf{x}$ a $\mathbf{c} + A_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{c})$, mas

$$\mathbf{c} + A_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{c} + \mathbf{A}_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{c} + \mathbf{A}_\theta \mathbf{x} - \mathbf{A}_\theta \mathbf{c} = (\mathbf{c} - \mathbf{A}_\theta \mathbf{c}) + \mathbf{A}_\theta \mathbf{x}.$$

4. Reflexão em torno de uma reta que passe pela origem: $(\mathbf{0}, B_\varphi)$;
5. Reflexão em torno de uma reta l qualquer: $(2\mathbf{u}, B_\varphi)$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor perpendicular a l e cuja norma é a distância da origem a l ;

Vamos justificar essa expressão: A reflexão de um ponto $\mathbf{x}$ pela reta l pode ser realizada trasladando-se os pontos de $\mathbf{R}^2$ de $-\mathbf{u}$, de modo que a reta passe pela origem, e então refletir o novo vetor $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ em torno da reta l' resultante. Dessa forma, a reflexão é dada pela transformação

$$\mathbf{0} + B_\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = B_\varphi \mathbf{x} - B_\varphi \mathbf{u} = B_\varphi \mathbf{x} + \mathbf{u}.$$

Por fim, translada-se os pontos do plano de $\mathbf{u}$, a fim de retornar à configuração inicial. Assim, a operação completa fica descrita por

$$B_\varphi \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{u} = 2\mathbf{u} + B_\varphi \mathbf{x}.$$

6. Reflexão *glide* em uma reta l : $(2\mathbf{u} + \mathbf{w}, B_\varphi)$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor como no caso acima e $\mathbf{w}$ é um vetor não nulo tal que $B_\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$;

Vamos justificar essa expressão: Uma reflexão *glide* é uma reflexão por uma reta l qualquer, seguida de uma translação na direção paralela à de l . Enfatizamos que em nosso texto manteremos o termo vindo do inglês, que em português significa "deslizamento". O vetor $\mathbf{w}$ de translação é diretor de l , e portanto $B_\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Logo, essa isometria é descrita por

$$2\mathbf{u} + B_\varphi \mathbf{x} + \mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{w} + B_\varphi \mathbf{x}.$$

Finalmente, o resultado a seguir apresenta a lista acima como sendo a lista completa das possíveis isometrias no plano:

Proposição 2.19. *Uma isometria direta é uma translação ou uma rotação. Uma isometria reversa é uma reflexão ou uma reflexão glide.*

Prova. Veja [1, Theorem 24.1]).

3 Os grupos dos padrões no plano (*wallpaper groups*)

Agora usamos todas as ferramentas desenvolvidas nas seções anteriores para tratar do objeto principal destas notas. A intenção aqui é mostrar que existem precisamente 17 grupos que descrevem os padrões do plano bem como deduzi-los. Além disso, vamos explicitar, matematicamente e visualmente, como tais padrões são gerados a partir das operações de simetria de cada um dos 17 grupos.

Para definir o que vem a ser um grupo de papel de parede, ou um *wallpaper group*, apresentamos primeiramente a definição de grupo pontual:

Considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathbf{E}_2 &\rightarrow \mathbf{O}(2) \\ (\mathbf{v}, M) &\mapsto M, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dado pela projeção na segunda coordenada. Notemos que o núcleo de π , $\ker(\pi)$, é o subgrupo T das translações no plano, já que somente translações possuem a matriz identidade associada à transformação ortogonal, ou seja, para $\tau \in T$, $\tau = (\mathbf{v}, I)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.

Definição 3.1. *Dado um subgrupo G de $\mathbf{E}_2$, o subgrupo de $\mathbf{O}(2)$ dado pela imagem de G pelo homomorfismo π de (3.1), $J = \pi(G)$, é chamado **grupo pontual** de G .*

Definimos então:

Definição 3.2. *Um subgrupo G de $\mathbf{E}_2$ é um **grupo de papel de parede**, ou um **wallpaper group**, se seu grupo pontual $J = \pi(G)$ é finito e se, além disso, seu subgrupo das translações, $H = G \cap T$, é gerado por duas translações linearmente independentes.*

Daqui para frente, G deve sempre denotar um *wallpaper group*.

Consideremos agora a rede L dada pela órbita da origem pelo subgrupo H das translações do wallpaper group G :

$$L = \{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} : m, n, \in \mathbf{Z}\}.$$

Veja o Exemplo 2.12, onde descrevemos uma rede em detalhes. Aqui, estamos denotando por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ os dois vetores linearmente independentes.

O próximo passo agora é descrever as possíveis redes bem como os possíveis grupos pontuais que podem gerar um *wallpaper group*. Começamos com a descrição das possíveis redes:

Primeiramente, trocando $\mathbf{b}$ por $-\mathbf{b}$, se necessário, podemos supor $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$. Agora, por inspeção das normas de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, segue que as possíveis redes vão aparecer de acordo com as possíveis formas geométricas dos paralelogramos determinados por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. O resultado é então o seguinte:

1. *Oblíqua*: $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
2. *Retangular*: $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
3. *Retangular Centrada*: $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
4. *Quadrada*: $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
5. *Hexagonal*: $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$

Na Figura 1 ilustramos a representação de cada um dos cinco tipos de rede no plano.

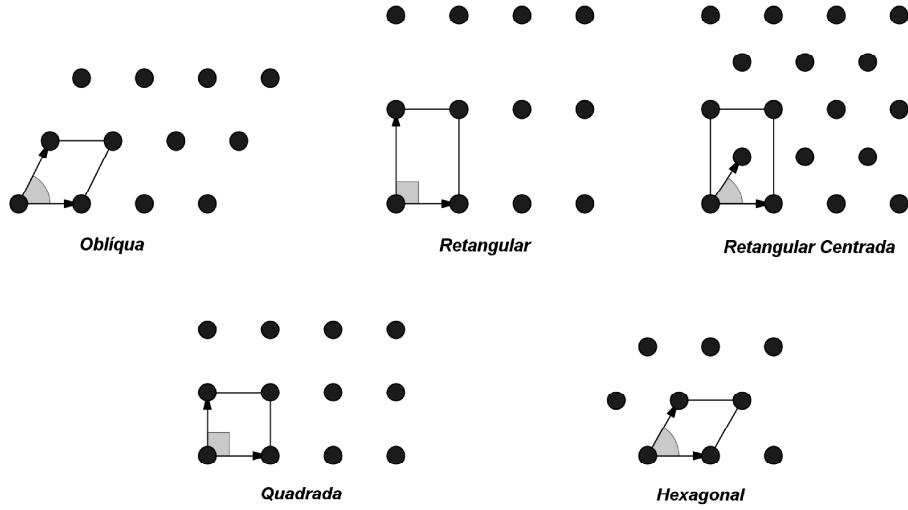


Figura 1: Tipos de rede.

Agora que já conhecemos os cinco tipos de redes originados a partir de um grupo de papel de parede, passemos à investigação dos seus possíveis grupos pontuais. Começamos com o seguinte lema:

Lema 3.3. *O grupo pontual J deixa a rede L invariante.*

Prova. Dados $M \in J$ e $\mathbf{x} \in L$, provemos que $M\mathbf{x} \in L$. Tomemos $g = (\mathbf{v}, M) \in G$, onde $\pi(g) = M$ e a translação $\tau = (\mathbf{x}, I)$. Pela própria definição de rede de um *wallpaper group*, segue que $\tau \in H$. Mas $H = \ker(\pi)$, portanto é um subgrupo normal de G . Assim, $g\tau g^{-1} \in H$. Mas este elemento é precisamente $(M\mathbf{x}, I)$ e, portanto, $M\mathbf{x} \in L$.

Temos então a caracterização dos possíveis grupos pontuais:

Proposição 3.4. *Um grupo pontual é gerado por uma rotação de um dos ângulos $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ e possivelmente por uma reflexão.*

Prova. A idéia é mostrar que a ordem de uma rotação em J pode ser 2, 3, 4 ou 6. Os detalhes desta prova aparecem em [1, Theorem 25.3]) e são baseados no seguinte: primeiro, notamos

que esta ordem é finita, pois J é por definição um subgrupo finito de $\mathbf{O}(2)$. Depois, usando argumentos geométricos, chegamos a uma contradição com a suposição de que esta ordem seja igual a 5 ou maior que 6.

Concluimos enunciando dois resultados que dão respaldo à construção dos possíveis grupos de papéis de parede a menos de isomorfismos. Estes são aqui apenas enunciados, e reportamos a [1, Theorem 25.5 e Theorem 25.6] para suas provas.

Proposição 3.5. *Um isomorfismo entre wallpaper groups leva rotações em rotações, reflexões em reflexões, translações em translações e glides em glides.*

Corolário 3.6. *Dados dois wallpaper groups, se estes são isomorfos, então pode-se afirmar que seus grupos pontuais também o são.*

Com base nos dois resultados acima, segue que o processo de construção dos possíveis *wallpaper groups* pode ser feita fixando-se o tipo da rede e, a partir daí, os possíveis grupos pontuais para cada tipo. Este é o método que utilizamos e que é apresentado em detalhes nas subseções abaixo.

Antes, vamos explicar a nomenclatura e o esquema geométrico que são usados aqui.

1. **Nomenclatura.** Vamos adotar uma nomenclatura específica para identificar cada um dos padrões, seguindo a notação clássica da literatura:

- Em relação à rede, usamos a letra **p** para indicar que se trata de uma **célula primitiva**. O termo "primitiva" se dá pelo paralelogramo básico não conter pontos da rede em seu interior. São desta forma os paralelogramos básicos das redes oblíqua, retangular, quadrada e hexagonal. Usamos a letra **c** para indicar que se trata de uma **célula centrada**. Neste caso, há um ponto da rede no centro do paralelogramo básico. São desta forma os paralelogramos da rede retangular centrada.

Após a descrição de todos os *wallpaper groups* da Seção 3, fazemos na Observação 3.7 mais um comentário sobre a nomenclatura.

- Em relação às isometrias fundamentais para a constituição do padrão, uma reflexão é simbolizada pela letra m (do inglês *mirror*) enquanto o símbolo de reflexão *glide* é g . A existência de uma rotação de uma das ordens 1 (identidade), 2, 3, 4 ou 6, é indicada pela presença deste respectivo número. (Notemos que se na nomenclatura de um padrão consta um desses números, então este padrão contém também as rotações de menor ordem das quais n é múltiplo.)

2. **Representação geométrica.** Para cada grupo vamos apresentar duas figuras, uma com seu paralelogramo básico e outra com a reprodução no plano de sua célula fundamental. O paralelogramo básico deverá conter símbolos que representem centros de rotação ou direções de reflexões ou *glides*, conforme a tabela da Figura 2.

O **paralelogramo básico** é formado a partir dos vetores **a** e **b** geradores da rede, que foram escolhidos de forma que **a** seja paralelo ao eixo- x , "ligando" dois pontos consecutivos da rede. O vetor **b** é então construído a partir de **a** seguindo um dos cinco tipos descritos anteriormente.

Rotação de ordem 2 (180°)	
Rotação de ordem 3 (120°)	
Rotação de ordem 4 (90°)	
Rotação de ordem 6 (60°)	
Espelho (Reflexão)	
Linha de reflexão glide	

Figura 2: Símbolos esquemáticos representativos das simetrias dos padrões

Nas reproduções geométricas de cada grupo, posicionamos a letra **P** no plano a partir de uma célula unitária geradora do padrão. Daí, reproduzimos esta célula a partir dos elementos do grupo, preenchendo todo o plano. Esta célula unitária é também denominada **célula fundamental**.

Apresentamos o estudo dos padrões nas cinco subseções seguintes, correspondentes aos cinco tipos possíveis de redes. Em cada parte, os sub-casos vão aparecendo de acordo com todos os subgrupos pontuais J de $\mathbf{O}(2)$ que preservam a rede, partindo do menor (em número de elementos) para o maior, com uma ressalva: não serão repetidos os subgrupos que gerem um *wallpaper group* que já tenha aparecido anteriormente.

3.1 Rede Oblíqua

As transformações ortogonais que preservam a rede são $\{I, -I\}$. Assim, os possíveis subgrupos pontuais são o subgrupo trivial $\{I\}$ ou todo $\{I, -I\}$.

3.1.1 p1:

Supomos aqui $J = \{I\}$. Assim, não há rotações ou reflexões, apenas translações. Logo, os elementos de **p1** são todos do tipo

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I) \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

O paralelogramo básico deste grupo e sua reprodução no plano a partir de uma célula fundamental aparecem na Figura 3.

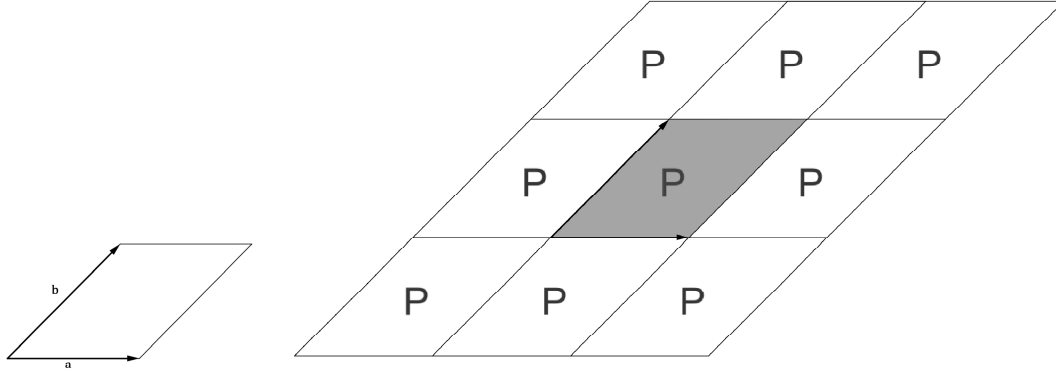


Figura 3: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p1**.

3.1.2 p2:

Supomos agora $J = \{I, -I\}$. Relativamente ao caso anterior inclui-se em J a rotação de ordem 2 (de ângulo π). Sem perda de generalidade, podemos escolher a origem do sistema de coordenadas de tal modo que $(\mathbf{0}, -I) \in G$. Vamos analisar os elementos de G através das suas classes laterais. São elas: H , $H(\mathbf{0}, -I)$.

- *Elementos de H :*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I) \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

- *Elementos de $H(\mathbf{0}, -I)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{0}, -I) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I) \quad m, n \in \mathbf{Z},$$

que representam rotações de π em torno de um ponto $\mathbf{c}$ do plano. Dos resultados da Subseção 2.3.3, escrevemos

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I) = (\mathbf{c} - (-I\mathbf{c}), -I) = (2\mathbf{c}, -I).$$

Logo, $2\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, ou seja, $\mathbf{c} = \frac{m}{2}\mathbf{a} + \frac{n}{2}\mathbf{b}$ são centros de rotação de ordem 2.

O paralelogramo básico deste grupo e sua reprodução no plano a partir de uma célula fundamental aparecem na Figura 4.

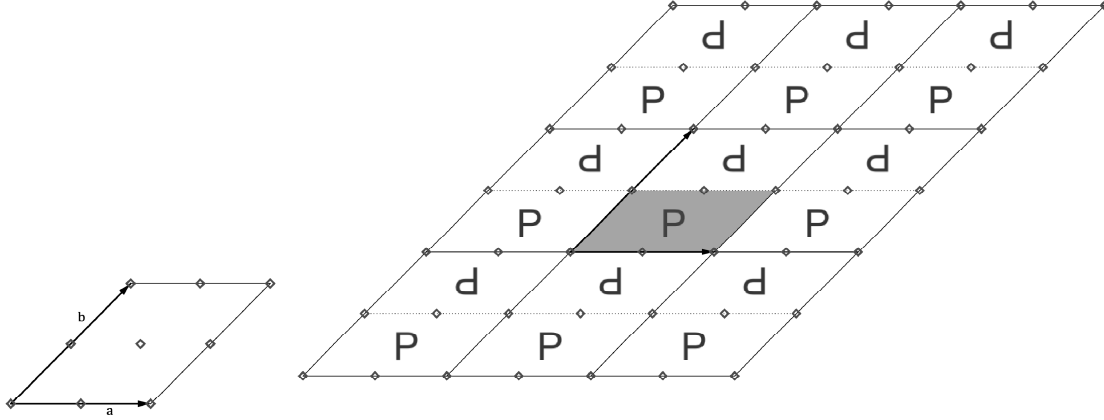


Figura 4: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p2**.

3.2 Rede Retangular

As transformações ortogonais que preservam a rede são $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$.

3.2.1 pm:

Supomos aqui $J = \{I, B_0\}$. Suponhamos ainda que $(0, B_0) \in G$. Não há rotações não-triviais em J . Fixemos, sem perda de generalidade, a origem do sistema de coordenadas como um ponto da rede.

Notemos que um grupo que tivesse $J = \{I, B_\pi\}$ seria isomorfo a este em questão, pois as reflexões só deixariam de ser em retas horizontais e passariam a ser em retas verticais. Em uma analogia informal, isto é semelhante a rotacionarmos a visualização de $\pi/2$.

Há duas classes laterais: $H, H(\mathbf{0}, B_0)$. Os elementos de H são translações, como explicitado no caso anterior.

A partir de agora, cada grupo mais complexo tende a ser um complemento de grupos mais simples. Dessa forma, acontecerá várias vezes de um subgrupo de G aparecer em dois padrões diferentes. Nesse caso, não há necessidade de mostrar seus elementos repetidamente.

- *Elementos de $H(\mathbf{0}, B_0)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{0}, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0) \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Estes elementos podem ser reflexões em um espelho horizontal ou *glides* em retas horizontais. De fato:

1. Se $m = 0$, então temos reflexões. Neste caso, das expressões das isometrias dadas na Subseção 2.3.3,

$$(n\mathbf{b}, B_0) = (2\mathbf{u}, B_0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{n\mathbf{b}}{2}.$$

Ou seja, as reflexões ocorrem em espelhos horizontais distantes entre si de múltiplos de $\mathbf{b}/2$.

2. Se $m \neq 0$, então temos *glides*:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0) = (\mathbf{w} + 2\mathbf{u}, B_0),$$

ou seja,

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{n\mathbf{b}}{2} \text{ e } \mathbf{w} = \mathbf{a}.$$

Logo, temos *glides* em retas horizontais separadas entre si de múltiplos de $\mathbf{b}/2$ e com translação de múltiplos de $\mathbf{a}$.

O paralelogramo básico deste grupo e sua reprodução no plano a partir de uma célula fundamental aparecem na Figura 5.

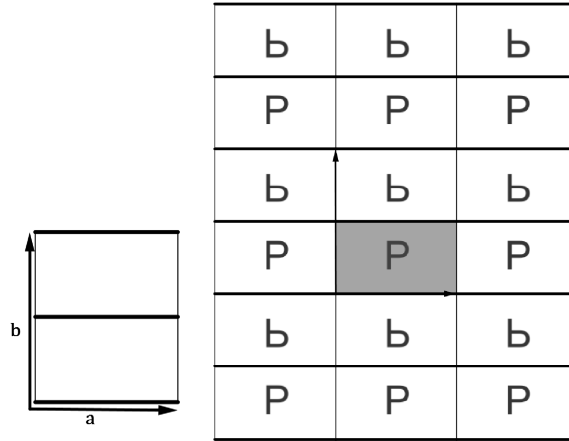


Figura 5: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **pm**.

3.2.2 pg:

Novamente tomamos $J = \{I, B_0\}$, mas agora supomos que $(0, B_0) \notin G$. Isto significa que B_0 é imagem por uma *glide* g pela projeção dada em (3.1). Neste caso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a origem do sistema de coordenadas é um ponto da rede e que a reta desta *glide* é paralela ao eixo- x , ou seja, $g = (\alpha\mathbf{a}, B_0)$, para algum $\alpha \in \mathbf{Z}$. Mas como g é uma *glide*, temos g^2 uma translação e então podemos escrever $g^2 = (k\mathbf{a}, I)$, para algum $k \in \mathbf{Z}$, e então

$$(\alpha\mathbf{a}, B_0)(\alpha\mathbf{a}, B_0) = (k\mathbf{a}, I),$$

ou seja, $\alpha = k/2$.

Se k fosse par, então $(-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, I)$ seria uma translação em G e então

$$(0, B_0) = (-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, I)(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

seria um elemento de G , contrariando a hipótese inicial.

Logo, k é ímpar e então $(-\frac{1}{2}(k-1)\mathbf{a}, I)$ é uma translação de G e

$$(-\frac{1}{2}(k-1)\mathbf{a}, I)(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0).$$

Portanto, $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0) \in G$.

Segue assim que as classes laterais são H e $H(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$.

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0) = ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0), m, n \in \mathbf{Z},$$

que são todas *glides* horizontais.

Como analisado na Subseção 2.3.3, uma reflexão *glide* é do tipo $(2\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}, B_\varphi)$, onde $\bar{\mathbf{a}}$ é o vetor perpendicular ao eixo de reflexão glide e $\bar{\mathbf{b}}$ é o vetor paralelo a esse eixo, sendo então o vetor de translação da *glide*. Dessa maneira,

$$\bar{\mathbf{b}} = (m + \frac{1}{2})\mathbf{a} = \alpha \frac{1}{2}\mathbf{a}, \alpha \in \mathbf{Z}$$

$$2\bar{\mathbf{a}} = n\mathbf{b} \Rightarrow \bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}n\mathbf{b}$$

Ou seja, as *glides*, com translação de múltiplos de $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, têm como eixos retas horizontais, distantes entre si de múltiplos de $\mathbf{b}/2$. Ficamos, assim, com as representações esquemáticas dadas na Figura 6.

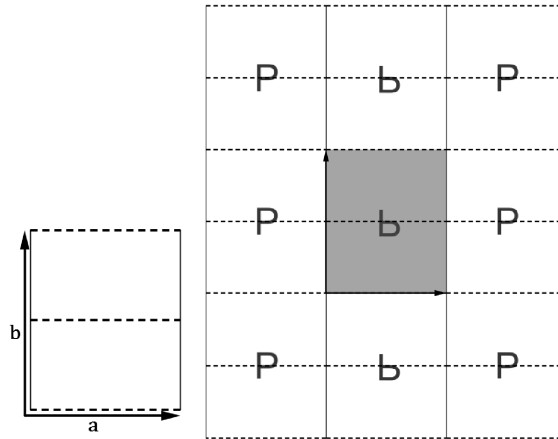


Figura 6: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo $\mathbf{pg}$.

3.2.3 p2mm:

Tomemos agora $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Supomos aqui que $(0, B_0), (0, B_\pi) \in G$, ou seja, que G contém reflexões com relação ao eixo- x e ao eixo- y . Vamos tomar a origem como um ponto da rede dado pela intersecção dos espelhos de reflexão. Logo $(0, -I) = (0, B_0)(0, B_\pi) \in G$.

O estudo das classes laterais que compõem G se restringe, portanto, ao estudo de $H(0, -I)$, uma vez que a classe lateral associada a I é H , das translações, a classe lateral $H(0, B_0)$ já foi estudada no caso anterior e a classe lateral $H(0, B_\pi)$ possui estrutura análoga à anterior, com a diferença que os espelhos, nesse caso, estão na vertical. Assim, temos

- *Elementos de $H(0, -I)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, -I) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I) = (\mathbf{c} - (-I)\mathbf{c}, -I)$$

$$\Rightarrow 2\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}$$

O que nos dá centros de rotação de ordem 2.

Representa-se geometricamente este grupo como na Figura 7.

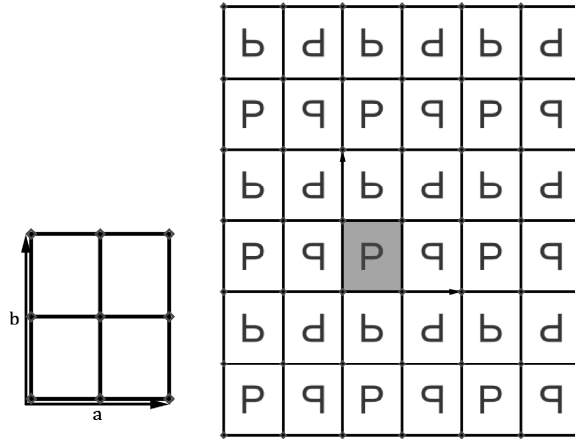


Figura 7: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p2mm**.

3.2.4 p2mg:

Aqui novamente $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, mas agora supomos que haja uma reflexão num espelho horizontal mas não num espelho vertical. Lembramos que o caso isomorfo a esse seria a existência de reflexões em espelhos verticais mas não em horizontais.

Assim B_π é imagem de uma *glide* pela projeção dada em (3.1). Escolhendo a origem como a intersecção de um espelho horizontal e uma linha de *glide* vertical segue que $(0, B_0), (\mathbf{b}/2, B_\pi) \in G$. Logo

$$(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)(0, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I) \in G,$$

onde $(\mathbf{b}/2, -I)$, como já visto, é uma rotação de π em torno de um ponto $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} - (-I)\mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{c} = 2\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} = \frac{1}{4}\mathbf{b}.$$

Desta forma, as classes laterais de G são H , $H(0, B_0)$, $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$, $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$.

- *Elementos de $H(0, B_0)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0).$$

Quando $m = 0$, temos reflexões em espelhos horizontais; quando $m \neq 0$, temos *glides* horizontais com translações de múltiplos de $\mathbf{a}$.

- *Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi) = (m\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_\pi),$$

que são *glides* em eixos verticais e translações de múltiplos de $\mathbf{b}/2$.

- *Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I) = (m\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, -I)$$

que são rotações em torno dos centros de rotação de ordem 2 dados por

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

A representação geométrica deste grupo aparece na Figura 8.

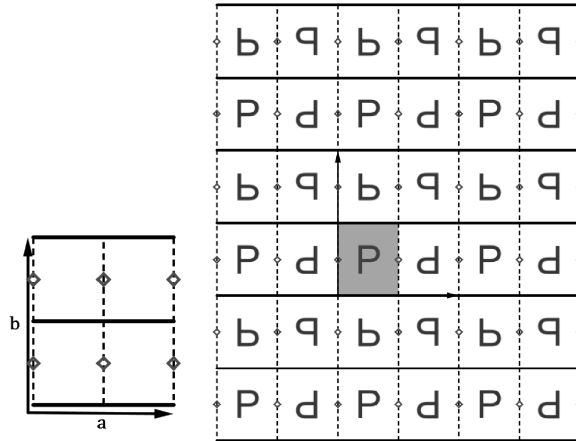


Figura 8: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p2mg**.

3.2.5 p2gg:

Neste caso ainda temos $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, mas agora não há reflexões em G . Então B_0 e B_π são dados como projeções de *glides* pelo homomorfismo (3.1). Agora, escolhamos a origem como a intersecção das duas retas de *glide*, e a partir da mesma dedução da representação de *glide* feita para **(pg)**, concluimos que $(\mathbf{a}/2, B_0), (\mathbf{b}/2, B_\pi) \in G$. Ainda,

$$(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}, -I) \in G.$$

Assim, temos as seguintes classes laterais: $H, H(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0), H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi), H(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}, -I)$. Só apresentamos aqui os cálculos para a última delas, já que as outras foram estudadas em casos anteriores.

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}, -I)$:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}, -I) = ((m - \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, -I),$$

que são rotações de π em torno de um ponto $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} - (-I)\mathbf{c} = (m - \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b},$$

ou seja,

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}(m - \frac{1}{2})\mathbf{a} + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

A representação geométrica deste caso é dada na Figura 9 :

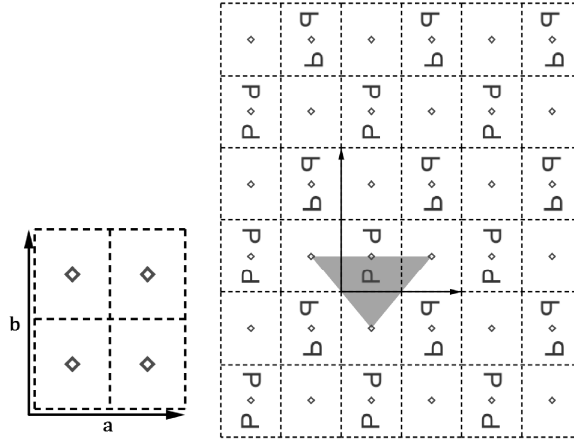


Figura 9: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p2gg**.

3.3 Rede Retangular Centrada

As transformações ortogonais que preservam este tipo de rede são $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$.

3.3.1 cm:

Suponhamos $J = \{I, B_0\}$ com $(\mathbf{v}, B_0) \in G$. Então $(\mathbf{v}, B_0)$ é ou uma reflexão num espelho horizontal (se $\mathbf{v} = 0$) ou uma *glide* numa reta horizontal (se $\mathbf{v} \neq 0$). Notemos aqui que $\mathbf{v}$ é múltiplo de $\mathbf{a}$.

Observemos que a direção vertical é dada por $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Suponhamos $2\mathbf{v} = k\mathbf{a}$.

- Se k é par:

$$\left(\frac{-1}{2}k\mathbf{a}, I\right)\left(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0\right) = (0, B_0) \in G,$$

e então a classe lateral $H(0, B_0)$ contém elementos que não são translações. Um elemento de G dessa classe é do tipo

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0).$$

Reescrevendo em termos das direções vertical e horizontal,

$$\left(\left(m + \frac{n}{2}\right)\mathbf{a} + \frac{n}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0\right) \in G, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Façamos uma análise: Se n é ímpar e $m = -n/2$, então temos reflexões em espelhos que distam de $\frac{n}{4}(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$ entre si. Se n é par e $m \neq -n/2$, então temos *glides* com translações de múltiplos de $\mathbf{a}$.

Se n é ímpar, também temos *glides* com translações de múltiplos de $\mathbf{a}/2$. Neste último caso, as retas de *glide* (horizontais) passam por entre os pontos da rede.

- Se k é ímpar:

$$\left(\frac{-1}{2}(k+1)\mathbf{a} + \mathbf{b}, I\right)\left(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0\right) = \left(\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0\right) \in G,$$

que nada mais é que uma reflexão. Recaímos então novamente no caso anterior, apenas com uma nova posição da origem.

Como já encontramos as *glides* possíveis, não é necessário considerar uma situação em que $2\mathbf{v} \neq k\mathbf{a}$. O desenvolvimento deste caso leva a resultados iguais aos já encontrados.

A representação geométrica deste grupo aparece na Figura 10.

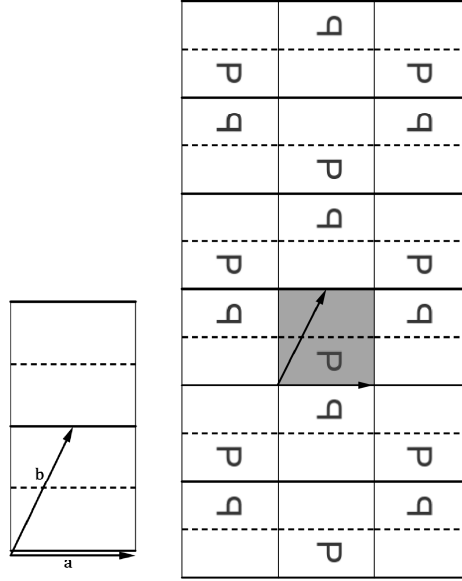


Figura 10: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **cm**.

3.3.2 **c2mm**:

Tomemos agora $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Com cálculos análogos aos casos anteriores, concluímos que necessariamente $(0, B_0), (0, B_\pi) \in G$.

É necessário agora analisar as simetrias desenvolvidas através de B_π , digamos por $(\mathbf{v}, B_\pi)$. Se $2\mathbf{v} = k(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$, então:

- Se k é par:

$$\left(-\frac{1}{2}k(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), I\right) \left(\frac{1}{2}k(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_\pi\right) = (0, B_\pi) \in G.$$

Assim, os elementos da classe lateral $H(0, B_\pi)$ são do tipo

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_\pi) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_\pi) = \left((m + \frac{n}{2})\mathbf{a} + \frac{n}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_\pi\right),$$

que representam reflexões ou *glides* verticais, com configurações análogas às horizontais já encontradas no caso anterior.

- Se k é ímpar: Chegamos ao mesmo resultado obtido acima, executando operações similares.

Falta apenas encontrar os centros de rotação. Como $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_\pi), (\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0) \in G$, então

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_\pi\right)\left(\frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0\right) = (\mathbf{b}, -I) \in G.$$

Este elemento de G dá origem à classe lateral $H(\mathbf{b}, -I)$, cujos elementos representam centros de rotação de ordem 2, do tipo

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{b}, -I) = (m\mathbf{a} + (n+1)\mathbf{b}, -I).$$

Para encontrar os pontos $\mathbf{c}$ que localizam os centros de rotação, usamos o procedimento já conhecido:

$$(\mathbf{c} - (-I)\mathbf{c}, -I) = (m\mathbf{a} + (n+1)\mathbf{b}, -I) \Rightarrow 2\mathbf{c} = m\mathbf{a} + (n+1)\mathbf{b}.$$

Em termos das direções vertical e horizontal, temos

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}(n+1)\right)\mathbf{a} + \frac{1}{4}(n+1)(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Assim, a representação geométrica deste grupo é dada na Figura 11.

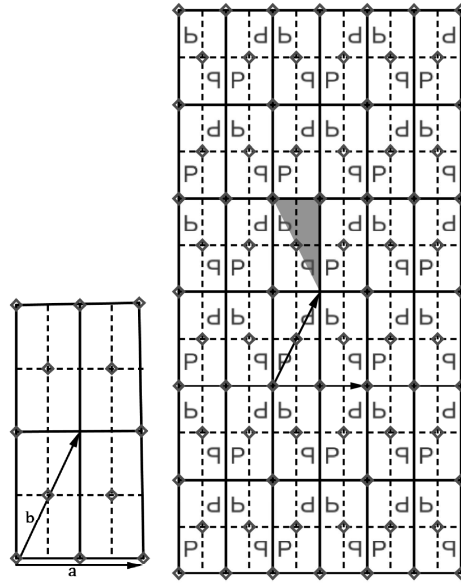


Figura 11: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo $\mathbf{c2mm}$.

3.4 Rede Quadrada

Neste caso, as transformações ortogonais que preservam a estrutura da rede são as do grupo diedral de ordem 8, $\mathbf{D}_4 = \{I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\pi}, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$.

3.4.1 p4:

Tomemos aqui $J = \{I, A_{\frac{\pi}{2}}, (A_{\frac{\pi}{2}})^2, (A_{\frac{\pi}{2}})^3\}$, que apresenta somente as simetrias de rotação do quadrado. Tomamos a origem como um elemento da rede e temos, desta forma, $(0, A_{\frac{\pi}{2}}) \in G$, assim como $(0, A_{\pi})$, $(0, A_{\frac{3\pi}{2}}) \in G$. Temos então as quatro classes laterais de G : H , $H(0, A_{\frac{\pi}{2}})$, $H(0, A_{\pi})$, $H(0, A_{\frac{3\pi}{2}})$, sendo que os elementos de G que não são translações se encontram nas três últimas. Passamos agora à análise desses referidos elementos, através das classes laterais de G (excluindo a classe lateral H , das translações).

- Elementos de $H(0, A_{\frac{\pi}{2}})$:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, A_{\frac{\pi}{2}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, A_{\frac{\pi}{2}})$$

Estes elementos são rotações de ordem 4 em torno de um ponto $\mathbf{c}$, onde

$$(\mathbf{c} - A_{\frac{\pi}{2}}\mathbf{c}, A_{\frac{\pi}{2}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, A_{\frac{\pi}{2}}).$$

Os cálculos derivados da igualdade acima revelam que

$$\mathbf{c} = \frac{m-n}{2}\mathbf{a} + \frac{m+n}{2}\mathbf{b}, \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

- *Elementos de $H(0, (A_{\frac{\pi}{2}})^2)$* : Como $(A_{\pi} = -I)$, os elementos são

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I) = (\mathbf{c} - (-I)\mathbf{c}, -I) = (2\mathbf{c}, -I),$$

e então

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}, \quad m, n \in \mathbf{Z}$$

são centros de rotação de ordem 2.

- *Elementos de $H(0, A_{\frac{3\pi}{2}})$* : Como $A_{\frac{3\pi}{2}} = A_{\pi}A_{\frac{\pi}{2}}$, então os elementos dessa classe lateral são composições dos elementos das classes anteriores.

Com estes resultados podemos construir a representação geométrica do grupo, dada na Figura 12.

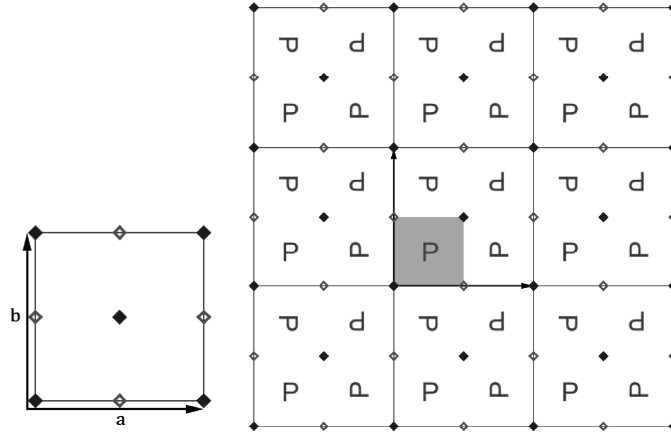


Figura 12: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p4**.

3.4.2 p4mm:

Aqui, $J = D_4 = \{I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\pi}, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$. Assumimos $(0, B_0) \in G$. Desta maneira, verificam-se neste grupo todas as simetrias do quadrado.

Realizando o mesmo procedimento utilizado como para o grupo **p4**, encontra-se os mesmo centros de rotação, tanto os de ordem 2 como os de ordem 4. Resta apenas localizar os eixos de reflexões e *glides*. Temos que

$$(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, B_0) = (0, B_{\frac{\pi}{2}}) \in G,$$

$$(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, B_0) = (0, B_{\pi}) \in G,$$

$$(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, A_{\frac{\pi}{2}})(0, B_0) = (0, B_{\frac{3\pi}{2}}) \in G.$$

Assim, as oito classes laterais deste grupo são: H , $H(0, A_{\frac{\pi}{2}})$, $H(0, A_{\pi})$, $H(0, A_{\frac{3\pi}{2}})$, $H(0, B_0)$, $H(0, B_{\frac{\pi}{2}})$, $H(0, B_{\pi})$, $H(0, B_{\frac{3\pi}{2}})$. Vamos estudar os elementos apenas das quatro últimas separadamente, pois as primeiras já foram tratadas no grupo anterior.

- *Elementos de $H(0, B_0)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0).$$

Estes elementos podem ser reflexões ou *glides*:

1. $m = 0$: reflexões em eixos horizontais, distantes de $n/2\mathbf{b}$ da origem;
2. $m \neq 0$: *glides* em eixos horizontais distantes de múltiplos de $1/2\mathbf{b}$ da origem e com translações de múltiplos de $\mathbf{a}$.

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{\pi}{2}})$:*

$$\text{Como } A_{\frac{\pi}{2}}B_0 = B_{\frac{\pi}{2}},$$

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{\pi}{2}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}) = \left(\frac{m+n}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{n-m}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Dois casos são possíveis:

1. $m = -n$: reflexões em eixos inclinados de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo horizontal, distantes entre si de múltiplos de $\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$;
2. $m \neq -n$: *glides* com eixos angulados de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo horizontal, separados entre si de $\frac{n-m}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ e com translações de $\frac{m+n}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

- *Elementos de $H(0, B_{\pi})$:*

$$\text{Como } A_{\pi}B_0 = B_{\pi},$$

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\pi}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\pi}).$$

Novamente, temos duas situações:

1. $n = 0$: reflexões em eixos verticais, que distam entre si de múltiplos de $\frac{1}{2}\mathbf{a}$;
2. $n \neq 0$: *glides* também em eixos verticais, distantes entre si de múltiplos de $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ e com translação de múltiplos de $\mathbf{b}$.

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{3\pi}{2}})$:*

$$\text{Como } A_{\frac{3\pi}{2}}B_0 = B_{\frac{3\pi}{2}},$$

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{3\pi}{2}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}}) = \left(\frac{m+n}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{n-m}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\frac{3\pi}{2}}\right).$$

Dois casos devem ser considerados:

1. $m = n$: reflexões em eixos inclinados de $\frac{3\pi}{4}$ com o eixo horizontal e distantes entre si de $\frac{m+n}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

2. $m \neq n$: *glides* em eixos inclinados de $\frac{3\pi}{4}$ com o eixo horizontal, distantes entre si de $\frac{m+n}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e com translações de $\frac{n-m}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Este grupo possui, portanto, a representação geométrica como dada na Figura 13.

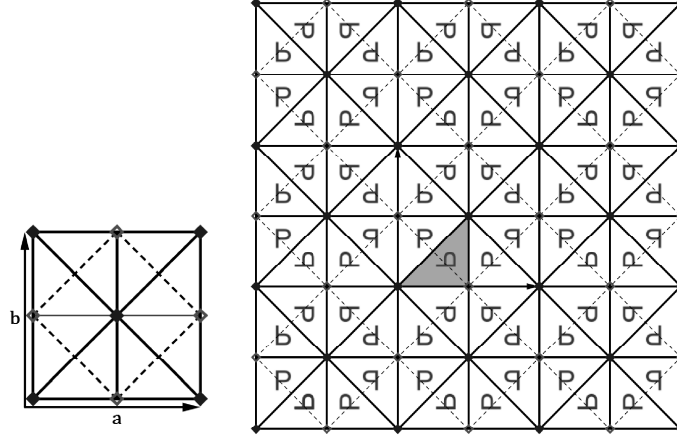


Figura 13: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p4mm**.

3.4.3 p4gm:

Aqui novamente $J = D_4 = \{I, A_{\frac{\pi}{2}}, A_{\pi}, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\pi}, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$, mas assumimos que B_0 não é desenvolvido por meio de reflexões em G . Como sempre, devemos encontrar as classes laterais que compõem G , de modo a compreender qual a ação de seus elementos. Para isso, é preciso conhecer-se elementos do grupo associados a cada uma das matrizes do grupo pontual. Fixemos um centro de rotação de ordem 4 como origem, o que não causa restrições à análise. Então $(0, A_{\frac{\pi}{2}}) \in G$. Seja $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)$ o elemento que realiza B_0 em G . Notemos que $\lambda \neq 0$, pois da hipótese inicial, este elemento não é uma reflexão (caso anterior), e portanto deve ser uma *glide*. Por se tratar de uma *glide*, temos

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (2\lambda\mathbf{a}, I) \in G$$

que representa uma translação.

Se 2λ é par, então λ é um número inteiro e $(-\lambda\mathbf{a}, I) \in G$ também é uma translação. Contudo, se isso é verdade,

$$(-\lambda\mathbf{a}, I)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (\mu\mathbf{b}, B_0) \in G.$$

Mas esta descreve uma reflexão, contradizendo a hipótese inicial. Logo, 2λ é ímpar (e λ não é um número inteiro) e assim

$$((\frac{1}{2} - \lambda)\mathbf{a}, I)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) \in G.$$

Além disso,

$$(0, A_{\frac{\pi}{2}})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}}) \in G$$

e

$$(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}})^2 = ((\frac{1}{2} - \mu)\mathbf{a} + \mathbf{b}, I) \in G.$$

Este elemento é uma translação e como só é possível que os coeficientes que multiplicam os vetores, ou componentes, de translação sejam números inteiros, então $(\frac{1}{2} - \mu) \in \mathbf{Z}$. Portanto, μ não é um racional não inteiro. Sendo assim, a *glide*

$$((\frac{1}{2} - \mu)\mathbf{b}, I)(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0)$$

pertence a G .

Já temos 6 elementos básicos, que dão origem às seis classes laterais que compõem G . São eles: $(0, I), (0, A_{\frac{\pi}{2}}), (0, A_{\pi}), (0, A_{\frac{3\pi}{2}}), (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0), (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}})$. Como J possui 8 elementos, faltam dois. Com o mesmo procedimento utilizado anteriormente, mostramos que $(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\pi}), (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}}) \in G$.

Com isso, as oito classes laterais que compõem G são: $H, H(0, A_{\frac{\pi}{2}}), H(0, A_{\pi}), H(0, A_{\frac{3\pi}{2}}), H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0), H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}), H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\pi}), H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}})$

As quatro primeiras representam os mesmo centros de rotação (de ordens 2 e 4) de **p4** e **p4mm**. Falta fazer a análise das restantes:

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0)$:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0) = ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_0),$$

que representam *glides* em eixos horizontais, separados de $\frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}$ e com translações de $(m + \frac{1}{2})\mathbf{a}$.

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}})$:

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}) &= ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}) \\ &= (\frac{1}{2}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(n - m)(\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\frac{\pi}{2}}). \end{aligned}$$

1. Se $(m + n + 1) \neq 0$: *glides* com eixos inclinados de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo horizontal, separadas entre si de $\frac{1}{4}(n - m)(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ e com translações de $\frac{1}{2}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$;
2. Se $(m + n + 1) = 0$: reflexões em eixos também inclinados de $\frac{\pi}{4}$ com o eixo horizontal, separados entre si de $\frac{1}{4}(n - m)(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\pi})$:

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\pi}) = ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_{\pi}),$$

que são *glides* com eixos verticais, separados entre si de $\frac{1}{2}(m + \frac{1}{2})\mathbf{a}$ e com translações de $(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}$.

- Elementos de $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}})$:

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}) &= ((m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}}) \\ &= (\frac{1}{2}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2}(n - m)(\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\frac{3\pi}{2}}) \end{aligned}$$

1. Se $n = m$: reflexões em eixos que formam ângulo de $3\pi/4$ com o eixo horizontal, distantes entre si de $\frac{1}{4}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
2. Se $n \neq m$: *glides* em eixos formando ângulo de $3\pi/4$, distando $\frac{1}{4}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ entre si. Estas *glides* têm translações de $\frac{1}{2}(n - m)(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

A união de todas estas classes laterais compõem o grupo G com ocorrência de translações, reflexões, *glides* e rotações. Para ilustrar as propriedades de simetria deste grupo, é utilizada a representação geométrica na Figura 14.

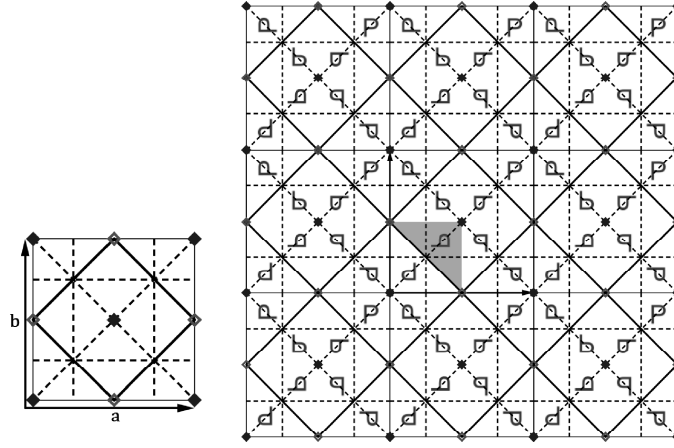


Figura 14: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p4gm**.

3.5 Rede Hexagonal

Para este caso, as transformações ortogonais que preservam a estrutura da rede estão presentes no grupo diedral de ordem 12, $\mathbf{D}_6 = \{I, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}, B_0, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\pi}, B_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$. Podemos dividir os grupos desse tipo de rede em duas classes: aquela em que J só contém transformações ortogonais que levam a rotações de ordem 3, e a que apresenta grupo pontual cujas transformações ortogonais a ele pertencentes descrevem rotações de ordens 3 e 6. Começamos com a primeira classe:

3.5.1 **p3**:

Aqui temos $J = \{I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}\}$. Podemos escolher a origem do sistema de coordenadas de tal maneira que $(0, A_{\frac{2\pi}{3}}), (0, A_{\frac{4\pi}{3}}) \in G$. Com isto, temos todas as classes laterais deste grupo: H , $H(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$, $H(0, A_{\frac{4\pi}{3}})$. Analisando a composição de cada classe lateral:

- *Elementos de $H(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, A_{\frac{2\pi}{3}})$$

Estes são centros de rotações de ordem 3. Tendo em vista que a direção vertical é dada por $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e que $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|$, o desenvolvimento deste último par ordenado revela que os centros de rotação $\mathbf{c}$ estão localizados da seguinte maneira:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{6}(m + 2n)(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

- *Elementos de $H(0, A_{\frac{4\pi}{3}})$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, A_{\frac{4\pi}{3}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, A_{\frac{4\pi}{3}}), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Também aqui temos centros de rotação de ordem 3, porém em posições diferentes dos anteriores. Com o mesmo procedimento empregado acima, o desenvolvimento do par $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, A_{\frac{4\pi}{3}})$ leva a centros de rotação da forma

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}(m + n)\mathbf{a} + \frac{1}{6}(n - m)(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Já temos agora todos os elementos de G e podemos então construir uma representação como dada na Figura 15.

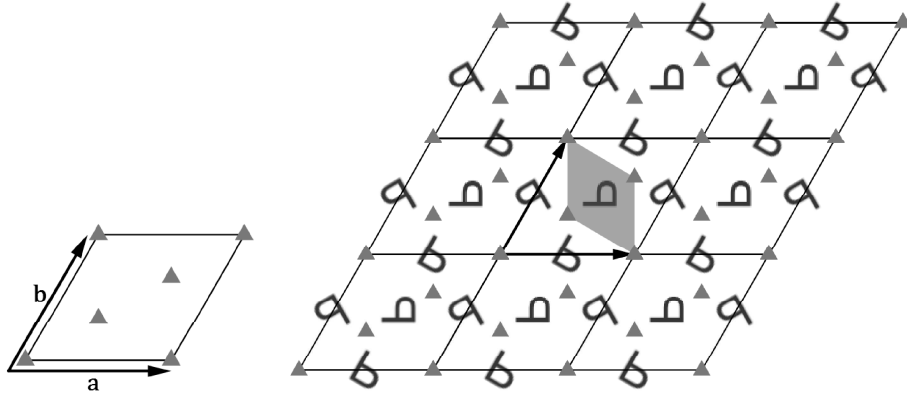


Figura 15: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo $\mathbf{p3}$.

3.5.2 $\mathbf{p3m1}$:

Agora assumimos $J = \mathbf{D}_3 = \{I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_0, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{4\pi}{3}}\}$, grupo de simetrias do triângulo equilátero. Devido às matrizes de rotação do grupo pontual serem as mesmas do caso anterior, os centros de rotação são os mesmos aqui.

Assumimos aqui que $(0, B_0) \in G$. Desta forma,

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(0, B_0) = (0, B_{\frac{2\pi}{3}}) \in G,$$

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(0, B_0) = (0, B_{\frac{4\pi}{3}}) \in G,$$

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) = (0, A_{\frac{4\pi}{3}}) \in G.$$

Com isso, as classes laterais que compõem G são: H , $H(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$, $H(0, A_{\frac{4\pi}{3}})$, $H(0, B_0)$, $H(0, B_{\frac{2\pi}{3}})$, $H(0, B_{\frac{4\pi}{3}})$. Apenas é necessário fazer a análise das três últimas classes laterais:

- *Elementos de $H(0, B_0)$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0)$$

Em termos das direções vertical $(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$ e horizontal $(\mathbf{a})$:

$$((m + \frac{1}{2}n)\mathbf{a} + \frac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0).$$

Analisando:

1. Se $m = -n/2$, então temos reflexões em eixos horizontais, distantes entre si de $\frac{1}{4}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Notemos que isso só vale para n par, já que $m \in \mathbf{Z}$;
2. Se $m \neq -n/2$, os pares ordenados representam *glides* em eixos horizontais distantes entre si de $\frac{1}{4}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$, n não necessariamente par, e com translações de $(m + \frac{1}{2}n)\mathbf{a}$.

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{2\pi}{3}})$:*

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{2\pi}{3}}) &= (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{2\pi}{3}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{2\pi}{3}}) \\ &= (\frac{1}{2}m(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\frac{1}{2}m + n)\mathbf{b}, B_{\frac{2\pi}{3}}). \end{aligned}$$

O vetor $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{b}$. Assim, a seguinte análise é feita:

1. Se $m = -2n$, o par acima representa reflexões em eixos inclinados de $\pi/3$ com o eixo horizontal, distantes entre si de $\frac{1}{4}m(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$;
2. Se $m \neq -2n$, temos *glides*, com eixos tais quais os de reflexões descritos logo acima, e com translações de $(\frac{1}{2}m + n)\mathbf{b}$.

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{4\pi}{3}})$*

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{4\pi}{3}}) &= (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{4\pi}{3}}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{4\pi}{3}}) \\ &= (\frac{1}{2}m(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\frac{1}{2}m + n)\mathbf{b}, B_{\frac{4\pi}{3}}). \end{aligned}$$

1. Se $m = 0$, temos reflexões em eixos inclinados de $2\pi/3$ com o eixo horizontal, distando entre si de $(\frac{1}{4}m + \frac{1}{2}n)\mathbf{b}$;
2. Se $m \neq 0$, os pares indicados representam *glides* com eixos dispostos da mesma maneira que os de reflexões, com translações de $\frac{1}{2}m(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

Isso finaliza a descrição dos elementos desse grupo, e assim, obtém-se a representação geométrica deste grupo como na Figura 16

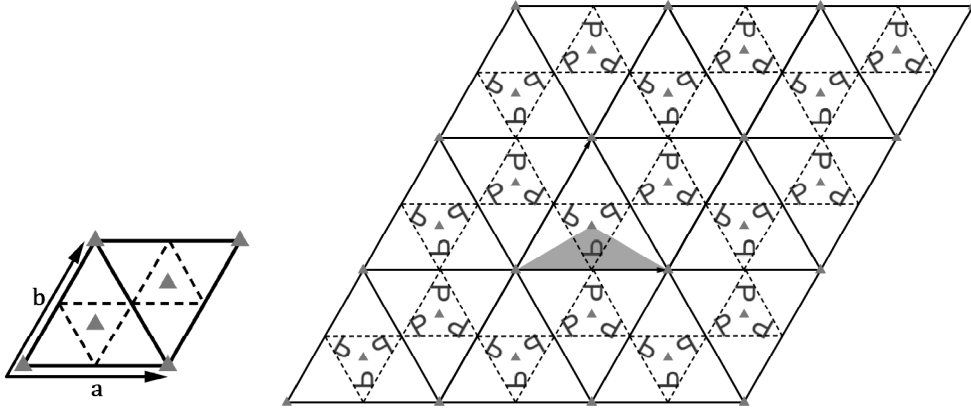


Figura 16: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p3m1**.

3.5.3 p3m1

Tomemos agora o subgrupo pontual como sendo $J = \tilde{\mathbf{D}}_3 = \{I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\pi}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$. Notemos que este é também grupo de simetrias de um triângulo equilátero, como no caso anterior. Mais precisamente, enquanto $\mathbf{D}_3$ é o grupo das simetrias do triângulo com um dos vértices sobre o eixo- x , $\tilde{\mathbf{D}}_3$ dá as simetrias do triângulo cujos vértices são os pontos médios daquele triângulo.

Como usual, escolhemos a origem do sistema de coordenadas localizada em um centro de rotação de ordem 3, assim $(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) \in G$, assim como $(0, A_{\frac{4\pi}{3}}) \in G$. Vejamos agora que elemento de G realiza $B_{\frac{\pi}{3}}$ em J : seja $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) \in G$. Então

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}})(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) = (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{3}}) = ((\lambda + \mu)(\mathbf{a} + \mathbf{b}), I)$$

que é uma translação e então $(\lambda + \mu) \in \mathbf{Z}$. Além disso

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) = (\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mu \mathbf{a}), B_{\pi})$$

e

$$(\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mu \mathbf{a}), B_{\pi})(\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mu \mathbf{a}), B_{\pi}) = (\lambda(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), I).$$

Portanto, $\lambda \in \mathbf{Z}$ e, então $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$. Escrevendo

$$(-\lambda \mathbf{a} - \mu \mathbf{b}, I)(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) = (0, B_{\frac{\pi}{3}}) \in G,$$

concluimos que $(0, B_{\frac{\pi}{3}}) \in G$. Também,

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(0, B_{\frac{\pi}{3}}) = (0, B_{\pi}) \in G$$

$$(0, A_{\frac{4\pi}{3}})(0, B_{\frac{\pi}{3}}) = (0, B_{\frac{5\pi}{3}}) \in G.$$

As seis classes laterais de G são, portanto, dados por: H , $H(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$, $H(0, A_{\frac{4\pi}{3}})$, $H(0, B_{\frac{\pi}{3}})$, $H(0, B_{\pi})$ e $H(0, B_{\frac{5\pi}{3}})$. As três primeiras classes laterais já foram estudadas no grupo **p3**. Só resta o estudo das três últimas:

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{\pi}{3}})$:*

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{\pi}{3}}) &= (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) \\ &= ((\frac{m+n}{2})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\frac{n-m}{2})(\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\frac{\pi}{3}}) \end{aligned}$$

1. Se $m = -n$: reflexões em eixos inclinados de $\pi/6$ com o eixo horizontal, separados de $\frac{m}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$;
2. Se $m \neq -n$: *glides* em eixos inclinados como os de reflexão, embora separados de $(\frac{n-m}{4})(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ e com translação de $(\frac{m+n}{2})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

- *Elementos de $H(0, B_{\pi})$:*

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\pi}) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\pi}) = (\frac{n}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (m + \frac{1}{2}n)\mathbf{a}, B_{\pi})$$

1. Se $n = 0$: reflexões em eixos verticais distantes entre si de $\frac{m}{2}\mathbf{a}$;
2. Se $n \neq 0$: *glides* em eixos verticais separados de $(\frac{m}{2} + \frac{n}{4})\mathbf{a}$ e com translação de $\frac{n}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

- *Elementos de $H(0, B_{\frac{5\pi}{3}})$:*

$$\begin{aligned} (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(0, B_{\frac{5\pi}{3}}) &= (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\frac{5\pi}{3}}) \\ &= ((-\frac{m}{2})(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + (\frac{m}{2} + n)\mathbf{b}, B_{\frac{5\pi}{3}}) \end{aligned}$$

1. Se $m = 0$: reflexões em eixos inclinados de $5\pi/6$ com o eixo horizontal, separados entre si de $n\mathbf{b}/2$;
2. Se $m \neq 0$: *glides* em eixos a $5\pi/6$, separados de $(\frac{m}{4} + \frac{n}{2})\mathbf{b}$ e com translação de $(-\frac{m}{2})(\mathbf{b} - 2\mathbf{a})$.

Assim, completamos o estudo deste grupo e o representamos na Figura 16.

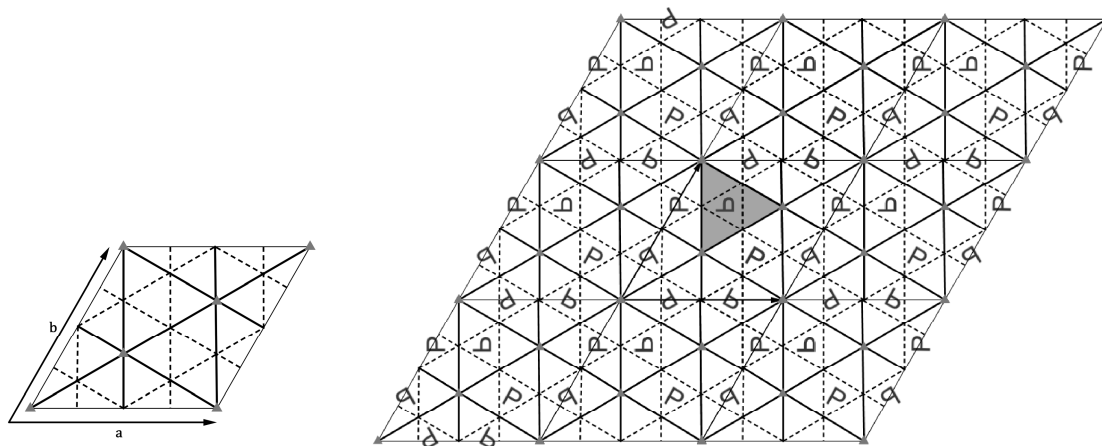


Figura 17: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p31m**.

3.5.4 p6:

Aqui temos $J = \{I, A_{\frac{\pi}{3}}, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\pi}, A_{\frac{4\pi}{3}}, A_{\frac{5\pi}{3}}\}$.

Em vez de procedermos com os cálculos sistematicamente como nos casos anteriores, optamos por fazer uma discussão comparativa àqueles casos, explorando a geometria dos *wallpaper groups*. A partir do grupo pontual J , segue diretamente que os elementos de G são todos rotações. Então devemos determinar os centros destas rotações.

Utilizando a correspondência com o grupo pontual de **p4** (Figura 12), segue naturalmente que devemos ter também aqui centros de rotação de ordens 2 nos pontos médios dos paralelogramos básicos e de ordem n em seus vértices, com $n = 4$ para **p4** e $n = 6$ para **p6**. Ainda, o centro do paralelogramo básico de **p6** é um centro de rotação de ordem 2 (e não 4 como para **p4**, pois neste a rede é quadrada). Outros centros de rotação aparecem aqui, a saber, as mesmas rotações de ordem 3 que aparecem em **p3**, **p3m1** e **p31m**, simplesmente por terem, estes três, o grupo pontual como subgrupo do grupo pontual de **p6**.

Com a discussão acima, fica assim descrita a geometria deste grupo, cujo paralelogramo básico e sua reprodução no plano são dados na Figura 18.

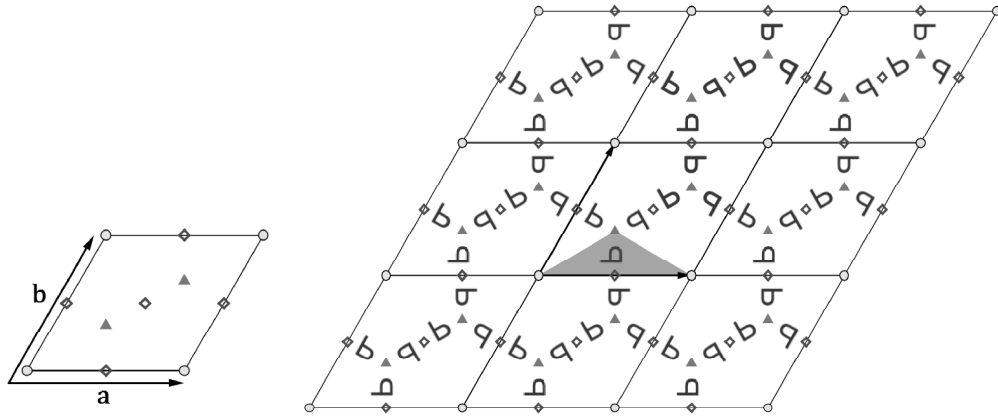


Figura 18: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p6**.

3.5.5 p6mm:

Este é o caso de rede hexagonal com maior grupo pontual, a saber, todo o diedral $\mathbf{D}_6$.

Neste último caso, também optamos pela análise geométrica comparativamente a *wallpaper groups* anteriores.

As rotações do grupo pontual são as mesmas que do grupo pontual de **p6**, de forma que os centros de rotações que ocorrem em ambos os casos são os mesmos. Quanto às reflexões e às *glides*, estas devem ser a união de todas as reflexões e *glides* que aparecem nos casos **p3m1** e **p31m**.

Temos, desta forma, a descrição de todo o grupo. E seu paralelogramo básico e sua reprodução no plano ficam, portanto, determinados juntando-se as informações apresentadas nas Figuras 16, 17 e 18,. Isto é o que aparece na Figura 19.

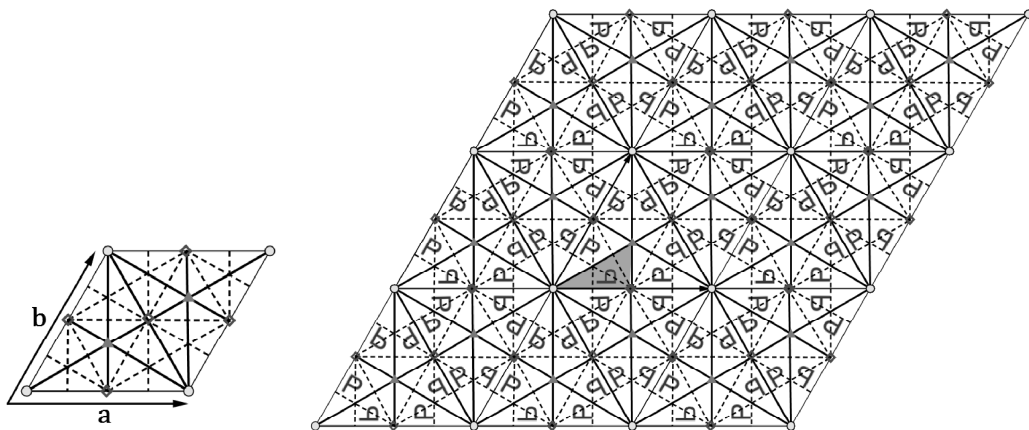


Figura 19: Paralelogramo básico e a reprodução no plano do grupo **p6mm**.

Observação 3.7. *Em diferentes referências sobre os wallpaper groups encontramos diferentes nomenclaturas. Neste texto, optamos por usar a mesma que em [1]. Entretanto, mesmo segundo esta linha de construção dos nomes destes grupos, encontramos uma pequena divergência: em alguns textos, encontramos **p3m1** e **p31m** trocados. Salientamos que no presente texto nossa escolha ainda segue [1], segundo o raciocínio de que a letra "m" ao lado de "3" em **p3m1** se refere à presença da reflexão com relação ao eixo horizontal no grupo pontual, o que não ocorre em **p31m**. Geometricamente, isto fica evidente comparando-se a Figura 16 de **p3m1** e a Figura 17 de **p31m**, onde as retas horizontais são simetrias apenas na primeira.*

Finalmente, observamos que os dezessete grupos descritos acima são, a menos de isomorfismo, todos os possíveis grupos que preservam padrões no plano. Isto pode ser concluído sem grandes dificuldades com base na Proposição 3.5, no Corolário 3.6 e no processo de construção de cada caso que fizemos em detalhes.

4 Ilustrações

Esta seção se destina a uma apresentação ilustrativa dos 17 padrões planos a partir de imagens do cotidiano, como peças ornamentais, pinturas em paredes, objetos decorativos e, claro, papéis de parede. Nosso intuito é consolidar o estudo dos padrões planos num exercício de se analisar cada um dos 17 casos, tornando possível e mais hábil ao leitor identificar em qual dos tipos cada imagem se encaixa.

Para cada *wallpaper pattern* há pelo menos uma ilustração. Em alguns casos, mostramos as simetrias por trás do padrão, permitindo-se identificar a célula fundamental do padrão, seus centros de rotação, seus eixos de reflexão e de *glide*.

As imagens mostram desde grandes construções de povos orientais até objetos extremamente simples e comuns, como os ladrilhos de uma calçada ou uma parede de tijolos, evidenciando-se, assim, a possibilidade de se criar padrões em uma infinidade de situações. Isso de fato é realizado pelas sociedades, desde a antiguidade, por um simples motivo: a organização e as simetrias dos padrões planos agradam os nossos olhos.

4.1 p1

Esta é a estrutura mais rudimentar, já que não há ocorrência de simetrias além da trivial, ou seja, o grupo pontual neste caso é $J = \{I\}$. Um tal padrão aparece ilustrado na Figura 20, retirada de [5]. Pode-se facilmente identificar a célula fundamental geradora do padrão, que não possui qualquer tipo de simetria não trivial, sendo o plano preenchido apenas através de translações.



Figura 20: Padrão com grupo $p1$.

4.2 $p2$

Numa imagem cotidiana para os habitantes do estado de São Paulo aparece um estilo artístico de calçada adotado em diversos locais. Veja na Figura 21 o segundo padrão, tratado algebricamente na Subseção 3.1.2. Esta imagem foi retirada de [6]. Na Figura 22 repetimos a imagem anterior incluindo agora a célula fundamental, sombreada, bem como os centros de rotação. Dessa maneira fica bem claro como o padrão é constituído.

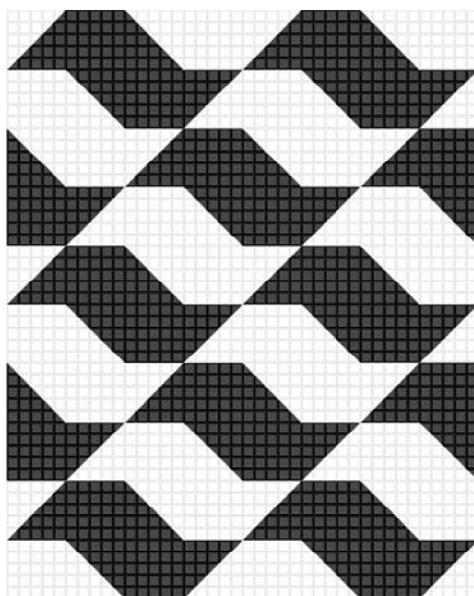


Figura 21: Padrão com grupo $p2$.

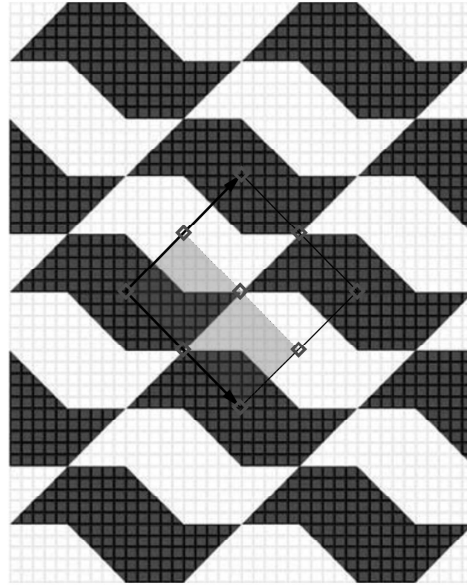


Figura 22: Reprodução da Figura 21, agora com uma célula fundamental em destaque.

4.3 $\mathbf{pm}$

Retiramos de [7] a imagem da Figura 23, exemplo de padrão com simetrias de $\mathbf{pm}$. Inserimos nesta imagem uma célula fundamental (ou paralelogramo básico). Na Figura 24 apresentamos outro padrão com mesmo grupo de simetrias.

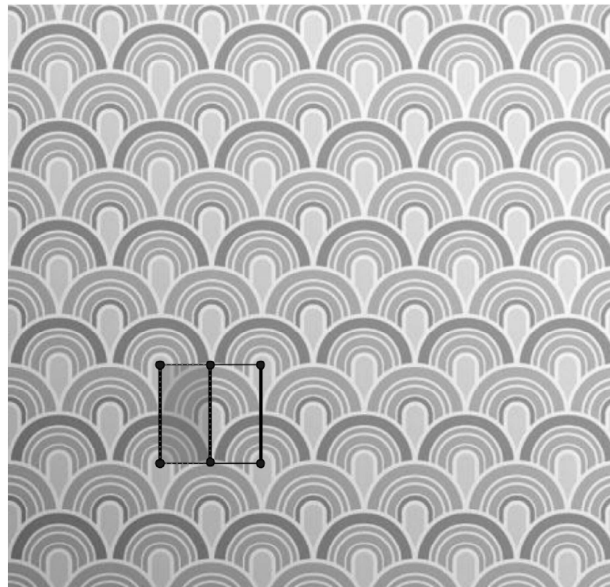


Figura 23: Padrão com grupo $\mathbf{pm}$.

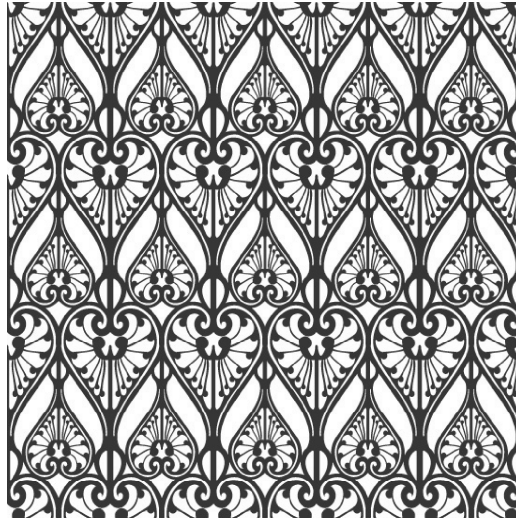


Figura 24: Padrão com grupo **pm**.

4.4 **pg**

Neste caso, o destaque fica no aspecto de "zig-zag" do padrão, proporcionado pelas *glides*. Fora as translações, são as *glides* as únicas simetrias não triviais deste grupo. Veja a Figura 25, retirada de [9].



Figura 25: Padrão com grupo **pg**. Chamamos à atenção o aspecto de "zig-zag" da imagem originada pelas *glides*.

4.5 **p2mm**

O padrão em questão é ilustrado aqui como um papel de parede propriamente dito. Veja a Figura 26, de [10].

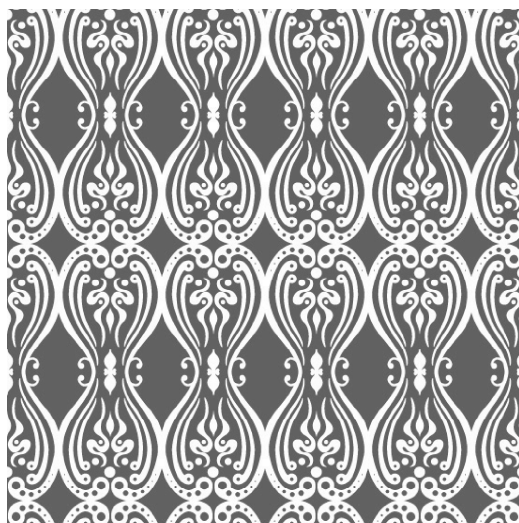


Figura 26: Padrão de um papel de parede com simetrias do grupo **p2mm**.

4.6 p2mg

Apresentamos neste caso o calçadão da praia de Copacabana, Rio de Janeiro - RJ. A Figura 27 é uma imagem em perspectiva deste padrão.



Figura 27: PAdrão com grupo **p2mg**.

4.7 p2gg

O padrão que selecionamos para ilustrar este caso é conhecido por *Herringbone*, muito utilizado na construção de pavimentos. Veja a Figura 28, de [11].

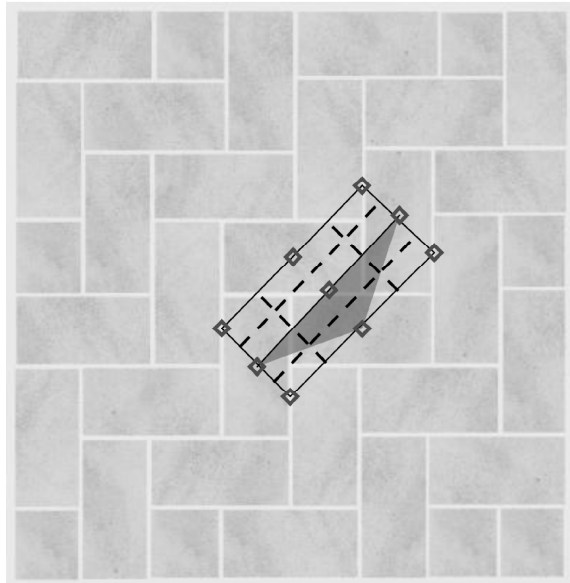


Figura 28: Padrão com grupo **p2gg**, conhecido como *Herringbone*.

4.8 cm

A Figura 29 é um típico papel de parede. Há, neste padrão, não somente as reflexões como também as *glides*. Reproduzimos esta imagem na Figura 30 inserindo agora as retas de reflexões e retas de *glides*.

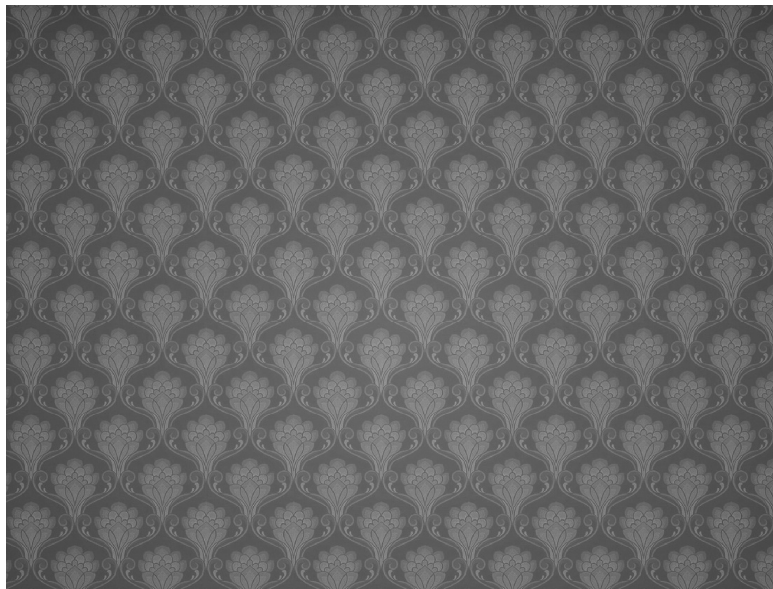


Figura 29: Padrão com grupo **cm**.

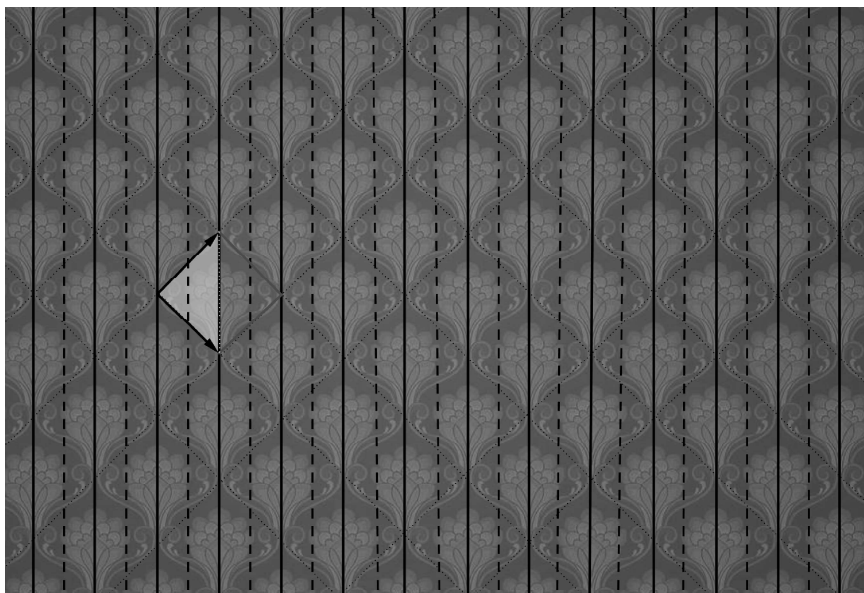


Figura 30: Padrão da Figura 29 com inserção de retas de reflexão (linhas contínuas) e retas de *glides* (linhas tracejadas).

4.9 $c2mm$

Uma imagem do cotidiano como uma parede de tijolos à vista pode naturalmente conter um padrão bem estruturado e não trivial. Veja Figura 31, de [13].

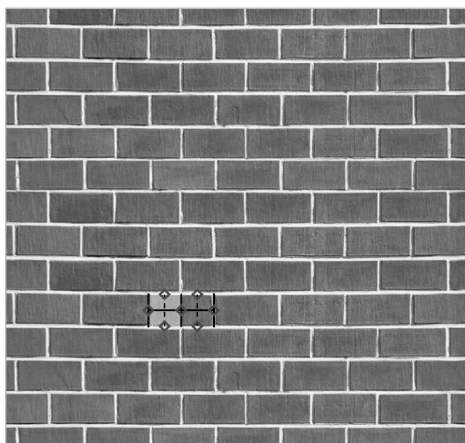


Figura 31: Parede de tijolos como um padrão com grupo $c2mm$.

4.10 $p4$

Este grupo é ilustrado com o padrão da Figura 32 (fonte: [14]). Com a inserção de uma célula fundamental e centros de rotação (em destaque), vemos facilmente como este padrão se reproduz a partir dela.

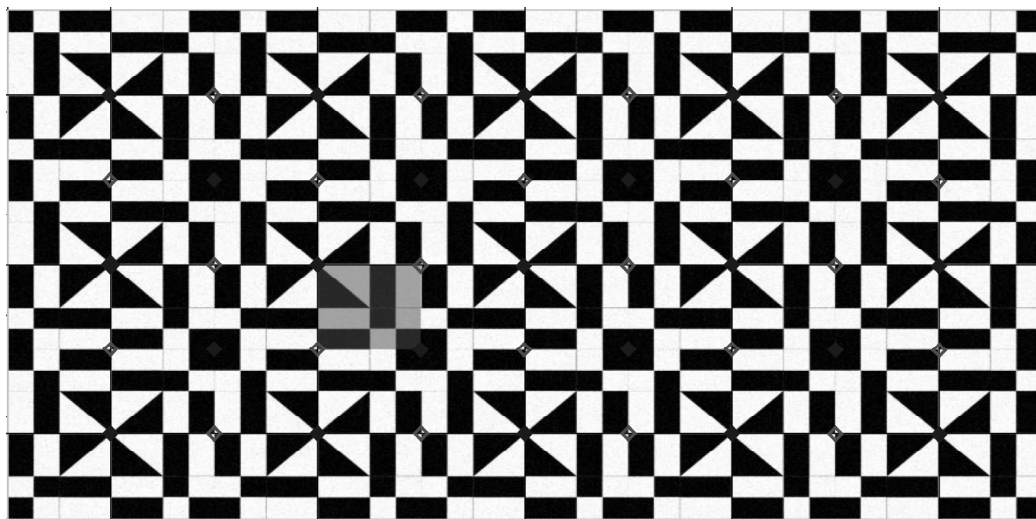


Figura 32: Padrão com grupo **p4** com uma célula fundamental e centros de rotação em destaque.

4.11 p4mm

A Figura 33 selecionada de [15] é a foto de uma louça turca. A louça apresenta em seu interior o padrão "aproximado" do grupo **p4mm**. Aproximado porque notamos aqui a liberdade do artista em desenhar algumas das flores azuis com sete pétalas. O padrão ideal matemático deve contar oito pétalas, dispostas simetricamente com relação à horizontal e à vertical.

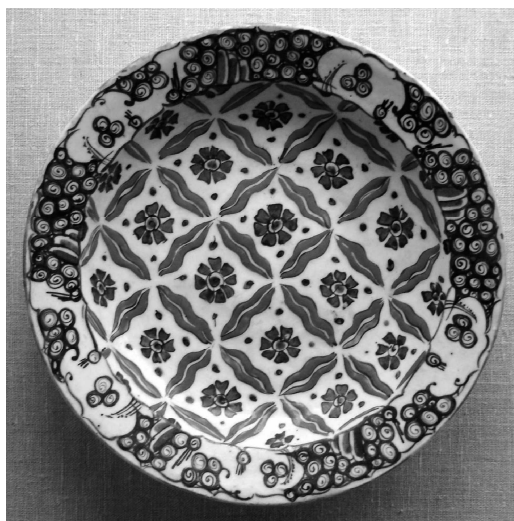


Figura 33: Prato turco com uma ilustração "aproximada" do grupo **p4mm**.

4.12 p4gm

Este grupo é ilustrado na Figura 34. Fonte: [16].

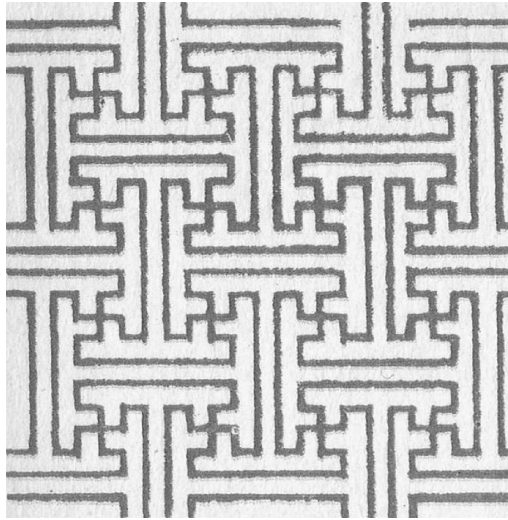


Figura 34: Padrão com grupo **p4gm**.

4.13 p3

Usamos o programa *Kali* ([4]) para gerar a imagem ilustrativa deste grupo. Veja a Figura 35.

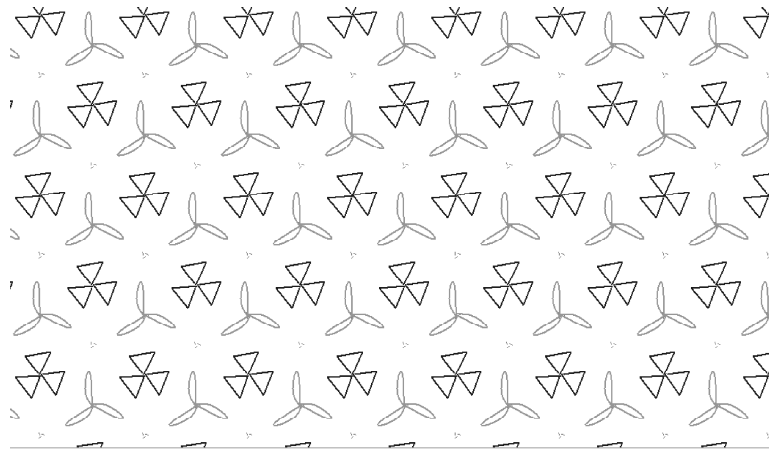


Figura 35: Padrão com grupo **p3**. Imagem gerada computacionalmente.

4.14 p3m1

Assim como para o caso anterior, a imagem aqui foi também gerada com o uso do *Kali*. Veja a Figura 36. Para este caso, incluímos uma célula fundamental na figura.

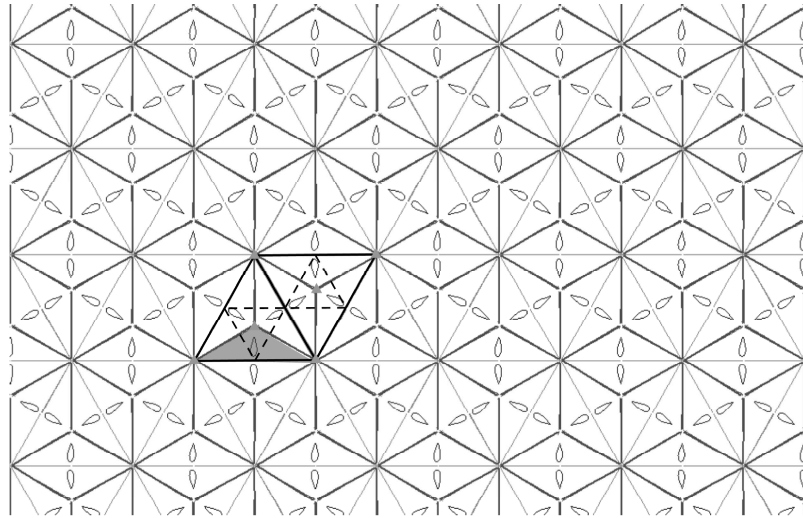


Figura 36: Padrão com grupo **p3m1**. Imagem gerada computacionalmente.

4.15 p31m

Na imagem da Figura 37 evidenciamos a célula fundamental, com os centros de rotação de ordem 3, bem como os eixos de reflexão e de *glides*. Fonte: [17].

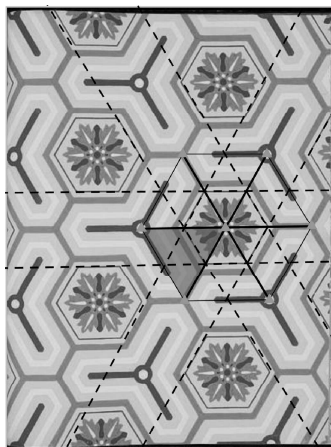


Figura 37: Padrão com grupo **p31m**. Em destaque, uma célula fundamental e algumas linhas de *glides*.

4.16 p6

Para este caso, selecionamos de [18] uma imagem de parte da tumba de Itimud ad-Daula, em Agra, Índia. Veja a Figura 38. O padrão do grupo **p6** aparece no interior da faixa, desprezando-se as cores.

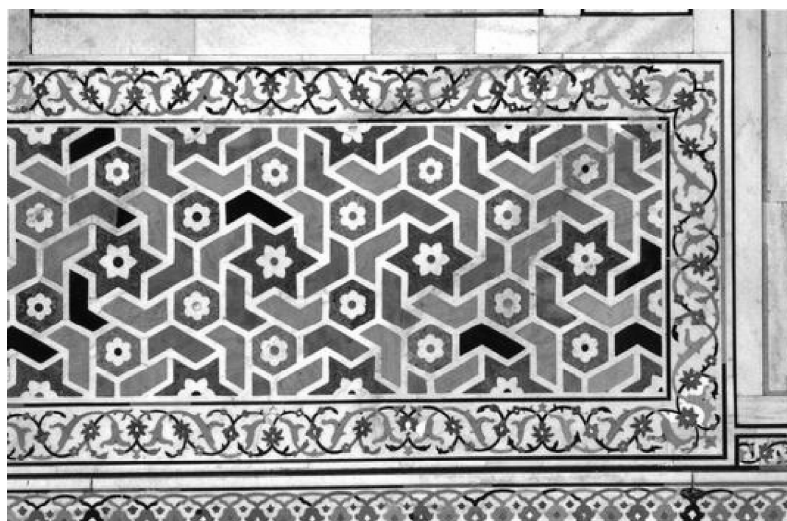


Figura 38: O padrão com grupo **p6** nesta imagem aparece no interior da faixa, desconsiderando o uso de cores.

4.17 p6mm

A imagem da Figura 39 é uma foto retirada de [19]. Ela mostra um trecho do *Maharajah's Palace*, palácio da dinastia Rajput, em Jaipur, Índia. A Figura 40 mostra um detalhe desta imagem.

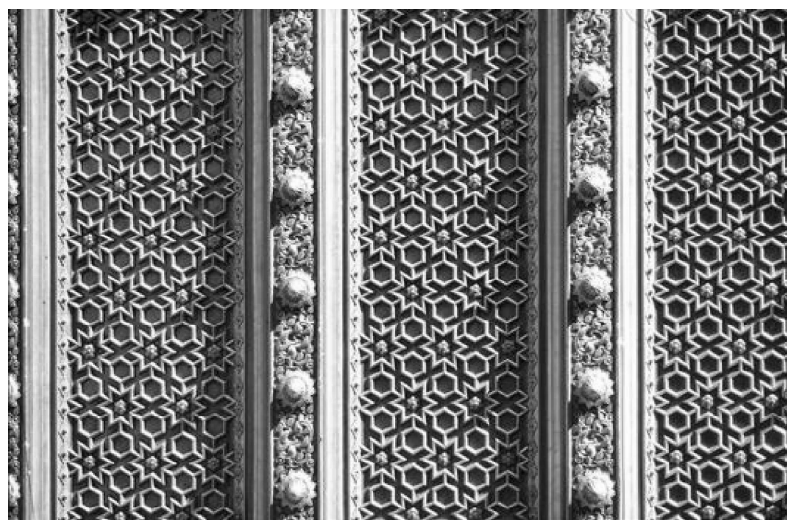


Figura 39: O padrão com grupo **p6mm** aparece nesta foto em faixas intercaladas.

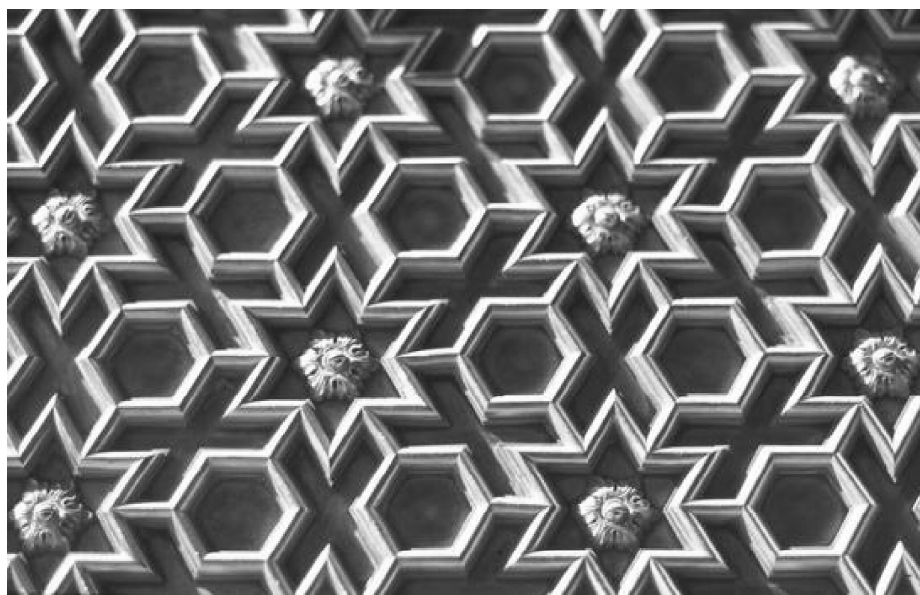


Figura 40: Detalhe da Figura 39.

Referências

- [1] M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1997.
- [2] M. Golubitsky, I. Stewart, D. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol 2, Applied Mathematical Sciences **69**, Springer-Verlag, 1985.
- [3] J. F. Humphreys, *A course in group theory*. Oxford University Press, 1996.
- [4] Software gratuito para download em: <http://geometrygames.org/Kali/>
- [5] Disponível em: <http://rhsgraphicdesign.wikispaces.com/>
- [6] Disponível em: <http://img139.imageshack.us/img139/6816/mc17201mb4.jpg>
- [7] Disponível em: <http://4.bp.blogspot.com/>
- [8] Disponível em: <http://www.lizzybloves.com/images/patterns/full/>
- [9] Disponível em: <http://fac-web.spsu.edu/math/tile/grammar/eliz/eliz3.htm>
- [10] Disponível em: <http://www.lizzybloves.com/images/patterns/full/>
- [11] Disponível em: <http://www.sandstonepatio.com/patterns/>
- [12] Disponível em: <http://www.desktopwallpaperhd.com/wallpapers/27/23277.jpg>
- [13] Disponível em: <http://www.newphotosgalleries.com/wp-content/uploads/2011/06/brick-wall.jpg>
- [14] Disponível em: <http://c.imguol.com/album/>
- [15] Disponível em: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Wallpaper_group-p4m-8.jpg
- [16] Disponível em: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Wallpaper_group-p4g-2.jpg
- [17] Disponível em: <http://collections.vam.ac.uk/item/O809530/wallpaper/>
- [18] Disponível em: <http://www.patterninislamicart.com/archive/?browse=region&val=india&iid=461>
- [19] Disponível em: <http://www.patterninislamicart.com/archive/?browse=region&val=india&iid=624>