

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

NOTAS DO CURSO DE SMA308 – ANÁLISE II

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Nº 83

NOTAS DIDÁTICAS



São Carlos - SP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2585

NOTAS DO CURSO DE SMA308 – ANÁLISE II

WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Nº 83

NOTAS DIDÁTICAS



São Carlos – SP
Dez./2011

Notas do Curso de SMA308 - Análise II

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos - Agosto de 2011

Sumário

1	Introdução	5
2	A Integral de Riemann-Stieltjes	7
3	Sequência e Séries de Funções	53
4	Séries de Potências e de Fourier	101
5	Funções de Várias Variáveis Reais	153

Capítulo 1

Introdução

O objetivo destas notas é ser um texto de apoio para a disciplina SMA308 Análise II que trata em uma primeira parte de conceitos relacionados com a integral de Riemann e Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real a valores reais ou a valores vetoriais, propriedades das mesmas, relações entre estas e aplicações.

Em uma segunda etapa serão estudados tópicos relacionados com sequência e séries de funções; estudo da convergência pontual ou uniforme, propriedades e aplicações.

Em uma terceira etapa trataremos da continuidade, diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais a valores reais ou vetoriais, propriedades e aplicações.

Finalizando com enunciaremos, provaremos e aplicaremos os Teoremas da função implícita e da função inversa para funções de várias variáveis reais a valores reais ou vetoriais.

Iniciaremos fixando a notação dos elementos que serão utilizados ao longo das notas.

Notação 1.0.1

$\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3, \dots\}$	<i>(conjunto dos números naturais)</i>
$\mathbb{Z} \doteq \{\dots, 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	<i>(conjunto dos números inteiros)</i>
$\mathbb{Q} \doteq \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	<i>(conjunto dos números racionais)</i>
$\mathbb{Q} \doteq \{x \neq \frac{p}{q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$	<i>(conjunto dos números irracionais)</i>
$\mathbb{R} \doteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	<i>(conjunto dos números reais)</i>

Capítulo 2

A Integral de Riemann-Stieltjes

Neste capítulo introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes de uma função definida em um intervalo fechado e limitado a valores reais.

Para isto relembremos o conceito de supremo e ínfimo e algumas propriedades relacionadas com estes conceitos.

2.1 Supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Começaremos pelos importantes conceitos estudados no curso de Análise I: supremo e ínfimo de certos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.1 Diremos que o subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ se existir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$e \leq \beta, \quad \forall e \in E.$$

Neste caso β será dito limitante superior de E .

De modo semelhante, diremos que o subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \leq f, \quad \forall f \in F.$$

Neste caso α será dito limitante inferior de F .

Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é limitado em $\mathbb{R}$ se for limitado superiormente e inferiormente, isto é,

Notemos que

Proposição 2.1.1 Seja $E \subseteq \mathbb{R}$.

O conjunto E será limitado em $\mathbb{R}$ se, e somente se, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$-\gamma \leq e \leq \gamma, \quad \forall e \in E.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos os:

Exemplo 2.1.1 Seja $E \doteq [2, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Então E é limitado inferiormente (pois, $\alpha \leq 2$ será um limitante inferior do conjunto E) mas não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.2 Seja $E \doteq (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Então E é limitado superiormente (pois, $\beta \geq \sqrt{2}$ é um limitante superior do conjunto E) mas não é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3 Seja $E \doteq (-1, \sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$.

Então E é limitado em $\mathbb{R}$.

De fato, E é limitado superiormente (pois, $\beta \geq \sqrt{2}$ é um limitante superior do conjunto E) e é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ (pois, $\alpha \leq -1$ é um limitante inferior do conjunto E).

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.1.2 Seja $E \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, não vazio, de $\mathbb{R}$.

Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ que têm as seguintes propriedades:

1. α é um limitante superior de E ;
2. se $\gamma < \alpha$ então γ não será limitante superior de E .

Neste caso diremos que α é o supremo do conjunto E , e será denotado por $\sup(E)$, isto é,

$$\sup(E) \doteq \alpha.$$

Observação 2.1.1 A definição acima nos diz que α é o menor limitante superior do conjunto E (se existir).

De modo semelhante temos a:

Definição 2.1.3 Seja $F \subseteq \mathbb{R}$, não vazio e limitado inferiormente, não vazio, de $\mathbb{R}$.

Suponhamos que exista $\beta \in \mathbb{R}$ que têm as seguintes propriedades:

1. β é um limitante inferior de F ;
2. se $\gamma > \beta$ então γ não será limitante inferior de F .

Neste caso diremos que β é o ínfimo do conjunto F , e será denotado por $\inf(F)$, isto é,

$$\inf(F) \doteq \beta.$$

Observação 2.1.2 A definição acima nos diz que β é o maior limitante inferior do conjunto F (se existir).

Exemplo 2.1.4 Seja $E \doteq (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Então

$$\sup(E) = 1 \quad e \quad \inf(E) = 0.$$

Resolução:

Notemos que o conjunto formado por todos os limitantes superiores será:

$$LS \doteq [1, \infty),$$

assim o menor limitante superior será 1, ou seja, $\sup(E) = 1$.

Por outro lado, o conjunto formado por todos os limitantes inferiores será:

$$LI \doteq (-\infty, 0],$$

assim o maior limitante inferior será 0, ou seja, $\inf(E) = 0$.

Temos um modo equivalente a definição de supremo que é dada pelo:

Teorema 2.1.1 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente, não vazio, de $\mathbb{R}$.*

Então $\alpha = \sup(E)$ se, e somente se,

1' α é limitante superior de E ;

2' dado $\varepsilon > 0$ existe $e \in E$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < e \leq \alpha.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor. □

Temos o análogo para o ínfimo:

Teorema 2.1.2 *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente, não vazio, de $\mathbb{R}$.*

Então $\beta = \inf(F)$ se, e somente se,

1' β é limitante inferior de F ;

2' dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in F$ tal que

$$\beta \leq f < \beta + \varepsilon.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor. □

Antes de prosseguir temos o seguinte resultado sobre a existência do supremo (respectivamente, ínfimo):

Teorema 2.1.3 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente (respectivamente, inferiormente), não vazio, de $\mathbb{R}$ possui supremo (respectivamente, ínfimo) em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [?] página 8. □

Como consequência temos o

Corolário 2.1.1 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado possui supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$.*

Para finalizar esta seção temos o seguinte resultado importante relacionado com as operações de supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

Teorema 2.1.4 *Sejam $c \in \mathbb{R}$, $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos limitados superiormente, não vazios, de $\mathbb{R}$ e $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos limitados inferiormente, não vazios, de $\mathbb{R}$. Então:*

1. Se $E_1 \subseteq E_2$ então

$$\sup(E_1) \leq \sup(E_2).$$

2. Se $F_1 \subseteq F_2$ então

$$\inf(F_1) \geq \inf(F_2).$$

3. $E_1 + E_2$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\sup(E_1) + \sup(E_2) \geq \sup(E_1 + E_2).$$

4. $F_1 + F_2$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\inf(F_1) + \inf(F_2) \leq \inf(F_1 + F_2).$$

5. Se $E_1, E_2 \subseteq [0, \infty)$ então $E_1 \cdot E_2$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\sup(E_1 \cdot E_2) = \sup(E_1) \cdot \sup(E_2).$$

6. Se $F_1, F_2 \subseteq [0, \infty)$ então $F_1 \cdot F_2$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\inf(F_1 \cdot F_2) = \inf(F_1) \cdot \inf(F_2).$$

7. Se $c > 0$ então $c \cdot E_1$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\sup(c \cdot E_1) = c \cdot \sup(E_1).$$

8. Se $c < 0$ então $c \cdot E_1$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\inf(c \cdot E_1) = c \cdot \sup(E_1).$$

9. Se $c > 0$ então $c \cdot F_1$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\inf(c \cdot F_1) = c \cdot \inf(F_1).$$

10. Se $c < 0$ então $c \cdot F_1$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e

$$\sup(c \cdot F_1) = c \cdot \inf(F_1).$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor. □

Como consequência temos o

Corolário 2.1.2 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto limitado não vazio de $\mathbb{R}$. Então $-A$ também é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e*

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

2.2 A integral de Riemann-Stieltjes

Para introduzir a integral de Riemann-Stieltjes de uma função real limitada definida em um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ precisaremos da:

Definição 2.2.1 *Consideremos $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ o intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$.*

Sejam

$$x_0 \doteq a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \doteq b.$$

O conjunto

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0, \dots, x_n\}$$

será dito partição do intervalo $[a, b]$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ denotaremos o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por:

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}. \tag{2.1}$$

Temos também a

Definição 2.2.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.*

Dada uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_0, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definamos

$$M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad (2.2)$$

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (2.3)$$

(como a função f é limitada em $[a, b]$ segue que existem os supremos e ínfimos acima) e

$$U(\mathcal{P}, f) \doteq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad (2.4)$$

$$L(\mathcal{P}, f) \doteq \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad (2.5)$$

denominadas soma superior, respectivamente, inferior, sobre a partição $\mathcal{P}$ associada à função f .

Observação 2.2.1 *Notemos que:*

1. Como $m_i \leq M_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, segue que

$$L(\mathcal{P}, f) \leq U(\mathcal{P}, f). \quad (2.6)$$

2. Denotemos por $\mathfrak{P}$ a coleção formada por todas as partições do intervalo $[a, b]$.

3. Se

$$m \doteq \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad (2.7)$$

então

$$m \underbrace{(b-a)}_{=\sum_{i=1}^n \Delta x_i} = \sum_{i=1}^n m \Delta x_i \stackrel{m \leq m_i \leq M_i \text{ em cada } [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f),$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq U(\mathcal{P}, f), \quad (2.8)$$

Logo podemos concluir que o subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$, logo possui ínfimo, ou seja, existe

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

4. Se

$$M \doteq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad (2.9)$$

então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \stackrel{m_i \leq M_i \text{ em cada } [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \stackrel{M_i \leq M \forall i \in \{1, \dots, n\}}{\leq} \sum_{i=1}^n M \Delta x_i \\ &= M \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}_{=b-a} = M(b-a), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}, f) \leq M(b-a) \quad (2.10)$$

Logo podemos concluir que o subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, logo possui supremo, ou seja, existe

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f)$$

Com isto temos a:

Definição 2.2.3 Na situação acima, definimos a integral superior de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$, que será indicada por $\int_a^b f(x) dx$, com o sendo:

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f) \quad (2.11)$$

e definimos a integral inferior de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$, que será indicada por $\int_a^b f(x) dx$, com o sendo:

$$\int_a^b f(x) dx \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f). \quad (2.12)$$

Se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

diremos que a função f é Riemann integrável em $[a, b]$ e o valor comum acima será dito integral de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$ e será indicada por $\int_a^b f(x) dx$, ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.13)$$

Denotaremos por $\mathfrak{R}([a, b])$, ou simplesmente por $\mathfrak{R}$, o conjunto formado por todas as funções a valores reais que são Riemann integráveis no intervalo $[a, b]$.

Observação 2.2.2

Questão: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada então $f \in \mathcal{R}([a, b])$?

A resposta a esta questão é negativa.

Para ver isto, notemos que a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases}$$

é uma função limitada em $[0, 1]$ mas não é uma função Riemann integrável em $[0, 1]$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Na verdade trataremos de situações mais gerais, mais especificamente, temos:

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a, b]$, isto é,

$$\alpha(x) \leq \alpha(y) \quad \text{para } x \leq y, \quad x, y \in [a, b].$$

Observemos que sendo a função α monótona crescente deveremos ter

$$-\infty < \alpha(a) \leq \alpha(x) \leq \alpha(b) < \infty, \quad x \in [a, b],$$

ou seja, a função α será limitada em $[a, b]$.

Dada a partição $\mathcal{P} \doteq \{x_0, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definamos

$$\Delta\alpha_i \doteq \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}). \quad (2.14)$$

Notemos que a função α monótona crescente segue que

$$\Delta\alpha_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dada a função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definamos

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \doteq \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i, \quad (2.15)$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \doteq \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i, \quad (2.16)$$

onde, para $i \in \{1, \dots, n\}$, M_i, m_i são dados por (2.2) e (2.3), respectivamente.

Observação 2.2.3

1. Notemos que, na situação acima, teremos:

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq L(\mathcal{P}, f, \alpha) \quad (2.17)$$

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq m[\alpha(b) - \alpha(a)] \quad (2.18)$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)], \quad (2.19)$$

onde m, M são dados por (2.7) e (2.9), respectivamente.

Estas desigualdades seguem do fato que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, teremos:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

e que

$$\sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a).$$

2. De (2.18) segue que o conjunto

$$\{U(\mathcal{P}, f, \alpha) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ logo admite ínfimo, isto é, existe

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (2.20)$$

3. De modo semelhante, de (2.19) segue que o conjunto

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} \quad (2.21)$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ logo admite supremo, isto é, existe

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Definição 2.2.4 Na situação acima, (2.20) será denominado integral superior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente à função α e será denotada por $\int_a^b f d\alpha$, ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha \doteq \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (2.22)$$

De modo análogo, (2.21) será denominado integral inferior de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente à função α e será denotada por $\int_a^b f d\alpha$, ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (2.23)$$

Se

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha,$$

diremos que a função f é Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente à função α e o valor comum das integrais acima será denominado integral de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, relativamente à função α e indicada por $\int_a^b f d\alpha$, isto é,

$$\int_a^b f d\alpha \doteq \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha. \quad (2.24)$$

Observação 2.2.4

1. Também poderemos utilizar as seguintes notações para as integrais de Riemann-Stieltjes:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \doteq \int_a^b f d\alpha \quad (2.25)$$

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \doteq \int_a^b f d\alpha \quad (2.26)$$

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \doteq \int_a^b f d\alpha. \quad (2.27)$$

2. Observemos que, de (2.17) segue que:

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^{\overline{b}} f d\alpha$$

3. Denotaremos o conjunto formado por todas as funções a valores reais, limitadas definidas no intervalo $[a, b]$ que são Riemann-Stieltjes integráveis relativamente à função α por $\mathfrak{R}(\alpha)$.

4. Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\alpha(x) \doteq x, \quad x \in [a, b],$$

segue que a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função α coincide com a integral de Riemann, ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) dx.$$

5. Notemos que a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ só precisa ser monótona crescente em $[a, b]$ para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função α .

6. Vamos supor, daqui em diante, que $\alpha(b) > \alpha(a)$, pois caso contrário a função α seria constante em $[a, b]$ e pouco serviria para o estudo da integral de Riemann-Stieltjes de uma função a valores reais, limitada e definida em um intervalo $[a, b]$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função α para uma função limitada, a valores reais f definida no intervalo $[a, b]$.

Para isto precisaremos da:

Definição 2.2.5 Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ duas partições do intervalo $[a, b]$ (isto é, $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathfrak{P}$).

Diremos que a partição $\mathcal{P}^*$ é um refinamento da partição $\mathcal{P}$ se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*$, ou seja, todo ponto da partição $\mathcal{P}$ é ponto da partição $\mathcal{P}^*$.

Observação 2.2.5 Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ duas partições do intervalo $[a, b]$ (isto é, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$).

Definamos

$$\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \quad (2.28)$$

Então $\mathcal{P}^*$ será um refinamento de ambas as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, e será denominada refinamento comum das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Com isto temos o

Proposição 2.2.1 Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ partições do intervalo $[a, b]$ onde a partição $\mathcal{P}^*$ é um refinamento da partição $\mathcal{P}$. Então valem:

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \quad (2.29)$$

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (2.30)$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{P}^* = \{a = x_0^*, x_1^*, \dots, x_{m-1}^*, x_m^* = b\}. \quad (2.32)$$

Notemos que se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ nada teremos a fazer e, neste caso, as desigualdades acima serão igualdades. Logo podemos supor que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*$ e existe

$$x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}. \quad (2.33)$$

Consideremos, primeiramente, o caso que

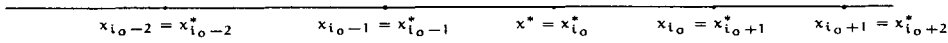
$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, de (2.33), segue que existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$x_{i_0-1} < x^* < x_{i_0},$$

ou seja, para $j \in \{1, \dots, n+1\}$ teremos:

$$x_j^* = \begin{cases} x_j, & j \leq i_0 - 1 \\ x^*, & j = i_0 \\ x_{j-1}, & i_0 + 1 \leq j \end{cases} \quad (2.34)$$



Para cada $j \in \{1, \dots, n+1\}$, denotemos por (veja figura acima)

$$\Delta\alpha_j^* \doteq \alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1}^*), \quad (2.35)$$

$$m_j^* \doteq \inf_{x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]} f(x). \quad (2.36)$$

Notemos que $j \in \{1, \dots, n+1\}$ teremos

$$m_j^* = \begin{cases} m_j, & j \leq i_0 - 1 \\ \inf_{x \in [x_{i_0-1}^*, x^*]} f(x), & j = i_0 \\ \inf_{x \in [x^*, x_{i_0}]} f(x), & j = i_0 + 1 \\ m_{j-1}, & i_0 + 2 \leq j \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\Delta\alpha_j^* = \begin{cases} \Delta\alpha_j, & j \leq i_0 - 1 \text{ ou } i_0 + 2 \leq j \\ \alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1}), & j = i_0 \\ \alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*), & j = i_0 + 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

Observemos também que (veja figura acima):

$$m_{i_0} = \inf_{x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f(x) \stackrel{[x_{i_0-1}^*, x_{i_0}^*] \subseteq [x_{i_0-1}, x_{i_0}]}{\leq} \inf_{x \in [x_{i_0-1}^*, x_{i_0}^*]} f(x) = m_{i_0}^*, \quad (2.39)$$

$$m_{i_0} = \inf_{x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f(x) \stackrel{[x_{i_0}^*, x_{i_0+1}^*] \subseteq [x_{i_0-1}, x_{i_0}]}{\leq} \inf_{x \in [x_{i_0}^*, x_{i_0+1}^*]} f(x) = m_{i_0+1}^*, \quad (2.40)$$

Logo

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \Delta \alpha_j^* - \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i \\ &= \sum_{j=1, j \neq i_0, i_0+1}^{n+1} \underbrace{m_j^*}_{\stackrel{(2.37)}{=} m_j \text{ ou } m_{j-1}} \Delta \alpha_j^* + m_{i_0}^* \Delta \alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \Delta \alpha_{i_0+1}^* - \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i \\ &= m_{i_0}^* \Delta \alpha_{i_0}^* + m_{i_0+1}^* \Delta \alpha_{i_0+1}^* - m_{i_0} \Delta \alpha_{i_0} \\ &= m_{i_0}^* [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})] + m_{i_0+1}^* [\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)] - m_{i_0} [\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x_{i_0-1})] \\ &= \underbrace{[m_{i_0}^* - m_{i_0}]}_{\stackrel{(2.39)}{\geq 0}} \underbrace{[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_0-1})]}_{\substack{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x^* \geq x_{i_0-1} \\ \geq 0}} + \underbrace{[m_{i_0+1}^* - m_{i_0}]}_{\stackrel{(2.40)}{\geq 0}} \underbrace{[\alpha(x_{i_0}) - \alpha(x^*)]}_{\substack{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x_{i_0} \geq x^* \\ \geq 0}} \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq 0,$$

completando a demonstração de (2.29).

Se a partição $\mathcal{P}^*$ possui mais pontos (um número finito) repetimos o argumento acima um número finito de vezes para obter (2.29).

A demonstração da desigualdade (2.30) é análoga e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor. □

Como consequência segue o:

Teorema 2.2.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b f \, d\alpha}. \quad (2.41)$$

Demonstração:

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ duas partições do intervalo $[a, b]$ e $\mathcal{P}^*$ o refinamento comum a estas duas partições (isto é, $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$).

Da Proposição acima segue que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) &\stackrel{\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.29)}{\leq} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \stackrel{(2.17)}{\leq} U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \\ &\stackrel{\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}^* \text{ e } (2.30)}{\leq} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

Portanto $U(\mathcal{P}_2, f, \alpha)$ é um limitante superior para o conjunto $\{L(\mathcal{P}_1, f, \alpha); \mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}\}$.

Logo

$$\sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha).$$

Da desigualdade acima segue que $\sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)$ é um limitante inferior do conjunto $\{U(\mathcal{P}_2, f, \alpha); \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}\}$.

Logo

$$\underbrace{\sup_{\mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)}_{=\int_a^b f d\alpha} \leq \underbrace{\inf_{\mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha)}_{=\int_a^b f d\alpha},$$

ou seja,

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha,$$

completando a demonstração do teorema. □

Com este resultado podemos obter uma outra caracterização equivalente para os elementos de $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, mais precisamente:

Corolário 2.2.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$.*

$f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon. \quad (2.42)$$

Demonstração:

Suponhamos que (2.42) ocorre e mostremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

Observemos que se $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &\leq \sup_{\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}', f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha \stackrel{\text{Teor. acima}}{\leq} \int_a^b f d\alpha \\ &= \inf_{\mathcal{P}' \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}', f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ tal que

$$0 \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \stackrel{(2.43)}{\leq} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{\text{Hipótese}}{<} \varepsilon, \quad (2.44)$$

ou seja,

$$0 \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, mostrando que

$$\int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha,$$

isto é, a função f é Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$ relativamente à função α , ou ainda, $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

Por outro lado, se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, dado $\varepsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$ tais que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) &\stackrel{\text{Teor. (2.1.1)}}{<} \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \\ L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) &\stackrel{\text{Teor. (2.1.2)}}{>} \int_a^b f d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

o que implicará em:

$$0 \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.45)$$

$$0 \leq \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1, f, \alpha). \quad (2.46)$$

Seja $\mathcal{P}$ o refinamento comum das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ (isto é, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$).

Com isto teremos

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) &\stackrel{(2.30)}{\leq} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) \stackrel{(2.45)}{<} \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\stackrel{(2.46)}{<} \left[\frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \right] + \frac{\varepsilon}{2} = L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) + \varepsilon \stackrel{(2.29)}{\leq} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implicará em (2.42), completando a demonstração do resultado. □

Temos alguns outros resultados semelhantes que são dados pelo:

Teorema 2.2.2 *Temos que:*

1. Se (2.42) ocorrer para uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ e para $\varepsilon > 0$ então (2.42) também ocorrerá trocando-se a partição $\mathcal{P}$ por uma outra que é refinamento da mesma (com o mesmo $\varepsilon > 0$).
2. Se (2.42) ocorrer para a partição

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

e se para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \varepsilon. \quad (2.47)$$

3. Se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, a partição $\mathcal{P}$ é como no item acima e para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon. \quad (2.48)$$

Demonstração:

Suponhamos que vale (2.42) para a partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$.

De 1.:

Se a partição $\mathcal{P}^*$ é um refinamento da partição $\mathcal{P}$ então, de (2.29) e (2.30), segue que

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \quad \text{e} \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha),$$

o que implicará em

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{(2.42)}{<} \varepsilon,$$

completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Sabemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$, o que implicará em

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i &\leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \\ &\stackrel{(2.15)}{=} \stackrel{(2.16)}{=} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{(2.42)}{<} \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.49)$$

completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, do Corolário (2.2.1) segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.50)$$

Sabemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos $f(t_i) \in [m_i, M_i]$, o que implicará em

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &\stackrel{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \stackrel{m_i \leq f(t_i)}{\leq} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i \stackrel{f(t_i) \leq M_i}{\leq} \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \\ &\stackrel{(2.16)}{=} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{(2.50)}{<} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

em particular,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja,

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.51)$$

Por outro lado, da definição

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha = \overline{\int_a^b f \, d\alpha} \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{(2.50)}{<} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

em particular,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \int_a^b f \, d\alpha < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ou seja,

$$\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.52)$$

Portanto

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \alpha_i - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \right|}_{\substack{(2.51) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right|}_{\substack{(2.52) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (2.53)$$

completando a demonstração do item 3. .

□

Com estes resultados podemos demonstrar o:

Teorema 2.2.3 $C([a, b]; \mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Demonstração:

Lembremos que estamos supondo que $\alpha(b) > \alpha(a)$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhamos $\eta > 0$ tal que

$$\eta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}. \quad (2.54)$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ então a função f será uniformemente contínua em $[a, b]$ (pois $[a, b]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$).

Logo existirá $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, t \in [a, b], |x - t| < \delta \quad \text{então teremos} \quad |f(x) - f(t)| < \eta. \quad (2.55)$$

Consideremos uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ de modo que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tenhamos

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| < \delta. \quad (2.56)$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, como a função f é contínua em $[a, b]$ (em particular, em $[x_{i-1}, x_i]$ que é compacto) segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(s_i) = M_i, \quad (2.57)$$

ou seja, a função f assume o máximo e o mínimo absolutos em $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Com isto teremos

$$|M_i - m_i| = |f(s_i) - f(t_i)| \stackrel{|s_i - t_i| \leq |x_i - x_{i-1}|}{\stackrel{(2.56)}{<}} \delta \stackrel{(2.55)}{<} \eta. \quad (2.58)$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(M_i - m_i)}_{\substack{(2.58) \\ = |M_i - m_i| < \eta}} \Delta \alpha_i \\ &< \eta \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i = \underbrace{\eta}_{\substack{(2.54) \\ < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}}} [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração.

□

Temos também o:

Teorema 2.2.4 *Suponhamos que a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona em $[a, b]$ e que a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja monótona crescente e contínua em $[a, b]$.*

Então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Demonstração:

Lembremos, uma vez mais que estamos supondo que $\alpha(b) > \alpha(a)$.

Vamos exibir a demonstração para o caso em que a função f ser monótona crescente em $[a, b]$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(a) < f(b),$$

caso contrário a função f será constante (logo contínua em $[a, b]$) e, do Teorema anterior teremos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

A demonstração para o caso em que a função f é monótona decrescente em $[a, b]$ é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $N \in \mathbb{N}$, escolhamos uma partição $\mathcal{P}_N \doteq \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, de modo que

$$[f(b) - f(a)] \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\varepsilon} < N, \quad (2.60)$$

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \quad (2.61)$$

Notemos que a última condição é possível pois a função α é uma função contínua em $[a, b]$, em particular, em $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observemos também que

$$\underbrace{\alpha(x_0)}_{=\alpha(a)} < \underbrace{\alpha(x_0)}_{=\alpha(a)} + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \quad (2.62)$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} (N-1)\alpha(a) < (N-1)\alpha(b) &\Rightarrow N\alpha(a) - \alpha(a) < N\alpha(b) - \alpha(b) \\ &\Rightarrow N\alpha(a) + \alpha(b) - \alpha(a) < N\alpha(b) \\ &\Rightarrow \alpha(a) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} < \alpha(b), \end{aligned}$$

que juntamente com (2.62) implicará em

$$\alpha(a) < \alpha(x_0) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} < \alpha(b). \quad (2.63)$$

Logo como a função α é contínua em $[a, b]$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_1 \in [a, b]$ tal que

$$\alpha(x_1) = \alpha(\underbrace{x_0}_{=a}) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \quad (2.64)$$

Como a função α é monótona crescente em $[a, b]$ segue que $a = x_0 < x_1 \leq b$.

Com isto teremos

$$\alpha(a) = \alpha(x_0) < \alpha(x_1) \leq \alpha(b). \quad (2.65)$$

Se $x_1 = b$ nada mais temos a fazer, caso contrário, isto é, se $x_0 < x_1 < b$, notamos que

$$\alpha(x_1) < \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \quad (2.66)$$

Se

$$\alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} \geq \alpha(b), \quad (2.67)$$

consideraremos

$$x_2 \doteq b$$

e com isto, de (2.67), teremos

$$\alpha(x_2) - \alpha(x_1) = \alpha(b) - \alpha(x_1) \stackrel{(2.67)}{\leq} \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N},$$

e concluímos a construção da partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ satisfazendo (2.61).

Caso contrário, isto é, se

$$\alpha(x_1) < \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} < \alpha(b), \quad (2.68)$$

como a função α é contínua em $[x_1, b]$, segue, novamente, do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_2 \in [x_1, b]$ tal que

$$\alpha(x_2) = \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}.$$

Como a função α é monótona crescente em $[a, b]$ segue que $a = x_0 < x_1 < x_2 \leq b$.

Com isto teremos

$$\alpha(x_0) < \alpha(x_1) < \alpha(x_2) \leq \alpha(b). \quad (2.69)$$

Repetindo o argumento acima um número finito de vezes (devido a compacidade do intervalo $[a, b]$ e o fato que $\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} > 0$) obteremos a partição $\mathcal{P}$ satisfazendo (2.61).

Como a função f é monótona crescente segue que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ teremos

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad M_i = f(x_i). \quad (2.70)$$

Deste modo teremos

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n \underbrace{M_i}_{f(x_i)} \Delta - \sum_{i=1}^n \underbrace{m_i}_{f(x_{i-1})} \Delta \alpha_i \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \underbrace{\Delta \alpha_i}_{\leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}} \leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]}_{=f(b)-f(a)} \\ &\leq [f(b) - f(a)] \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} \stackrel{(2.60)}{<} \varepsilon \end{aligned} \quad (2.71)$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração. $\square$

Um outro resultado interessante é dado pela

Teorema 2.2.5 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$ que tem um número finito de pontos de descontinuidade e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente que é contínua em todos os pontos onde a função f é descontinua.*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Demonstração:

Seja $E \subseteq [a, b]$ o conjunto formado por todos os pontos onde a função f é descontínua (E é finito por hipótese).

Como a função f é limitada em $[a, b]$ existe

$$M \doteq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

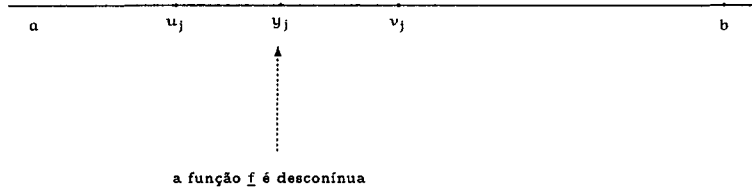
Dado $\varepsilon > 0$, como E é um conjunto finito e a função α é contínua em cada um dos pontos de E , podemos cobrir o conjunto E com um número finito de intervalos disjuntos, que denotaremos por $[u_j, v_j] \subseteq [a, b]$, $j \in \{1, \dots, m\}$, de modo que

$$\sum_{j=1}^m [\alpha(v_j) - \alpha(u_j)] < \frac{\varepsilon}{4M}. \quad (2.72)$$

De fato, suponhamos que (figura abaixo)

$$E = \{y_1, \dots, y_m\} \subseteq [a, b],$$

com $y_{j-1} < y_j$ para $j \in \{1, \dots, m\}$.



Vamos considerar o caso em que $a < y_1 < y_2 < b$.

Os outros casos serão deixados como exercício para o leitor.

Observemos que, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, como a função α é contínua em cada y_j , existe $\delta_j > 0$ tal que se

$$|x - y_j| < \delta_j \quad \text{deveremos ter} \quad |\alpha(x) - \alpha(y_j)| < \frac{\varepsilon}{8Mm}. \quad (2.73)$$

Seja

$$\delta \doteq \min \left\{ \frac{\delta_j}{2}, \frac{y_j - y_{j-1}}{4}, \frac{y_1 - a}{2}, \frac{b - y_m}{2}; j = 1, \dots, m \right\} > 0.$$

Consideremos

$$u_j \doteq y_j - \delta \quad \text{e} \quad v_j \doteq y_j + \delta. \quad (2.74)$$

Notemos que

$$y_1 + 2\delta \stackrel{\delta \leq \frac{y_2 - y_1}{4}}{\leq} y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \stackrel{y_1 < y_2}{<} \frac{y_2 + y_2}{2} = y_2,$$

ou seja,

$$v_1 = y_1 + \delta < y_2 - \delta = u_2.$$

De modo análogo, podemos mostrar que (deixaremos a elaboração do mesmo como exercício para o leitor)

$$v_j < u_{j+1}, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad \text{ou seja,} \quad a < u_j < v_j < u_{j+1} < v_{j+1} < b, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

logo, para $j = 1, \dots, m-1$, os intervalos $[u_j, v_j] \subseteq [a, b]$ são disjuntos.

Notemos que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ teremos:

$$|v_j - y_j| = |u_j - y_j| = \delta \leq \frac{\delta_j}{2} < \delta_j,$$

o que implicará, por (2.73), que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m [\alpha(v_j) - \alpha(u_j)] &= \sum_{j=1}^m \underbrace{[\alpha(v_j) - \alpha(y_j)]}_{\substack{(2.73) \\ < \frac{\varepsilon}{8Mm}}} + \sum_{j=1}^m \underbrace{[\alpha(y_j) - \alpha(u_j)]}_{\substack{(2.73) \\ < \frac{\varepsilon}{8Mm}}} \\ &< m \frac{\varepsilon}{8Mm} + m \frac{\varepsilon}{8Mm} = \frac{\varepsilon}{4M}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

mostrando (2.72).

Observemos também que, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ temos que $y_j \in [u_j, v_j]$ e assim teremos:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^m (u_j, v_j)$$

Além disso temos que o conjunto $K \doteq [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^m (u_j, v_j)$ será um subconjunto compacto de $[a, b]$.

Dessas duas observações segue que a restrição da função f ao conjunto K será uniformemente contínua, assim, existirá $\eta > 0$ tal que se

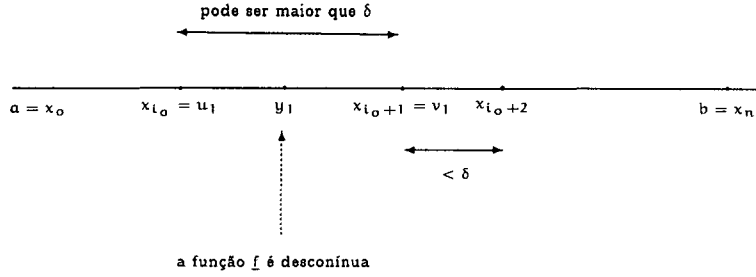
$$s, t \in K, \quad |s - t| < \eta \quad \text{deveremos ter} \quad |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}. \quad (2.76)$$

Vale observar que não temos, necessariamente:

$$v_j - u_{j+1} < \delta.$$

Devido a este fato, precisaremos considerar uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ construída da seguinte forma (veja figura abaixo):

- (i) para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ temos que $u_j \in \mathcal{P}$;
- (ii) para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ temos que $v_j \in \mathcal{P}$;
- (iii) para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ temos que $(u_j, v_j) \cap \mathcal{P} = \emptyset$;
- (iv) se $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ então $\Delta x_i < \delta$.



Notemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ teremos

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq K.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotemos por:

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Como, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, a função f é contínua em $[x_{i-1}, x_i]$ segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(s_i) = M_i. \quad (2.77)$$

Além disso, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ teremos:

$$M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq 2 \sup_{x \in [a, b]} f(x) = 2M,$$

ou seja,

$$M_i - m_i \leq 2M, \quad (2.78)$$

Lembremos que, de (iv), se $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ teremos $\Delta x_i < \delta$.

Nestes casos, da continuidade uniforme da função f em $[x_{i-1}, x_i] \subseteq K$, do fato que $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e de $\Delta x_i < \delta$, segue que

$$M_i - m_i = f(s_i) - f(t_i) < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}. \quad (2.79)$$

Logo

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i \\ &= \sum_{x_{i-1}=u_j \text{ para algum } j} (M_i - m_i) \Delta \alpha_i + \sum_{x_{i-1} \neq u_j, \forall j} (M_i - m_i) \Delta \alpha_i \\ &\leq 2M \sum_{x_{i-1}=u_j \text{ para algum } j} \Delta \alpha_i + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \sum_{x_{i-1} \neq u_j, \forall j} \Delta \alpha_i \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^m [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^m [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(a)] = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.80)$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, completando a demonstração. $\square$

Temos também o

Teorema 2.2.6 *Suponhamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$,*

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b],$$

e $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[m, M]$.

Consideremos $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$h(x) \doteq (\phi \circ f)(x), \quad x \in [a, b].$$

Então $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Demonstração:

Se a função ϕ for identicamente nula nada teremos a fazer, logo podemos supor, sem perda de generalidade, que a função ϕ não é identicamente nula em $[m, M]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como a função ϕ é contínua em $[m, M]$, que é compacto em $\mathbb{R}$, segue que ela será uma função limitada e uniformemente contínua em $[m, M]$, ou seja, existirá

$$K \doteq \sup_{y \in [m, M]} |\phi(y)| > 0. \quad (2.81)$$

e existirá $\delta > 0$, com

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}, \quad (2.82)$$

tal que se

$$s, t \in [m, M], \quad |s - t| < \delta \quad \text{deveremos ter} \quad |\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}. \quad (2.83)$$

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, existirá uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \frac{\delta^2}{2K}. \quad (2.84)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, denotemos, por:

$$\begin{aligned} m_i &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ m_i^* &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) \quad \text{e} \quad M_i^* \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x), \\ A &\doteq \{i \in \{1, \dots, n\} ; M_i - m_i < \delta\} \\ B &\doteq \{i \in \{1, \dots, n\} ; M_i - m_i \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Notemos que $A \cap B = \emptyset$.

Se $i \in A$ teremos

$$\begin{aligned} M_i^* &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi(f(x)) \stackrel{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) \\ m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi(f(x)) \stackrel{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\geq} \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y), \end{aligned}$$

logo segue que

$$M_i^* - m_i^* \leq \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) - \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y).$$

Por outro lado, se $y, z \in [m_i, M_i]$, como $M_i - m_i < \delta$ (pois $i \in A$) segue que

$$|y - z| < \delta, \quad \text{e (2.83) implicará} \quad -\frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} < \phi(y) - \phi(z) < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}.$$

Tomando-se o supremo, para $y \in [m_i, M_i]$, e o ínfimo, para $z \in [m_i, M_i]$, na desigualdade acima, obteremos:

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \leq M_i^* - m_i^* \leq \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}, \quad (2.85)$$

para $i \in A$.

Por outro lado, se $i \in B$ teremos

$$M_i^* - m_i^* \leq K + K = 2K, \quad (2.86)$$

logo

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in B} \Delta \alpha_i &\stackrel{i \in B \Rightarrow \delta \leq M_i - m_i}{\leq} \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i \\ &= U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \stackrel{(2.84)}{<} \frac{\delta^2}{2K}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i \in B} \Delta \alpha_i < \frac{\delta}{2K}. \quad (2.87)$$

Portanto

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, h, \alpha) - L(\mathcal{P}, h, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n m_i^* \Delta \alpha_i = \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta \alpha_i - \sum_{i=1}^n (M_i^* - m_i^*) \Delta \alpha_i \\ &= \sum_{i \in A} \underbrace{(M_i^* - m_i^*)}_{\stackrel{(2.85)}{< \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}}} \Delta \alpha_i - \sum_{i \in B} \underbrace{(M_i^* - m_i^*)}_{\stackrel{(2.86)}{\leq 2K}} \Delta \alpha_i \\ &< \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \underbrace{\sum_{i \in A} \Delta \alpha_i}_{\leq \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i} + 2K \underbrace{\sum_{i \in B} \Delta \alpha_i}_{\stackrel{(2.87)}{< \frac{\delta}{2K}}} \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i}_{= \alpha(b) - \alpha(a)} + 2K \frac{\delta}{2K} = \frac{\varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)]}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} + \underbrace{\delta}_{\stackrel{(2.82)}{< \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}}} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $h \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração. □

2.3 Propriedades da integral de Riemann-Stieltjes

Temos as seguintes propriedades básicas da integral de Riemann-Stieltjes em um intervalo $[a, b]$:

Proposição 2.3.1 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas em $[a, b]$, $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções monótonas crescentes em $[a, b]$. Com isto teremos:*

1. Se $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ então $(f + g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso

$$\int_a^b (f + g) d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha.$$

2. Se $c \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ então $(cf) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso

$$\int_a^b (cf) d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

3. $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ é tal que

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b]$$

então

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha.$$

4. Se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e $c \in (a, b)$ então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, c]$ e em $[c, b]$.

Além disso

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

5. Se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in [a, b]$$

então

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

6. Se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ e $f \in \mathfrak{R}(\beta)$ em $[a, b]$ então $f \in \mathfrak{R}(\alpha + \beta)$ em $[a, b]$.

Além disso

$$\int_a^b f d(\alpha + \beta) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta.$$

7. Se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ e $c > 0$ então $f \in \mathfrak{R}(c\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

Demonstração:

De 1.:

Denotemos por

$$\begin{aligned} m_i &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), & M_i &\doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ n_i &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x), & N_i &\doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x), \\ m_i^* &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x), & M_i^* &\doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x). \end{aligned}$$

Observemos que

$$m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) = m_i + n_i \quad (2.88)$$

$$M_i^* = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f+g)(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) = M_i + N_i \quad (2.89)$$

Observemos que dado $\varepsilon > 0$, como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue que existem partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ do intervalo $[a, b]$ tais que

$$U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) - L(\mathcal{P}_f, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.90)$$

$$U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) - L(\mathcal{P}_g, g, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.91)$$

Notemos que se $\mathcal{P} \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + L(\mathcal{P}, g, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^n n_i \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n (m_i + n_i) \Delta\alpha_i \\ &\stackrel{(2.88)}{\leq} \sum_{i=1}^n m_i^* \Delta\alpha_i = L(\mathcal{P}, f+g, \alpha), \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) + U(\mathcal{P}, g, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^n N_i \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n (M_i + N_i) \Delta\alpha_i \\ &\stackrel{(2.89)}{\geq} \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f+g, \alpha) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Seja $\mathcal{P}^*$ o refinamento comum das partições $\mathcal{P}_f$ e $\mathcal{P}_g$ do intervalo $[a, b]$ (ou seja, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$). Logo

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) &\stackrel{(2.93) \bullet (2.92)}{\leq} [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] - [L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\ &= [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha)] + [U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\ &\stackrel{\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \subseteq \mathcal{P}^*, (2.29) \bullet (2.30)}{\leq} \underbrace{[U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) - L(\mathcal{P}_f, f, \alpha)]}_{\stackrel{(2.90)}{< \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{[U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) - L(\mathcal{P}_g, g, \alpha)]}_{\stackrel{(2.91)}{< \frac{\varepsilon}{2}}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $(f+g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

Como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da definição de ínfimo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) &< \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \\ U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) &< \int_a^b g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, teremos

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \stackrel{\mathcal{P}_f \subseteq \mathcal{P}^*, (2.30))}{\leq} U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) < \int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.94)$$

$$U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \stackrel{\mathcal{P}_g \subseteq \mathcal{P}^*, (2.30))}{\leq} U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) < \int_a^b g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.95)$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) \, d\alpha &\leq U(\mathcal{P}^*, f + g, \alpha) \stackrel{(2.93)}{\leq} U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \\ &\stackrel{(2.94) \text{ e } (2.95)}{\leq} \left(\int_a^b f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(\int_a^b g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha + \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, assim deveremos ter

$$\int_a^b (f + g) \, d\alpha \leq \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha. \quad (2.96)$$

Por outro lado, como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da definição de supremo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$L(\mathcal{P}_f, f, \alpha) > \int_a^b f \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad L(\mathcal{P}_g, g, \alpha) > \int_a^b g \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.97)$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, teremos

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \stackrel{(2.29)}{\geq} L(\mathcal{P}_f, f, \alpha) \stackrel{(2.97)}{>} \int_a^b f \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.98)$$

$$L(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \stackrel{(2.29)}{\geq} L(\mathcal{P}_g, g, \alpha) \stackrel{(2.97)}{>} \int_a^b g \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.99)$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) \, d\alpha &\geq L(\mathcal{P}^*, (f + g), \alpha) \stackrel{(2.92)}{\geq} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + L(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \\ &\stackrel{(2.98) \text{ e } (2.99)}{>} \left(\int_a^b f \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left(\int_a^b g \, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Portanto de (2.96) e (2.100) segue que

$$\int_a^b (f + g) \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha,$$

completando a demonstração do item 1. .

Deixaremos a elaboração das demonstrações dos itens 2., 3., 4., 5., 6. e 7. como exercício para o leitor. $\square$

Como consequência temos o:

Corolário 2.3.1 Se $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ então:

1. $f.g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$;
2. $|f| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| \, d\alpha. \quad (2.101)$$

Demonstração:

De 1.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como a função ϕ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{f^2(x)}, \quad x \in [a, b]$$

está em $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja, $f^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$. (*)

Observemos que

$$f.g = \frac{1}{4} \left[(f+g)^2 - (f-g)^2 \right]. \quad (2.102)$$

Como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da Proposição acima que $(f+g), (f-g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Logo, de (*) segue que $(f+g)^2, (f-g)^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e novamente da Proposição acima e de (2.102), teremos que $f.g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq |t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como a função ϕ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{=|f(x)|}, \quad x \in [a, b]$$

está em $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja, $|f| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso, se considerarmos $c = 1$ ou $c = -1$ de modo que

$$c \int_a^b f \, d\alpha \geq 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \, d\alpha \right| &= c \int_a^b f \, d\alpha \stackrel{\text{Prop. (2.3.1) item 2.}}{=} \int_a^b (cf) \, d\alpha \\ &\stackrel{cf \leq |f| \text{ e Prop. (2.3.1) item 3.}}{\leq} \int_a^b |f| \, d\alpha, \end{aligned}$$

completando a demonstração do item 2. .

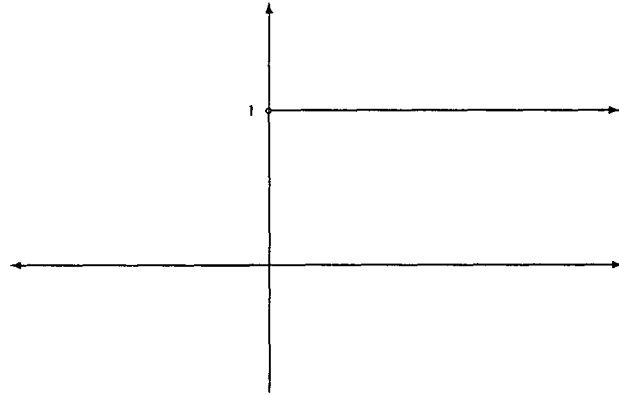
□

A seguir consideraremos um exemplo importante, a saber:

Definição 2.3.1 A função $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

será denominada função degrau unitário.



Com isto temos a

Proposição 2.3.2 Sejam $s \in (a, b)$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $[a, b]$ e contínua em s .

Consideremos a função $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(x) \doteq I(x - s), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.103)$$

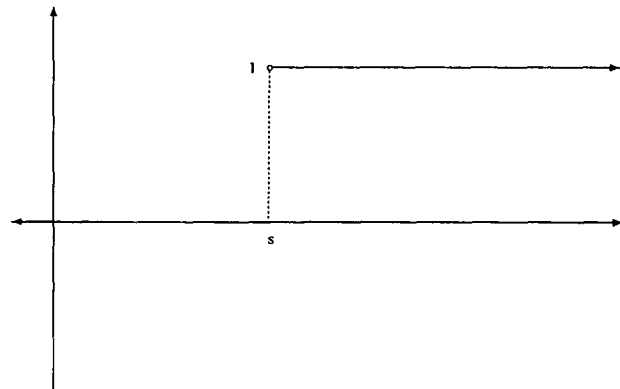
onde a função I é a função degrau unitário.

Então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f \, d\alpha = f(s). \quad (2.104)$$

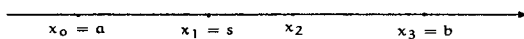
Demonstração:

A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função α :



Observemos que a função α é monótona crescente em $\mathbb{R}$, em particular em $[a, b]$. Consideremos $\mathcal{P}_0 \doteq \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$, a seguinte partição do intervalo $[a, b]$:

$$x_0 \doteq a, \quad x_1 \doteq s, \quad x_3 \doteq b \quad \text{e} \quad x_2 \in (x_1, x_3) = (s, b).$$



Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, definamos

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Logo

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_0, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^3 M_i \Delta \alpha_i \\ &= M_1 [\underbrace{\alpha(x_1)}_{=s} - \underbrace{\alpha(x_0)}_{=a}] + M_2 [\alpha(x_2) - \underbrace{\alpha(x_1)}_{=s}] + M_3 [\underbrace{\alpha(x_3)}_{=b} - \alpha(x_2)] \\ &= M_1 [\underbrace{\alpha(s)}_{=0} - \underbrace{\alpha(a)}_{=0}] + M_2 [\underbrace{\alpha(x_2)}_{=1} - \underbrace{\alpha(s)}_{=0}] + M_3 [\underbrace{\alpha(b)}_{=1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{=1}] \\ &= M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x). \end{aligned} \tag{2.105}$$

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}_0, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^3 m_i \Delta \alpha_i \\ &= m_1 [\underbrace{\alpha(x_1)}_{=s} - \underbrace{\alpha(x_0)}_{=a}] + m_2 [\alpha(x_2) - \underbrace{\alpha(x_1)}_{=s}] + m_3 [\underbrace{\alpha(x_3)}_{=b} - \alpha(x_2)] \\ &= m_1 [\underbrace{\alpha(s)}_{=0} - \underbrace{\alpha(a)}_{=0}] + m_2 [\underbrace{\alpha(x_2)}_{=1} - \underbrace{\alpha(s)}_{=0}] + m_3 [\underbrace{\alpha(b)}_{=1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{=1}] \\ &= m_2 = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Como a função f é contínua em s , segue que (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) quando

$$x_2 \rightarrow s = x_1, \quad \text{segue que} \quad M_2 = \sup_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ = [s, x_2]}} f(x), \quad m_2 = \inf_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ = [s, x_2]}} f(x) \rightarrow f(s). \tag{2.107}$$

Logo

$$m_2 = \underbrace{L(\mathcal{P}_0, f, \alpha)}_{\stackrel{(2.106)}{=} m_2} \leq \underbrace{\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha)}_{= \int_a^b f d\alpha} \stackrel{(2.17)}{\leq} \underbrace{\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha)}_{= \int_a^b f d\alpha} \leq \underbrace{U(\mathcal{P}_0, f, \alpha)}_{\stackrel{(2.105)}{=} M_2} = M_2, \tag{2.108}$$

ou ainda,

$$\inf_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ = [s, x_2]}} f(x) = m_2 = \int_a^b f d\alpha \stackrel{(2.108)}{\leq} \int_a^b f d\alpha \stackrel{(2.108)}{\leq} M_2 = \sup_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ = [s, x_2]}} f(x), \tag{2.109}$$

para todo $x_2 \in (x_1, x_3) = (s, b)$.

Fazendo $x_2 \rightarrow s$ nas desigualdades acima e utilizando (2.107) obteremos

$$f(s) \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^{\overline{b}} f d\alpha \leq f(s),$$

assim

$$f(s) = \int_a^b f d\alpha = \int_a^{\overline{b}} f d\alpha,$$

mostrando que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e (2.104), completando a demonstração. □

Como consequência temos o

Corolário 2.3.2 *Suponhamos que $c_n \geq 0$ e $s_n \in (a, b)$, para $n \in \{1, \dots, N\}$ satisfazendo $s_n < s_{n+1}$, para $n \in \{1, \dots, N-1\}$.*

Consideremos $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^N c_n I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.110)$$

Se, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$, a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em s_n então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^N c_n f(s_n). \quad (2.111)$$

Demonstração:

Observemos que a função α é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se $x_1 \leq x_2$ teremos, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n),$$

logo

$$\alpha(x_1) = \sum_{n=1}^N c_n I(x_1 - s_n) \stackrel{0 \leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^N c_n I(x_2 - s_n) = \alpha(x_2).$$

Logo, para completar a demonstração basta aplicar a Proposição (2.3.1) itens 1. e 2. e a Proposição acima a cada uma das parcelas e assim obteremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\alpha &= \int_a^b \sum_{n=1}^N c_n I(\cdot - s_n) d\alpha \stackrel{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \sum_{n=1}^N c_n \underbrace{\int_a^b I(\cdot - s_n) d\alpha}_{\stackrel{(2.104)}{=} f(s_n)} \\ &= \sum_{n=1}^N c_n f(s_n), \end{aligned} \quad (2.112)$$

completando a demonstração. □

Podemos estender esse resultado, como afirma a:

Proposição 2.3.3 *Suponhamos que $c_n \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ é tal que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$ e $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de pontos distintos em (a, b) .*

Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.113)$$

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \quad (2.114)$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \neq 0$, caso contrário (isto é, se $f = 0$) o resultado segue trivialmente.

Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ temos

$$|c_n I(x - s_n)| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

e como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$ segue que a função α está bem definida em $\mathbb{R}$, (na verdade, do Teste M de Weierstrass, segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$).

Observemos que a função α é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se $x_1 \leq x_2$ teremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n),$$

logo

$$\alpha(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x_1 - s_n) \stackrel{0 \leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x_2 - s_n) = \alpha(x_2).$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \stackrel{f \text{ é cont. em } [a, b]}{=} \max_{x \in [a, b]} |f(x)| > 0. \quad (2.115)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.116)$$

Definamos $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\alpha_1(x) \doteq \sum_{n=1}^{N_0} c_n I(x - s_n) \quad \text{e} \quad \alpha_2 \doteq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} c_n I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.117)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\alpha(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(a - s_n)}_{=0, \text{ pois } a < s_n, \forall n \in \mathbb{N}} = 0, \\ \alpha(b) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b - s_n)}_{=1, \text{ pois } s_n < b, \forall n \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\end{aligned}\quad (2.118)$$

Como a função f é contínua em $[a, b]$ e as funções α_1 e α_2 são monótonas crescentes em $[a, b]$ segue do Teorema (2.2.3) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap \mathfrak{R}(\alpha_2)$ em $[a, b]$.

Além disso,, do Corolário acima segue que

$$\int_a^b f d\alpha_1 \stackrel{(2.111)}{=} \sum_{n=1}^{N_0} c_n f(s_n). \quad (2.119)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\alpha_2(b) - \underbrace{\alpha_2(a)}_{=0 \text{ pois } a < s_n, \forall n \in \mathbb{N}} &= \alpha_2(b) = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b - s_n)}_{=1, \text{ pois } s_n < b, \forall n \in \mathbb{N}} \\ &= \sum_{n=N_0+1}^{\infty} c_n \stackrel{(2.117)}{<} \frac{\varepsilon}{M}.\end{aligned}\quad (2.120)$$

Por outro lado, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ segue, da Proposição (2.3.1) item 5., que

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| [\alpha_2(b) - \alpha_2(a)]}_{=M} \stackrel{(2.120)}{<} M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \quad (2.121)$$

Mas

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

logo, da Proposição (2.3.1) item 6., segue que

$$\begin{aligned}\left| \underbrace{\int_a^b f d\alpha}_{\text{Prop. (2.3.1) item 6. } \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2} - \sum_{i=1}^{N_0} c_i f(s_i) \right| &= \left| \underbrace{\int_a^b f d\alpha_1}_{\stackrel{(2.119)}{=} \sum_{i=1}^{N_0} c_i f(s_i)} + \int_a^b f d\alpha_2 - \sum_{i=1}^{N_0} c_i f(s_i) \right| \\ &= \left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \stackrel{(2.121)}{<} \varepsilon,\end{aligned}\quad (2.122)$$

mostrando que a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$ é convergente e sua soma será $\int_a^b f d\alpha$, completando a demonstração. $\square$

A seguir temos um resultado que relaciona a integral de Riemann com a integral de Riemann-Stieltjes, a saber:

Teorema 2.3.1 *Sejam $f, \alpha : [a, b]$ funções definidas em $[a, b]$ tais que a função f é uma função limitada em $[a, b]$ e a função α é monótona crescente, diferenciável em $[a, b]$ e além disso α' é uma função Riemann integrável em $[a, b]$ (ou seja, $\alpha' \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$).*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ se, e somente se, $f\alpha' \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$.

Neste caso teremos:

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx. \quad (2.123)$$

Demonstração:

Seja

$$M \doteq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (2.124)$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\alpha' \in \mathfrak{R}$, do Corolário (2.2.1) (tomado-se naquele resultado $\alpha(x) = x$, $x \in [a, b]$ e utilizando a Observação (2.2.4) item 4.), segue que existe uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, \alpha') - L(\mathcal{P}, \alpha') < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.125)$$

Definamos, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} M_i &\doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\ M_i^* &\doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f\alpha')(x). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Observemos que a função α' está definida em $[a, b]$, logo a função α deverá ser contínua em $[a, b]$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, aplicando-se o Teorema do Valor Médio à função α no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, obteremos $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ de modo que

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \stackrel{\text{Teor. Valor Médio}}{=} \alpha'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha'(t_i)\Delta x_i. \quad (2.127)$$

Temos também que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ segue, de (2.125) e do Teorema (2.2.2) item 2. (tomando-se naquele $\alpha(x) \doteq x$, $x \in [a, b]$), que

$$\sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.128)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^n f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) [\Delta\alpha_i - \alpha'(s_i)\Delta x_i] \right| \\ &\stackrel{(2.127)}{=} \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) [\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)] \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \underbrace{|f(s_i)|}_{\stackrel{(2.124)}{\leq} M} |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| \Delta x_i \\ &\leq M \underbrace{\sum_{i=1}^n |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| \Delta x_i}_{\stackrel{(2.128)}{<} \frac{\varepsilon}{M}} < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Em particular, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta \alpha_i &< \sum_{i=1}^n \underbrace{f(s_i) \alpha'(s_i)}_{\leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f \alpha')(x) = M_i^*} \Delta x_i + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta x_i + \varepsilon = U(\mathcal{P}, f \alpha') + \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i &< \sum_{i=1}^n \underbrace{f(s_i)}_{\leq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = M_i} \Delta \alpha_i + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i + \varepsilon = U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.129), o supremo para $s \in [x_{i-1}, x_i]$, obteremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(s_i) \Delta \alpha_i &\leq U(\mathcal{P}, f \alpha') + \varepsilon, \\ &= \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta \alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) \end{aligned}$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f \alpha') + \varepsilon. \quad (2.131)$$

De modo semelhante, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.130), o supremo para $s \in [x_{i-1}, x_i]$, obteremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i &\leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon, \\ &= \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f \alpha') \end{aligned}$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f \alpha') \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon. \quad (2.132)$$

Portanto de (2.131) e (2.132) segue que

$$U(\mathcal{P}, f \alpha') - \varepsilon \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f \alpha') + \varepsilon \quad (2.133)$$

Notemos também que (2.125) ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ por uma partição que é um refinamento da mesma, implicando que (2.133) também ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ por uma outra partição que é um refinamento da mesma.

Logo tomando-se o ínfimo em (2.133) sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ obteremos:

$$\int_a^b f(x) \alpha'(x) dx \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx + \varepsilon, \quad (2.134)$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ teremos

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx \right| < \varepsilon,$$

mostrando que

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx. \quad (2.135)$$

De modo semelhante mostra-se que (exercício para o leitor)

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx. \quad (2.136)$$

Finalmente, notamos que

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{R}(\alpha) \text{ em } [a, b] &\Leftrightarrow \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha \stackrel{(2.135)}{\Leftrightarrow} \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx \\ &\Leftrightarrow (f\alpha') \in \mathfrak{R} \text{ em } [a, b]. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Além disso, neste caso, teremos a validade de (2.124), completando a demonstração do resultado. $\square$

Temos também um resultado que trata da mudança de variáveis na integral de Riemann-Stieltjes, mas precisamente:

Teorema 2.3.2 *Seja $\phi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua e estritamente crescente em $[a, b]$.*

Suponhamos que a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja monótona crescente em $[a, b]$ e a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente à função α .

Consideremos as funções $\beta, g : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(y) \doteq f(\phi(y)), \quad \beta(y) \doteq \alpha(\phi(y)), \quad y \in [A, B]. \quad (2.138)$$

Então $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ e

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha. \quad (2.139)$$

Demonstração:

Notemos que a função ϕ será bijetora e assim, do Teorema da Continuidade da Função Inversa, segue que a função ϕ admitirá função inversa $\phi^{-1} : [a, b] \rightarrow [A, B]$ que também será uma função estritamente crescente e contínua em $[a, b]$.

Como as funções α é monótona crescente em $[a, b]$ e a função ϕ é monótona crescente em $[A, B]$, segue que a função $\beta = \alpha \circ \phi$ também será monótona crescente em $[A, B]$.

Além disso, como a função f é limitada em $[a, b]$ e a função ϕ é contínua em $[A, B]$, que é um compacto de $\mathbb{R}$ (logo $\phi([A, B])$ é limitado), segue que a função g será limitada em $[A, B]$.

Notemos que se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$, como a função ϕ é estritamente crescente em $[A, B]$, seguirá que

$$\mathcal{Q} \doteq \{y_0 \doteq \phi^{-1}(a) = A, y_1 \doteq \phi^{-1}(x_1), \dots, y_{n-1} \doteq \phi^{-1}(x_{n-1}), y_n \doteq \phi^{-1}(b) = B\} \subseteq [A, B] \quad (2.140)$$

será uma partição do intervalo $[A, B]$ e reciprocamente, ou seja, a cada partição do intervalo $[a, b]$ corresponderá uma partição do intervalo $[A, B]$, por meio da função (bijetora estritamente crescente em $[a, b]$) ϕ e reciprocamente.

Notemos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$s \in [y_{i-1}, y_i] \quad \text{se, e somente, se} \quad t = \phi(s) \in [x_{i-1}, x_i].$$

Com isto teremos

$$U(\mathcal{Q}, g, \beta) = U(\mathcal{P}, f, \alpha), \quad (2.141)$$

$$L(\mathcal{Q}, g, \beta) = L(\mathcal{P}, f, \alpha). \quad (2.142)$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, pelo Corolário (2.2.1), segue que existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon. \quad (2.143)$$

Logo, tomando-se a partição $\mathcal{Q} \doteq \phi(\mathcal{P})$ do intervalo $[A, B]$ (como em (2.140)), de (2.141) e (2.142), teremos

$$0 \leq \underbrace{U(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{U(\mathcal{P}, f, \alpha)} - \underbrace{L(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{L(\mathcal{P}, f, \alpha)} < \varepsilon, \quad (2.144)$$

que, pelo Corolário (2.2.1), implicará $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ em $[A, B]$.

Além disso, tomando-se o ínfimo no lado esquerdo de (2.141) sobre todas as partições de $[a, b]$ e no lado direito de (2.141) sobre todas as partições de $[A, B]$ obteremos:

$$\underbrace{\int_a^b f \, d\alpha}_{=\int_a^b f \, d\alpha} = \underbrace{\int_A^B g \, d\beta}_{=\int_A^B g \, d\beta} \Rightarrow \int_a^b f \, d\alpha = \int_A^B g \, d\beta,$$

mostrando (2.139) e completando a demonstração do resultado. □

Observação 2.3.1 *Notemos que se a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$\alpha(x) \doteq x, \quad x \in [a, b]$$

então tomando-se a função $\beta : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(y) \doteq \phi(y), \quad y \in [A, B],$$

teremos que se a função $\phi : [A, B] \rightarrow [a, b]$ é estritamente crescente, diferenciável em $[A, B]$ e $\phi' \in \mathfrak{R}$ em $[A, B]$ então o resultado acima juntamente com o Teorema (2.3.1) implicarão em:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_A^B f(\phi(y)) \phi'(y) \, dy,$$

que é um resultado importante do Cálculo 1 e nos diz como fazer para mudar de variáveis na integral definida (ou seja, na integral de Riemann em intervalos fechados e limitados).

De fato,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &\stackrel{\text{Teor. (2.3.1) com } \alpha(x)=x}{=} \int_a^b f \, d\alpha \stackrel{(2.139)}{=} \int_A^B g \, d\beta \\ &\stackrel{g=\phi \circ f, \beta=\phi, A=\phi^{-1}(a), B=\phi^{-1}(b)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f \circ \phi) \, d\phi \stackrel{\text{Teor. (2.3.1) com } \alpha(x)=\phi(x)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f \circ \phi)(x) \phi'(x) \, dx, \end{aligned}$$

mostrando a identidade acima.

2.4 Relações ente integração e diferenciação

Começaremos com o Teorema Fundamental do Cálculo, a saber:

Teorema 2.4.1 *Seja $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$.*

Consideremos a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (2.145)$$

Então a função F é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Além disso, se a função f for contínua em $x_0 \in [a, b]$ então a função F será diferenciável em $x_0 \in [a, b]$ e além disso

$$F'(x_0) = f(x_0). \quad (2.146)$$

Demonstração:

Como $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ segue que a função f é limitada em $[a, b]$, logo existe $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M, \quad t \in [a, b].$$

Notemos que, para cada $a \leq x < y \leq b$, da Proposição (2.3.1) item 4., segue que $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, x]$ e em $[a, y]$, logo a função F está bem definida e além disso teremos:

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \stackrel{\text{Prop. (2.3.1)}}{=} \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \\ &\leq M|y - x|. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{M} > 0. \quad (2.148)$$

Assim, se

$$|y - x| < \delta \quad \text{teremos, por (2.147), que} \quad |F(y) - F(x)| \stackrel{(2.147)}{\leq} M \underbrace{|y - x|}_{< \delta} M \delta \stackrel{(2.148)}{=} M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

mostrando que a função F é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Se a função f for contínua em $x_0 \in [a, b]$ então, dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que se

$$|t - x_0| < \delta \quad \text{teremos} \quad |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Suponhamos que $x_0 < t < x_0 + \delta$.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_a^t f(s) ds - \int_a^{x_0} f(s) ds}{t - x_0} - \frac{\int_{x_0}^t f(x_0) ds}{t - x_0} \right| \\ &\stackrel{\text{Prop. (2.3.1)}}{=} \left| \frac{\int_{x_0}^t f(s) ds - \int_{x_0}^t f(x_0) ds}{t - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^t [f(s) - f(x_0)] ds}{t - x_0} \right| \\ &\leq \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t \underbrace{|f(s) - f(x_0)|}_{< \varepsilon, \text{ pois } |s - x_0| \leq |t - x_0| < \delta} ds < \frac{1}{t - x_0} \varepsilon(t - x_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow x_0^+} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0),$$

mostrando que a função F é diferenciável à direita de $x_0 \in (a, b]$.

De modo semelhante podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que

$$\lim_{t \rightarrow x_0^-} \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} = f(x_0),$$

mostrando que a função F é diferenciável à esquerda de $x_0 \in [a, b)$ que juntamente como o que fizemos acima mostrará que a função F é diferenciável em $[a, b]$ e que vale (2.146), completando a demonstração do resultado. $\square$

Como consequência temos o (também conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo):

Teorema 2.4.2 *Seja $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ e $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.149)$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ como $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$, do Teorema (2.2.2) item 3. (e da Observação (2.2.4) item 4.), segue que existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ tal que se, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escolhermos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Por outro lado, como a função F é diferenciável em $[a, b]$ seguirá que ela será uma função (uniformemente) contínua em $[a, b]$.

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, do Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, segue que existirá $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = \underbrace{F'(t_i)}_{=f(t_i)} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\Delta x_i} = f(t_i) \Delta x_i. \quad (2.150)$$

Assim teremos

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \stackrel{(2.150)}{=} \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \stackrel{\text{Soma telescópica}}{=} F(b) - F(a). \quad (2.151)$$

Assim teremos

$$\left| [F(b) - F(a)] - \int_a^b f(x) dx \right| \stackrel{(2.151)}{=} \left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (2.152)$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx = 0,$$

mostrando que identidade (2.149) e completando a demonstração do resultado. $\square$

Podemos mostrar um resultado relacionado com a integração por partes para integrais de Riemann, mais precisamente:

Teorema 2.4.3 *Suponhamos que as funções $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis em $[a, b]$ e que as funções $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por*

$$f(x) \doteq F'(x), \quad g(x) = G'(x), \quad x \in [a, b].$$

Então a $Fg, fG \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b F(x)g(x) \, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) \, dx, \quad (2.153)$$

ou seja,

$$\int_a^b F(x)G'(x) \, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)G(x) \, dx, \quad (2.154)$$

Demonstração:

Como as funções F, G são continuamente diferenciáveis em $[a, b]$ segue que as funções f, g serão funções contínuas em $[a, b]$, logo as funções Fg e fG serão funções contínuas em $[a, b]$ e assim, pelo Teorema (2.2.3), elas serão funções Riemann integráveis em $[a, b]$.

Consideremos a função $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) \doteq F(x)G(x), \quad x \in [a, b]$$

que será continuamente diferenciável em $[a, b]$.

Temos que $H \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ (pois é, em particular, uma função contínua em $[a, b]$) e como

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e F', G' são funções contínuas em $[a, b]$ segue que $H' \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$.

Logo do Teorema (2.4.2) segue que

$$\int_a^b H'(x) \, dx = H(b) - H(a) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Mas

$$\int_a^b H'(x) \, dx = \int_a^b \underbrace{[F'(x)G(x)]}_{=f(x)} + \underbrace{F(x)G'(x)}_{=g(x)} \, dx = \int_a^b f(x)G(x) \, dx + \int_a^b F(x)g(x) \, dx,$$

ou seja,

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b f(x)G(x) \, dx + \int_a^b F(x)g(x) \, dx,$$

de onde podemos obter (2.154), completando a demonstração do resultado. $\square$

2.5 Integração de funções vetoriais

Começaremos com a

Definição 2.5.1 Consideremos a função vetorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ cujas funções componentes são as funções $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para $j \in \{1, \dots, n\}$, e a função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona crescente em $[a, b]$.

Diremos que a função vetorial f é Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, indicando por $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ se, e somente se, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $f_j \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Neste caso, definiremos a integral de Riemann-Stieltjes da função f em $[a, b]$, indicada por $\int_a^b f d\alpha$, como sendo a k -upla:

$$\int_a^b f d\alpha \doteq \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \dots, \int_a^b f_n d\alpha \right) \in \mathbb{R}^k. \quad (2.155)$$

Observação 2.5.1

1. A definição acima nos diz que uma função definida no intervalo $[a, b]$ a valores vetoriais será Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente à função α , se, e somente se, cada função componente associada à mesma for uma função Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$, relativamente à função α .

Neste caso a integral de Riemann-Stieltjes da função vetorial no intervalo $[a, b]$ será obtida integrando-se cada uma das funções componentes associadas à mesma.

2. Diremos que a função vetorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função limitada em $[a, b]$ se existir $M > 0$ tal que

$$\|f(x)\| \leq M, \quad x \in [a, b],$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^k$, isto é,

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| \doteq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função vetorial, cujas funções componentes são as funções $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para $j \in \{1, \dots, n\}$, e $x_0 \in (a, b)$.

Diremos que a função f é diferenciável em x_0 se para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ a função componente f_j é uma função diferenciável em x_0 .

Neste caso definimos a derivada da função f em x_0 , que será indicada por $f'(x_0)$, como sendo

$$f'(x_0) \doteq (f'_1(x_0), \dots, f'_n(x_0)) \in \mathbb{R}^k.$$

Com isto temos a:

Proposição 2.5.1

1. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ funções vetoriais, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente em $[a, b]$ com $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ então $(f + g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f + g) d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha;$$

2. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ função vetorial, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente em $[a, b]$ com $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$ então $(cf) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (cf) d\alpha = c \int_a^b f d\alpha;$$

3. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ função vetorial, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente em $[a, b]$ com $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e $c \in [a, b]$ então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, c]$ e em $[c, b]$ e

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha;$$

4. Se as funções $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são monótonas crescentes em $[a, b]$ e a função vetorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisfaz $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ em $[a, b]$ então $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2;$$

5. Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona crescente em $[a, b]$, a função vetorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ satisfaz $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e $c \geq 0$ então $f \in \mathfrak{R}(c\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha;$$

6. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e monótona crescente em $[a, b]$ tal que $\alpha' \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função vetorial limitada em $[a, b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ se, e somente se, $f\alpha' \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$.

Neste caso teremos

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

7. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona crescente em $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função vetorial tal que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e definamos a função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ por

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Então a função vetorial F será contínua em $[a, b]$.

Além disso, se a função f vetorial for contínua em $x_0 \in [a, b]$ então a função vetorial F será diferenciável em $x_0 \in [a, b]$ e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

8. Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona crescente em $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função tal que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e exista uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciável em $[a, b]$ tal que

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração:

Para demonstrar os itens 1. até 5. basta aplicar os itens 1., 2., 4., 6. e 7. da Proposição (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar o item 6. basta aplicar o Teorema (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar os itens 7. e 8. basta aplicar, respectivamente, os Teoremas (2.4.1) e (2.4.2), a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1), completando a demonstração do resultado. $\square$

Um outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 2.5.2 *Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona crescente em $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ função vetorial tal que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.*

Então $\|f\| \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ e

$$\left\| \int_a^b f \, d\alpha \right\| \leq \int_a^b \|f\| \, d\alpha, \quad (2.156)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^k$ (veja Observação (2.5.1) item 2.).

Demonstração:

Observemos que se as funções componentes da função vetorial f são as funções $f_j; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para $j \in \{1, \dots, n\}$ então

$$\|f(x)\| = \sqrt{[f_1(x)]^2 + \dots + [f_n(x)]^2}, \quad x \in [a, b].$$

Notemos que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ temos que $f_j \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, logo do Corolário (2.3.1) item 1., segue que $f_j^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Logo para Proposição (2.3.1) item 1., segue que $F \doteq \sum_{j=1}^n f_j^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Consideremos $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq \sqrt{t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Notemos que

$$\|f(x)\| = \sqrt{F(x)} = (\phi \circ F)(x), \quad x \in [a, b].$$

Como a função ϕ é contínua em $[0, \infty)$ e $F \in \mathfrak{R}(\alpha)$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ F)(x)}_{=\|f(x)\|}, \quad x \in [a, b]$$

pertencerá a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja, $\|f\| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, como afirmamos.

Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, definamos

$$y_j \doteq \int_a^b f_j \, d\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \doteq \int_a^b f \, d\alpha \in \mathbb{R}^k.$$

Observemos que

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 = \sum_{j=1}^n y_j \left(\int_a^b f_j \, d\alpha \right) \stackrel{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n y_j f_j \right) d\alpha. \quad (2.157)$$

Para cada $t \in [a, b]$, aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz às k -uplas $(y_1, \dots, y_k)$ e $(f_1(t), \dots, f_k(t))$, segue que

$$\sum_{j=1}^n y_j f_j(t) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n [f_j(t)]^2} = \|y\| \|f(t)\|.$$

Logo, da Proposição (2.3.1) item 3., segue que

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n y_j f_j \right) d\alpha \leq \int_a^b (\|y\| \|f\|) d\alpha \stackrel{\text{Prop. (2.3.1) itens 2.}}{=} \|y\| \int_a^b \|f\| d\alpha.$$

Substituindo-se em (2.157) obteremos

$$\|y\|^2 \leq \|y\| \int_a^b \|f\| d\alpha. \quad (2.158)$$

Temos duas possibilidades:

- (i) Se $\|y\| = 0$ (ou seja, $\int_a^b f d\alpha = 0$) segue que (2.156) vale trivialmente.
- (ii) Por outro lado, se $\|y\| \neq 0$, dividindo-se (2.158) por $\|y\| > 0$ obteremos

$$\underbrace{\|y\|}_{\left\| \int_a^b f d\alpha \right\|} \leq \int_a^b \|f\| d\alpha \Rightarrow \left\| \int_a^b f d\alpha \right\| \leq \int_a^b \|f\| d\alpha,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado. □

2.6 Curvas retificáveis

Começaremos introduzindo alguns conceitos básicos e mais adiante entraremos no que nos interessa propriamente, a saber, o comprimento de uma curva "bem comportada" do $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.6.1 Uma função $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ contínua em $[a, b]$ será dita curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$.

O conjunto $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^k$ será dito traço da curva parametrizada γ .

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ for injetora (isto é, $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ se $t, s \in [a, b]$, $t \neq s$) diremos que a curva parametrizada é simples.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ é tal que

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

diremos que a curva parametrizada é fechada.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ for injetora em (a, b) e $\gamma(a) = \gamma(b)$, diremos que a curva parametrizada é fechada e simples.

Observação 2.6.1 Duas curvas parametrizadas distintas podem ter o mesmo traço.

Para ilustrar consideremos $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq t, \quad t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \gamma_2(s) \doteq 2s, \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

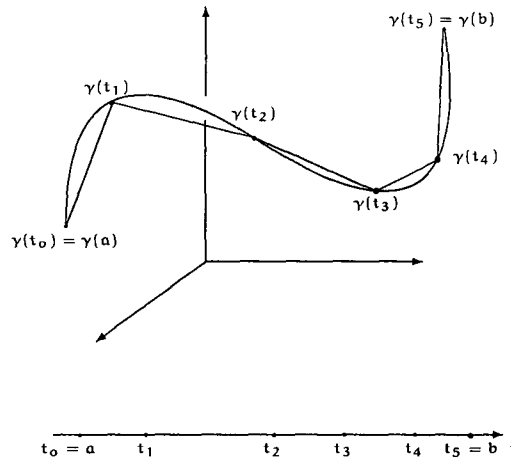
As curvas parametrizadas são distintas mas têm o mesmo traço (que é o intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, verifique!).

Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$ e $\mathcal{P} \doteq \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e definamos

$$\Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \doteq \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Observemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ nos fornece a distância do ponto $\gamma(t_{i-1})$ ao ponto $\gamma(t_i)$.

Logo $\Lambda(\mathcal{P}, \gamma)$ nos dá o comprimento de uma poligonal que tem como vértices os pontos $\gamma(t_i)$, para $i \in \{0, \dots, n\}$ (veja figura abaixo).



Em princípio, quanto maior o número de pontos da partição $\mathcal{P}$ mais perto $\Lambda(\mathcal{P}, \gamma)$ ficará do valor do comprimento do traço da curva γ (se este existir!).

Devido a este fato, empírico, introduziremos a

Definição 2.6.2 Na situação acima, definiremos o comprimento da curva parametrizada γ , denotado por $\Lambda(\gamma)$, como sendo

$$\Lambda(\gamma) \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma). \quad (2.159)$$

Diremos que a curva parametrizada γ é retificável se $\Lambda(\gamma) < \infty$.

Em certos casos, o comprimento da curva parametrizada γ será dado por uma integral de Riemann, como mostra o:

Teorema 2.6.1 *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma curva parametrizada que é continuamente diferenciável em $[a, b]$.*

Então γ é uma curva retificável e

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (2.160)$$

Demonstração:

Notemos que $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma função contínua em $[a, b]$, logo a função $\|\gamma'\| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ também será uma função contínua em $[a, b]$ (pois a norma é uma função contínua), portanto a integral de Riemann do lado direito de (2.160) existirá.

Observemos também que se $\mathcal{P} \doteq \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ teremos

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \stackrel{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s) ds \right\| \stackrel{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(s)\| ds. \quad (2.161)$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \stackrel{(2.161)}{\leq} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(s)\| ds \\ &= \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Tomando-se o supremo sobre todas as partições do intervalo $[a, b]$, obteremos

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \stackrel{(2.162)}{\leq} \int_a^b \|\gamma'(s)\| ds. \quad (2.163)$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, como a função γ' é contínua em $[a, b]$, que é compacto, segue que a função γ' é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Logo existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$s, t \in [a, b] \text{ e } |s - t| \in \delta \text{ deveremos ter } \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (2.164)$$

Seja $\mathcal{P} \doteq \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\Delta t_i \doteq t_i - t_{i-1} < \delta. \quad (2.165)$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se $t \in [t_{i-1}, t_i]$ segue que

$$\underbrace{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\|}_{\geq \|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_i)\|} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ou seja,

$$\|\gamma'(t)\| \leq \|\gamma'(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (2.166)$$

Logo, para cada $i \in \{a, \dots, n\}$, teremos

$$\begin{aligned}
 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt &\stackrel{(2.166)}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\|\gamma(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dt \\
 &= \underbrace{\|\gamma(t_i)\| (t_i - t_{i-1})}_{\|\gamma(t_i)\| \Delta t_i} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i} \\
 &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{\gamma'(t) + [\gamma'(t_i) - \gamma'(t)]\} dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
 &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) + \gamma'(t_i)] dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
 &\stackrel{\text{Des. triangular}}{\leq} \left\| \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt}_{\stackrel{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})} \right\| + \left\| \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) + \gamma'(t_i)] dt}_{\stackrel{\text{Prop. (2.5.2)}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\| dt} \right\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
 &\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\|}_{< \varepsilon \text{ por (2.166), pois } |t_i - t_{i-1}| < \delta} dt + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
 &< \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
 &= \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \Delta t_i. \tag{2.167}
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\
 &\stackrel{(2.167)}{<} \sum_{i=1}^n \left(\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \Delta t_i \right) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{=\Lambda(\mathcal{P}, \gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^n \Delta t_i}_{=b-a} \\
 &= \underbrace{\Lambda(\mathcal{P}, \gamma)}_{\leq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) = \Lambda(\gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b-a) \\
 &\leq \Lambda(\gamma) + \varepsilon,
 \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \Lambda(\gamma),$$

que juntamente com (2.163) mostram que (2.160) ocorrerá, completando a prova do resultado. $\square$

2.7 Exercícios

Capítulo 3

Sequência e Séries de Funções

Neste capítulo trataremos da convergência pontual e uniforme das sequências e das séries de funções e algumas aplicações.

Começaremos com a convergência pontual das sequências e das séries de funções.

3.1 Convergência pontual de sequências e séries de funções

Definição 3.1.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \rightarrow A$ uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função f em E se, para cada $x \in E$ fixado, a sequência numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente para $f(x)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_0 \text{ deveremos ter } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Neste caso escreveremos:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in E, \quad \text{ou} \quad f_n \xrightarrow{E} f, \quad \text{ou ainda} \quad f_n \xrightarrow{p} f. \quad (3.2)$$

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.1.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \rightarrow A$ uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $f_n : E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função f em E se, para cada $x \in E$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ for convergente para $f(x)$, ou seja, a sequência das somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente pontualmente para a função f em E , onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in E. \quad (3.3)$$

Neste caso escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E \quad (3.4)$$

e diremos que a função f é a soma da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Observação 3.1.1

1. Algumas questões podem ser colocadas:

- (a) Se $f_n \xrightarrow{E} f$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n for contínua em $x_0 \in E$ isto implicará, necessariamente, que a função f será contínua em x_0 ?
- (b) Se $f_n \xrightarrow{E} f$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n for diferenciável em $x_0 \in E$ isto implicará, necessariamente, que a função f será diferenciável em x_0 ?
- (c) Se $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n for Riemann integrável em $[a, b]$ isto implicará, necessariamente, que a função f será diferenciável em $[a, b]$?

2. Podemos colocar as questões análogas as acima para a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

3. Antes de responder as questões acima lembremos que uma função f é contínua em x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

4. Sob este ponto de vista, a resposta para a questão (a) acima pode ser colocada da seguinte forma:

Por um lado teremos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right), \quad (3.5)$$

por outro, deveremos ter

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &\stackrel{f \text{ é cont. em } x_0}{=} f(x_0) \stackrel{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &\stackrel{f_n \text{ é cont. em } x_0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Comparando (3.5) como (3.6) segue que deveremos ter

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right), \quad (3.7)$$

ou seja, precisamos saber se a "troca" dos limites acima é sempre possível, se $f_n \xrightarrow{E} f$.

5. Veremos em alguns exemplos a seguir que isto em geral não pode ser feito.

Exemplo 3.1.1 Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$S_{m,n} \doteq \frac{m}{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pergunta-se:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m,n} \right) ?$$

Resolução:

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{m+n} = 0.$$

Logo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} \right) = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+n} = 1.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} S_{m,n} \right) = 1 \neq 0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m,n} \right).$$

Um outro exemplo é dado por:

Exemplo 3.1.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

e consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, pontualmente em $\mathbb{R}$, onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 + x^2, & x \neq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Caso isto seja verdade, notamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função f_n é contínua em $\mathbb{R}$ mas a função f não é contínua em $x = 0$ (pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \stackrel{x \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1 \neq 0 = f(0)$).

Resolução:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$f_n(0) = \left(\frac{0^2}{1+0^2} \right)^n = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0.$$

Por outro lado, se $x \neq 0$, como, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1,$$

segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \quad \text{Série geom. de razão } \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1+x^2-x^2} = 1+x^2,$$

mostrando que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para a função f dada por (3.8).

Temos também o

Exercício 3.1.1 Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado consideremos a função $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_m(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^{2n}, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Afirmamos que $f_m \xrightarrow{E} f$ onde a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos que $f_m \in \mathfrak{R}$ em $[0, 1]$ mas $f \notin \mathfrak{R}$ em $[0, 1]$ (verifique!).

Resolução:

Observemos que

(i) Se $m!x \in \mathbb{Z}$ teremos

$$\cos(m!x\pi) = \pm 1 \Rightarrow [\cos(m!x\pi)]^2 = 1 \Rightarrow f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^{2n} = 1.$$

Neste caso

$$f(x) = 1.$$

(ii) Se $m!x \notin \mathbb{Z}$ segue que

$$-1 < \cos(m!x\pi) < 1 \Rightarrow [\cos(m!x\pi)]^2 < 1 \Rightarrow f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\cos(m! \pi x)]^{2n} = 0.$$

Neste caso

$$f(x) = 0.$$

Para finalizar, notemos que

(i') Se $x \in \mathbb{Q}$ então $m!x \in \mathbb{Z}$, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

De fato, se $x \in \mathbb{Q}$ então $x = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > q$.

Então

$$\begin{aligned} m!x &= m! \frac{p}{q} = [m.(m-1) \cdots (q-1)q.(q+1) \cdots .2.1] \frac{p}{q} \\ &= [m.(m-1) \cdots (q-1).(q+1) \cdots .2.1] . p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo do item 1. acima, segue que $f(x) = 1$.

(ii') Se $x \in \mathbb{I}$ então $m!x \notin \mathbb{Z}$ (verifique!), logo do item 2. acima, segue que $f(x) = 0$.

Com isto teremos que $f_m \xrightarrow{P} f$ em $[0, 1]$.

Temos também o:

Exemplo 3.1.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que $f_n \xrightarrow{p} f$ em $\mathbb{R}$, onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} = 0 = f(x).$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função f_n é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, a sequência de funções $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é convergente para a função f' , pois, por exemplo $f'_n(0) = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para finalizar temos o

Exercício 3.1.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq n^2 x(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1].$$

Afirmamos que $f_n \xrightarrow{p} f$ em $[0, 1]$, onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Resolução:

Observemos que:

(i) Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$f_n(0) = 0 \rightarrow 0 = f(0), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

(ii) se $x \in (0, 1]$ teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^2 x(1-x^2)^n \right] = x \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^2 (1-x^2)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{(1-x^2)^n} (1-x^2)^{2n} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como

$$0 < (1-x^2)^{2n} < 1,$$

se mostrarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1-x^2)^n} = 0, \quad (3.11)$$

segurará de (3.10), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Para mostrar (3.12), mostraremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{(1+p)^n} = 0, \quad \text{para } r > 0 \text{ e } p \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Notemos que se $p \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ está fixado, teremos

$$\begin{aligned} (1+p)^n &\stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k 1^{n-k} > \binom{n}{k} p^k \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

para todo $k \in \{0, \dots, n\}$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que (lembramos que $n \rightarrow \infty$)

$$r < \frac{n}{2} + 1$$

e seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \in (r, \frac{n}{2} + 1).$$

Com isto teremos

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) > \left(\frac{n}{2}\right)^k. \quad (3.14)$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} 0 < k < \frac{n}{2} + 1 &\Leftrightarrow 0 < 2k < n + 2 \Leftrightarrow 0 < n - 2k + 2 \\ &\Leftrightarrow n < 2n - 2k + 2 \Leftrightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^k < n - k + 1. \end{aligned}$$

Em particular, vale (3.14).

Lado de (3.13) e (3.14), teremos, para $k \in \mathbb{N}$ fixado com $2k < n + 2$, que:

$$(1+p)^n > \frac{n^k}{2^k k!} p^k \Leftrightarrow 0 < \frac{n^r}{(1+p)^n} < \underbrace{\frac{2^k k!}{p^k}}_{\text{n.o real fixado}} n^{r-k} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

pois $r - k < 0$.

Em particular, (3.12) ocorrerá.

Conclusão: $f_n \xrightarrow{p} f$ em $[0, 1]$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x (1-x^2)^n dx \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{n^2}{2(n+1)} \rightarrow \infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \infty \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Deixaremos a cargo do leitor a resolução do:

Exercício 3.1.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0, 1].$$

Então $f_n \xrightarrow{p} f$ em $[0, 1]$, onde a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Além disso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx !$$

3.2 Convergência uniforme de sequências e séries de funções

Nesta seção trataremos de outro tipo de convergência de sequências e séries de funções que nos fornecerá várias propriedades as quais a convergência pontual não pode nos garantir.

Começaremos com a

Definição 3.2.1 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E , se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que se

$$n \geq N_0 \text{ deveremos ter } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in E. \quad (3.16)$$

Neste caso escreveremos: $f_n \xrightarrow{u} f$ em E .

Observação 3.2.1 Na situação acima temos que se a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E então ela será convergente pontualmente para f em E .

A recíproca é falsa, como veremos em exemplos mais adiante.

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.2.2 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para a função f em E , se a sequência de funções das somas parciais $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E , onde, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$S_n(s) \doteq \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in E. \quad (3.17)$$

A seguir exibiremos alguns resultados relacionados com a convergência uniforme de sequências de funções.

Começaremos pelo CrITÉRIO DE CAUCHY para a convergência uniforme de uma sequência de funções:

Teorema 3.2.1 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

A sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se:

$$m, n \geq N_0 \text{ deveremos ter } |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in E. \quad (3.18)$$

Demonstração:

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E .

Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se:

$$n \geq N_0 \text{ deveremos ter } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in E. \quad (3.19)$$

Portanto, se $m, n \geq N_0$ teremos, para $x \in E$, que:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \\ &\leq \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\substack{(3.19) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\substack{(3.19) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que (3.18) ocorrerá.

Por outro lado, se dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que (3.18) ocorre, então para cada $x \in E$ segue que a sequência numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ será uma sequência numérica de Cauchy em A , onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Mas A , munido da métrica usual (isto é, $|\cdot|$) é completo, logo existe $f(x) \in A$ tal que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para cada $x \in E$.

Seja $N_0 \in \mathbb{N}$ como em (3.18) e consideremos $m, n \geq N_0$.

Então

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in E.$$

Passando o limite na desigualdade acima quando $m \rightarrow \infty$, utilizando o fato que a função $|\cdot|$ é contínua e que $f_m(x) \rightarrow f(x)$ para $x \in E$, seguirá que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in E,$$

mostrando que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E , completando a demonstração do resultado. □

Observação 3.2.2

1. Quando (3.18) ocorre diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente de Cauchy em E .
2. Podemos substituir $E \subseteq \mathbb{R}$ por um subconjunto de um espaço métrico (X, d) que a conclusão do resultado permanecerá válida.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Proposição 3.2.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f: E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n: E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$M_n \doteq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Então $f_n \xrightarrow{u} f$ em E se, e somente se, $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Demonstração:

Notemos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em E se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ deveremos ter

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in E,$$

que é equivalente a escrever

$$\underbrace{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|}_{=M_n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq M_n \leq \varepsilon, \quad \text{se } n \geq N_0,$$

ou ainda, que $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Para a convergência uniforme de séries de funções temos o Teste M. de Weierstrass:

Teorema 3.2.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f: E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n: E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Suponhamos que existe uma sequência numérica $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por números reais não negativos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todo } x \in E. \quad (3.20)$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em E para alguma função definida em E .

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, segue que a sequência das somas parciais desta série, que indicaremos por $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deverá ser uma sequência numérica de Cauchy, isto é, deverá existir $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se

$$\begin{aligned} m > n \geq N_0, \quad \text{deveremos ter} \quad & \left| \underbrace{s_m}_{\sum_{i=1}^m M_i} - \underbrace{s_n}_{\sum_{i=1}^n M_i} \right| < \varepsilon \\ & = \sum_{i=n+1}^m M_i \\ \Rightarrow \left| \underbrace{\sum_{i=n+1}^m M_i}_{\sum_{i=n+1}^m M_i} \right| < \varepsilon & \Rightarrow \sum_{i=n+1}^m M_i < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Afirmamos que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dada por (3.17)), é uma sequência uniformemente de Cauchy em E .

De fato, se $m > n \geq N_0$ teremos

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^m f_i(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^m \underbrace{|f_i(x)|}_{\substack{(3.20) \\ \leq M_i}} \leq \sum_{i=n+1}^m M_i \stackrel{(3.21)}{<} \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando a afirmação.

Logo, do Teorema (3.2.1) segue que a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em E , ou ainda, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em E para alguma função definida em E , completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.2.3 O Teste M. de Weierstrass nos fornece uma condição suficiente para que uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seja uniformemente convergente em E .

Pode-se mostrar que esta condição não é necessária para que uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seja uniformemente convergente em E .

Deixaremos a cargo do leitor encontrar um contra-exemplo para esta situação.

3.2.1 Convergência uniforme e continuidade

A seguir exibiremos alguns consequências da convergência uniforme entre estas destaca-se a que nos diz, como veremos, que a convergência uniforme preserva continuidade.

Começaremos pelo

Teorema 3.2.3 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f: E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n: E \rightarrow A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E . Seja $x_0 \in \bar{E}$ (o fecho do conjunto E em $\mathbb{R}$) tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$L_n \doteq \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \in A. \quad (3.22)$$

Então existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$L_n \rightarrow L, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e além disso

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right].$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E , do Teorema (3.2.1), segue que existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m, n \geq N_0 \quad \text{deveremos ter} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in E. \quad (3.25)$$

Fazendo $x \rightarrow x_0$ na desigualdade acima (utilizando-se o fato que a função $|\cdot|$ é contínua em A e $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = L_k$), obteremos

$$|L_m - L_n| < \varepsilon,$$

ou seja, a sequência numérica $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy em A , que é um espaço métrico completo.

Logo existe $L \in A$ tal que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n. \quad (3.26)$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in E$ teremos

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - L]| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L| \\ &= |f(x) - f_n(x)| + |[f_n(x) - L_n] + [L_n - L]| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E , existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_1 \text{ deveremos ter } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } x \in E. \quad (3.28)$$

Por outro lado, de (3.26), segue que existe $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_2 \text{ deveremos ter } |L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.29)$$

Por fim, de (3.22), para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\delta > 0$ tal que se

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \text{ deveremos ter } |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.30)$$

Portanto se $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$ e $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, de (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30), teremos

$$|f(x) - L| \stackrel{(3.27)}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\stackrel{(3.28)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - L_n|}_{\stackrel{(3.30)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|L_n - L|}_{\stackrel{(3.29)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, mostrando (3.24) e completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.2.4 Podemos reescrever a conclusão do resultado acima da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x)}_{= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)} = \underbrace{L}_{= \lim_{n \rightarrow \infty} L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{L_n}_{= \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}. \quad (3.31)$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right], \quad (3.32)$$

ou seja, o resultado acima nos fornece condições suficientes para que possamos trocar a ordem dos limites no duplo limite que estamos interessados em calcular.

Como consequência do resultado acima temos o

Corolário 3.2.1 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, $f : E \rightarrow A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \rightarrow A$, que vamos supor ser contínua em $x_0 \in E$, , onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função f em E . Então a função f será contínua em x_0 .

Demonstração:

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é contínua em x_0 teremos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = f_n(x_0),$$

ou seja, podemos considerar $L_n \doteq f_n(x_0)$.

Logo, do Teorema acima teremos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{u}{=} L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \stackrel{u}{=} f(x_0), \quad (3.33)$$

mostrando que a função f é contínua em x_0 , completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.2.5

1. A hipótese da convergência uniforme no resultado acima é necessária para obtermos a conclusão do mesmo.

Para ver isto basta ver o Exercício (3.1.1).

2. Em geral, não vale a recíproca do Corolário acima, mais precisamente, existem sequências de funções contínuas em $[a, b]$ que convergem para uma função em $[a, b]$ sem que a convergência da sequência de funções seja uniforme em $[a, b]$.

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de um exemplo que tenha essas propriedades.

3. Diremos que $K \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto se o conjunto K for fechado e limitado em $\mathbb{R}$.

Um resultado interessante que relaciona convergência pontual com convergência uniforme de sequências de funções é dado pelo:

Teorema 3.2.4 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ um compacto de $\mathbb{R}$, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em K .*

Suponhamos que:

- (i) para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua em K ;
- (ii) $f_n \xrightarrow{p} f$ em K ;
- (iii) a função f seja contínua em K ;
- (iv) a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em K , isto é, se $x \in K$ temos

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.34)$$

Então $f_n \xrightarrow{u} f$ em K .

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $g_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) \doteq f_n(x) - f(x), \quad x \in K. \quad (3.35)$$

Como a função f , para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f}_n$ também é contínua em K segue que a função $\underline{g}_n$ será contínua em K .

Notemos também que, da hipótese (ii), segue que

$$g_n \xrightarrow{p} 0, \quad \text{em } K. \quad (3.36)$$

Da hipótese (iv) segue que a sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em K .

Mostremos que

$$g_n \xrightarrow{u} 0, \quad \text{em } K. \quad (3.37)$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$K_n \doteq \{x \in K; g_n(x) \geq \varepsilon\} \subseteq K. \quad (3.38)$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{g}_n$ será contínua em K e

$$K_n = g_n^{-1}([\varepsilon, \infty)),$$

segue que K_n é um subconjunto fechado de K , logo também será um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (pois é um subconjunto fechado e como está contido em K que é limitado, também será limitado em $\mathbb{R}$).

Por outro lado, como a sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em K , para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$x \in K_{n+1} \Rightarrow \varepsilon \leq g_{n+1}(x) \stackrel{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow}{\leq} g_n(x) \Rightarrow x \in K_n,$$

ou seja,

$$K_{n+1} \subseteq K_n. \quad (3.39)$$

Seja $x \in K$ fixado.

De (3.36) teremos

$$g_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

logo existirá $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_0 \quad \text{devemos ter: } |g_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{em particular, } 0 \stackrel{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow \text{ e } g_n(x) \rightarrow 0}{\leq} g_n(x) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$x \notin K_n, \quad \text{para } n \geq N_0. \quad (3.40)$$

Em particular

$$x \notin \bigcap_{n \geq N_0} K_n \Rightarrow \bigcap_{n \geq N_0} K_n = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset.$$

Logo temos que, a sequência de conjuntos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de K , cuja intersecção de todos é vazia.

Logo do Corolário do Teorema 2.36 do Rudin, página 38, segue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que a intersecção finita

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{N_1} K_n \stackrel{K_{i+1} \subseteq K_i}{=} K_{N_1},$$

ou seja,

$$K_{N_1} = \emptyset,$$

ou ainda, da definição de K_{N_1} , segue que

$$0 \leq g_{N_1}(x) < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in K. \quad (3.41)$$

Para finalizar, notemos que se $n \geq N_1$ teremos

$$0 \leq g_n(x) \stackrel{(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \downarrow}{\leq} g_{N_1}(x) \stackrel{(3.41)}{<} \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in K,$$

ou seja, (3.37) ocorrerá, e portanto $f_n \xrightarrow{u} f$ em K , completando a demonstração. $\square$

Observação 3.2.6 *Notemos que a compacidade do conjunto K é condição necessária para a conclusão do resultado acima, como mostra o seguinte exemplo:*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq x^n, \quad x \in [0, 1]$$

e a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0, 1].$$

Para cada $x \in [0, 1]$ temos que

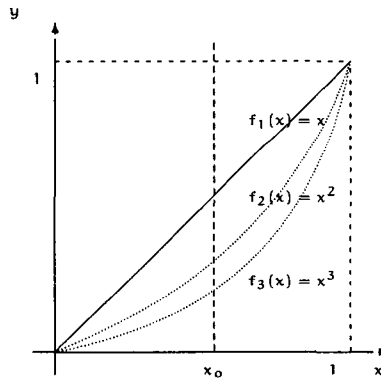
$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Notemos também que se $m \geq n$ e $x \in [0, 1]$, então

$$f_m(x) = x^m \stackrel{n \leq m \text{ e } x \in [0, 1]}{\leq} x^n = f_n(x),$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções decrescente em $[0, 1]$.

Apesar disso a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge uniformemente para a função f em $[0, 1]$ (veja figura abaixo).



A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A seguir estudaremos de um modo mais profundo o conjunto formado por todas as funções a valores reais contínuas e limitadas definidas em um espaço (X, d) .

Começaremos introduzindo a:

Definição 3.2.3 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $A = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) munido da métrica usual (isto é, induzida pelo $|\cdot|$).*

Definiremos

$$C_b(X; A) \doteq \{f : X \rightarrow A; \text{ a função } f \text{ é contínua e limitada em } X\}.$$

Observação 3.2.7

1. $(C_b(X; A), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre A , onde $+$ indica a adição usual de funções e $\cdot$ denotará a multiplicação de elementos de A por funções.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. Com isto podemos definir a função $\|\cdot\|_b : C_b(X; A) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_b \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad (3.42)$$

Notemos que:

- (i) se $f \in C_b(X; A)$ então a função f será limitada em X , logo existe $\sup_{x \in X} |f(x)| \in [0, \infty)$, ou seja a função $\|\cdot\|_b$ está bem definida;

- (ii) se $f \in C_b(X; A)$ teremos

$$\|f\|_b = \sup_{x \in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \geq 0;$$

- (iii) se $f \in C_b(X; A)$ então

$$0 = \|f\|_b = \sup_{x \in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow f = 0.$$

- (iv) se $f \in C_b(X; A)$ e $\lambda \in A$ teremos

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_b &= \sup_{x \in X} |(\lambda f)(x)| = \sup_{x \in X} [|\lambda| |f(x)|] \stackrel{|\lambda| \geq 0}{=} |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| \\ &= |\lambda| \|f\|_b; \end{aligned}$$

- (v) se $f, g \in C_b(X; A)$ teremos

$$\begin{aligned} \|f + g\|_b &= \sup_{x \in X} |(f + g)(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \stackrel{|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|}{\leq} \sup_{x \in X} [|f(x)| + |g(x)|] \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_b + \|g\|_b, \end{aligned}$$

ou seja, $\|\cdot\|_b$ é uma norma no espaço vetorial sobre A , $(C_b(X; A), +, \cdot)$.

3. Na situação acima temos que a função $d : C_b(X; A) \times C_b(X; A) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_b(f, g) \doteq \|f - g\|_b, \quad f, g \in C_b(X; A), \quad (3.43)$$

será uma métrica em $C_b(X; A)$, que será denominada de métrica da convergência uniforme em $C_b(X; A)$.

4. A Proposição (3.2.1) afirma que:

$$f_n \xrightarrow{u} f \text{ em } X \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_b} f$$

5. Seja $A \subseteq C_b(X; A)$.

Então o fecho de A , segundo a métrica d_b , isto é $\overline{A}$, será denominado fecho uniforme do conjunto A e $\overline{A}$ será dito uniformemente fechado em $C_b(X; A)$.

Podemos agora demonstrar o:

Teorema 3.2.5 O espaço vetorial $(C_b(X; A), +, \cdot)$ quando munido da métrica d_b (dada por (3.43)) é um espaço métrico completo, ou seja, toda sequência de Cauchy segundo a métrica d_b deverá ser convergente em $C_b(X; A)$, relativamente à métrica d_b .

Demonstração:

Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_b(X; A)$, relativamente à métrica d_b , ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_0 \text{ teremos } \underbrace{d_b(f_m, f_n)}_{\|f_m - f_n\|} < \varepsilon \text{ ou ainda } |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in X.$$

Logo, do Teorema (3.2.1) juntamente com o Corolário (3.2.1), segue que existe uma função $f : X \rightarrow A$ contínua em X tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ em X , que pela Proposição (3.2.1) implicará que $f_n \xrightarrow{d_b} f$.

Falta mostrar que a função f é uma função limitada em X .

Para isto observemos que como $f_n \xrightarrow{u} f$ em X , dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_{N_1}\| < \varepsilon = 1 \Leftrightarrow \underbrace{|f(x) - f_{N_1}(x)|}_{\geq |f(x)| - |f_{N_1}(x)|} < 1, \text{ para todo } x \in X,$$

que implicará

$$|f(x)| < 1 + \underbrace{|f_{N_1}(x)|}_{\leq R, \text{ pois } f_{N_1} \text{ é limitada em } X} \leq 1 + R, \text{ para todo } x \in X,$$

mostrando que a função f é uma função limitada em X , completando a demonstração do resultado. $\square$

3.2.2 Convergência uniforme e integração

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.6 Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a, b]$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $f : [a, b] \rightarrow A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a, b] \rightarrow A$ que pertence a $\mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Suponhamos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$.

Então $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b f \, d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, d\alpha. \quad (3.44)$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, é uma função a valores reais.

Isto se deve ao fato que se a função f_n for a valores complexos podemos escrevê-la como $f_n = \Re(f_n) + i\Im(f_n)$ e podemos aplicar as idéias da demonstração do caso real à parte real e à parte imaginária da mesma (que são funções a valores reais) e com isto obter a identidade (3.44) para o caso em que a função f é uma função a valores complexos.

Notemos que as funções f_n são limitadas em $[a, b]$ e que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, assim a função f também será uma função limitada em $[a, b]$ (isso foi provado no final da demonstração do Teorema (3.2.5)).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\varepsilon_n \doteq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| \geq 0. \quad (3.45)$$

Com isto teremos que, para todo $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n &\Leftrightarrow -\varepsilon_n \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon_n \\ &\Leftrightarrow f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] &= \int_a^b f_n d\alpha - \varepsilon_n \int_a^b d\alpha = \int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \\ &\stackrel{(3.46)}{\leq} \int_a^b f - \varepsilon_n d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &\stackrel{(3.46)}{\leq} \int_a^b f d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &= \int_a^b f_n d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &= \int_a^b f_n d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)], \end{aligned} \quad (3.47)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \leq \left(\int_a^b f_n d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \right) - \left(\int_a^b f_n d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \right) \\ &= 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pois $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, logo (3.45) implicará que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ (ver Proposição (3.2.1)).

Logo

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f_n d\alpha,$$

mostrando que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso, de (3.47), segue que

$$\int_a^b f_n d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_n d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b f_n d\alpha - \int_a^b f d\alpha \right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pois $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, ou seja,

$$\int_a^b f_n d\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f d\alpha,$$

mostrando (3.44) e completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.2.8 Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b \underbrace{f}_{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} d\alpha = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\alpha.$$

Como consequência temos o

Corolário 3.2.2 Sejam $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a, b]$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $f : [a, b] \rightarrow A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a, b] \rightarrow A$ que pertence a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Suponhamos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seja convergente uniformemente para a função f em $[a, b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha. \quad (3.48)$$

Demonstração:

Como a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ seja convergente uniformemente para a função f em $[a, b]$ temos

que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é uniformemente convergente para a f em $[a, b]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in [a, b].$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue que $S_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Como $S_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, do resultado acima segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\alpha &\stackrel{(3.44)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \underbrace{S_n}_{\sum_{i=1}^n f_i} d\alpha \stackrel{\text{soma finita}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha, \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i d\alpha \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.2.9 Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha &= \int_a^b \underbrace{f}_{\sum_{n=1}^{\infty} f_n} d\alpha = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\alpha. \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha \end{aligned}$$

3.2.3 Convergência uniforme e diferenciação

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.7 *Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a, b] \rightarrow A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a, b] \rightarrow A$ que vamos supor ser diferenciável em $[a, b]$.*

Suponhamos que a sequência numérica $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ seja convergente em A e $f'_n \xrightarrow{u} g$ em $[a, b]$.

Então a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função f , onde a função $f : [a, b] \rightarrow A$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b].$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência numérica $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$ segue que ela será uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo poderemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.49)$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função g em $[a, b]$, segue, do Teorema (3.2.1), que ela será uma sequência de funções que é uniformemente de Cauchy em $[a, b]$, ou seja, podemos encontrar $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |f'_m(t) - f'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad (3.50)$$

para todo $t \in [a, b]$.

Seja

$$N_0 \doteq \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}.$$

Com isto, se $m > n \geq N_0$, para $t, x \in [a, b]$, $x \leq t$, segue do, Teorema do valor Médio aplicado à função $h : [x, t] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) \doteq f_m(s) - f_n(s), \quad s \in [x, t]$$

, que existe $s_0 \in [x, t] \subseteq [a, b]$ tal que:

$$\begin{aligned} |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(t)]| &\stackrel{\text{Teor. Valor Médio à } h}{=} |h'(s_0)(x - t)| \\ &= \underbrace{|f'_m(s_0) - f'_n(s_0)|}_{\substack{N_0 \geq N_2, \bullet (2.50) \\ < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}}} \underbrace{|x - t|}_{\leq b-a} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Logo se $m > n \geq N \geq N_0$ segue que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)] + [f_m(x_0) - f_n(x_0)]| \\ &\leq \underbrace{|[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]|}_{\substack{(3.51) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{\substack{(3.49) \\ < \frac{\varepsilon}{2}}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a, b]$, ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniformemente de Cauchy em $[a, b]$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função f em $[a, b]$.

Para cada $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, consideremos as funções $\phi, \phi_n : [a, b] \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_n(t) \doteq \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) \doteq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad t \in [a, b] \setminus \{x\}. \quad (3.52)$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é diferenciável em $[a, b]$ logo

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \stackrel{\text{Def. de derivada}}{=} f'_n(x). \quad (3.53)$$

Por outro, se $m > n \geq N_0$, teremos, para todo $t \in [a, b]$, que:

$$\begin{aligned} |\phi_m(x) - \phi_n(x)| &= \left| \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} - \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \right| \\ &= \frac{1}{|t - x|} |[f_m(t) - f_m(x)] - [f_n(t) - f_n(x)]| \\ &= \frac{1}{|t - x|} \underbrace{|[f_m(t) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(x)]|}_{\substack{\text{como em (3.51)} \\ < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t-x|}} \\ &< \frac{1}{|t - x|} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t - x| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

ou seja, a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniformemente de Cauchy em $[a, b] \setminus \{x\}$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função em $[a, b] \setminus \{x\}$.

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, segue, de (3.52), que $\phi_n \xrightarrow{u} \phi$ em $[a, b] \setminus \{x\}$.

Aplicando o Teorema (3.2.3) a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue que, para cada $x \in [a, b]$ fixado, teremos:

$$f'(t) = \lim_{t \rightarrow x} \phi(t) \quad L_n \doteq \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L_n \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t),$$

ou seja, a função f é diferenciável em $[a, b]$ e $f' = g$ em $[a, b]$, completando a demonstração do resultado. □

Observação 3.2.10 Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(x), \quad x \in [a, b].$$

Como consequência temos o

Corolário 3.2.3 Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a, b] \rightarrow A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a, b] \rightarrow A$ que vamos supor ser diferenciável em $[a, b]$.

Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ seja convergente em A e a série de funções

$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ seja uniformemente convergente para a função g em $[a, b]$.

Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função f , onde a função $f : [a, b] \rightarrow A$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b].$$

Demonstração:

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ é convergente em A e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente para uma função g em $[a, b]$, temos que a sequência numérica $(S_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge em A e a sequência de funções $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para uma g em $[a, b]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in [a, b].$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é diferenciável em $[a, b]$, segue que a função S_n também será diferenciável em $[a, b]$ (pois é soma finita de funções diferenciáveis em $[a, b]$).

Logo do resultado acima segue que a sequência de funções $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função f , onde a função $f : [a, b] \rightarrow A$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

completando a demonstração do resultado. □

Observação 3.2.11 Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = g(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [a, b].$$

A seguir exibiremos um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

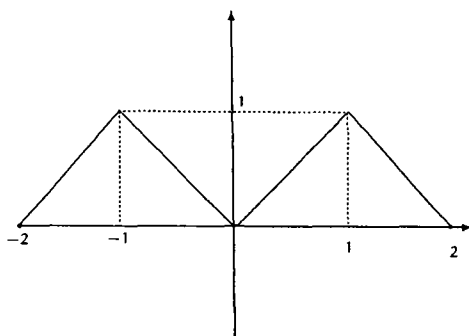
Teorema 3.2.8 Existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que é contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Demonstração:

Consideremos a função $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq |t|, \quad t \in [-1, 1] \quad \phi(x+2) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, a extensão 2-periódica da função módulo definida no intervalo $[-1, 1]$ (veja figura abaixo)



Notemos que se $s, t \in [-1, 1]$ então

$$|\phi(s) - \phi(t)| = ||s| - |t|| \stackrel{\text{Des. triangular}}{\leq} |s - t|. \quad (3.55)$$

Como a função ϕ é 2-periódica segue que

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |s - t|. \quad (3.56)$$

vale para $s, t \in \mathbb{R}$.

De fato, notemos que:

1. se $|t - s| \leq 2$, existem $k \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que

$$s \doteq \bar{s} + 2k \quad \text{e} \quad t = \bar{t} + 2k.$$

Com isto segue que

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \stackrel{\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1] \text{ e (3.55)}}{\leq} \underbrace{|\bar{s} - \bar{t}|}_{=s-2k \quad =t-2k} = |(s - 2k) - (t - 2k)| = |s - t|.$$

2. se $|t - s| > 2$, existem $k, m \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que

$$s \doteq \bar{s} + 2k, \quad t = \bar{t} + 2m.$$

Logo

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \stackrel{\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1] \text{ e (3.55)}}{\leq} |\bar{s} - \bar{t}| \leq 2 < |s - t|,$$

completando a demonstração de (3.56).

De (3.56) que a função ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (na verdade uniformemente contínua em $\mathbb{R}$).

Podemos agora definir a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.57)$$

Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ fixado teremos

$$\left| \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \right| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{|\phi(4^n x)|}_{\leq 1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ é convergente (é uma série geométrica de razão $\frac{3}{4} < 1$) segue,

do Teste M de Weierstrass, que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ converge uniformemente para a função f .

Observemos que também que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, definido-se a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que a mesma será contínua em $\mathbb{R}$.

Logo do Corolário (3.2.1) segue que a função f será uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Para finalizar, mostraremos que a função f não é diferenciável em nenhum $x \in \mathbb{R}$.

Para isto mostraremos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, podemos encontrar uma sequência numérica $(\delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de modo que, quando $m \rightarrow \infty$, teremos

$$\delta_m \rightarrow 0 \quad \text{mas} \quad \left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| \rightarrow \infty,$$

mostrando que a função f não é diferenciável em $x \in [a, b]$, ou seja, não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

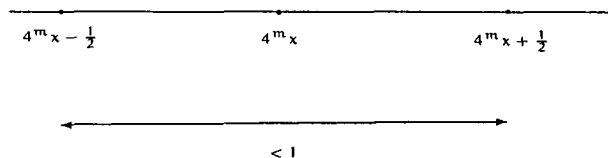
Seja $x \in \mathbb{R}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ escolhamos

$$\delta_m \doteq \pm \frac{1}{2} 4^{-m},$$

onde o sinal $\pm$ deverá ser escolhido de modo que não existe nenhum inteiro no intervalo aberto (veja figura abaixo):

$$\begin{aligned} & \overbrace{(4^m x, 4^m(x + \delta_m))}^{=4^m x + \frac{1}{2}}, \text{ para } \delta_m > 0 \\ \text{ou no intervalo aberto} \\ & \underbrace{(4^m(x + \delta_m), 4^m x)}_{=4^m x - \frac{1}{2}}, \text{ para } \delta_m < 0. \end{aligned}$$



Podemos fazer a escolha acima pois se existir um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k \in \left(4^m x, 4^m x + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (k-1) \in \left(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x \right) \Leftrightarrow (k-1) \notin \left(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x \right).$$

De modo semelhante se $k \in \left(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x \right)$ mostra-se (semelhante ao caso acima) que $(k-1) \notin \left(4^m x, 4^m x + \frac{1}{2} \right)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados definamos

$$\gamma_{n,m} \doteq \frac{\phi[4^n(x + \delta_m)] - \phi(4^n x)}{\delta_m} = \frac{\phi(4^n x + 4^n \delta_m) - \phi(4^n x)}{\delta_m} \quad (3.58)$$

Notemos que se $n > m$ segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$4^n \delta_m = 2k$$

De fato, pois

$$|4^n \delta_m| = 4^n \left(\frac{1}{4^m} \frac{1}{2} \right) = \frac{4^{\overbrace{n-m}^{>0}}}{2} \quad \text{é par!},$$

mostrando a afirmação acima (notemos também que caso contrário, isto é, se $0 \leq n \leq m$, tal número não será par).

Neste caso teremos

$$\phi \left(4^n x + \underbrace{4^n \delta_m}_{2k} \right) \stackrel{\phi \text{ é } 2\text{-periódica}}{=} \phi(4^n x),$$

implicando que se

$$n > m \Rightarrow \gamma_{n,m} = 0. \quad (3.59)$$

Por outro lado, se $0 \leq n \leq m$ teremos

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,m}| &= \left| \frac{\phi(4^n x + 4^n \delta_m) - \phi(4^n x)}{\delta_m} \right| = \frac{1}{|\delta_m|} |\phi(4^n x + 4^n \delta_m) - \phi(4^n x)| \\ &\stackrel{(3.56)}{\leq} \frac{1}{|\delta_m|} |(4^n x + 4^n \delta_m) - 4^n x| = \frac{1}{|\delta_m|} 4^n |\delta_m| = 4^n, \end{aligned}$$

ou seja, se $0 \leq n \leq m$ teremos:

$$|\gamma_{n,m}| \leq 4^n. \quad (3.60)$$

Observemos também que, no caso acima $4^m \delta_m$ não será par, e existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} t \doteq 4^m x + 4^m \delta_m, s \doteq 4^m x \in (2k, 2k+1), \text{ se } 4^m \delta_m = \frac{1}{2} \\ t \doteq 4^m x + 4^m \delta_m, s \doteq 4^m x \in (2k-1, 2k), \text{ se } 4^m \delta_m = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o que implicará em

$$\left| \phi \left(4^m x + \underbrace{4^m \delta_m}_{=\pm \frac{1}{2}} \right) - \phi(4^m x) \right| \stackrel{|\phi(t) - \phi(s)| = |t-s|}{=} |(4^m x + 4^m \delta_m) - 4^m x| = 4^m |\delta_m|.$$

Logo, se $0 \leq n \leq m$ teremos também:

$$|\gamma_{m,m}| = \left| \frac{\phi \left(4^m x + \underbrace{4^m \delta_m}_{=\pm \frac{1}{2}} \right) - \phi(4^m x)}{\delta_m} \right| \stackrel{1}{|\delta_m|} 4^m |\delta_m| = 4^m. \quad (3.61)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| &= \frac{1}{|\delta_m|} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \phi[4^n(x + \delta_m)] - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \phi(4^n(x)) \right| \\
 &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \underbrace{\left(\frac{\phi[4^n(x + \delta_m)] - \phi(4^n(x))}{\delta_m} \right)}_{\substack{(3.58) \\ = \gamma_{n,m}}} \right| \\
 &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{n,m} \right| \gamma_{n=0} \stackrel{\text{se } n > m}{=} \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{n,m} \right| \\
 &= \left| \left(\frac{3}{4} \right)^m \gamma_{m,m} + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{n,m} \right| \geq \frac{3^m}{4^m} \underbrace{|\gamma_{m,m}|}_{(3.61) 4^m} - \left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{n,m} \right| \\
 &= 3^m - \left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n \gamma_{n,m} \right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n \underbrace{|\gamma_{n,m}|}_{\substack{(3.60) \\ \leq 4^n}} \\
 &\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{1 - 3^m}{1 - 3} = 3^m + \frac{1 - 3^m}{2} \\
 &= \underbrace{3^m - \frac{3^m}{2}}_{= \frac{3^m}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^m + 1) \geq \frac{3^m}{2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, quando $m \rightarrow \infty$ temos que $\delta_m = \pm \frac{1}{2 \cdot 4^m} \rightarrow 0$ mas, $\left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| \rightarrow \infty$, mostrando que a função f não é diferenciável em $x \in \mathbb{R}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, completando a demonstração. $\square$

3.3 Família de funções equicontínuas

A seguir introduziremos alguns conceitos que nos fornecerão condições suficientes para que a convergência pontual de uma sequência de funções implique na existência de uma subsequência que seja uniformemente convergente.

Para isto precisaremos, entre outras, da:

Definição 3.3.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em E se existir uma função $\phi : E \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in E. \quad (3.62)$$

Diremos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em E se existir $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in E. \quad (3.63)$$

Observação 3.3.1 *Na situação acima, uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é pontualmente limitada será uniformemente limitada se a função ϕ for limitada em E .*

Com isto temos a:

Proposição 3.3.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em E e que $E_1 \subseteq E$ é um subconjunto enumerável.

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente em E_1 .

Demonstração:

Seja

$$E_1 \doteq \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq E.$$

Por hipótese temos que a sequência numérica $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$.

Logo, do curso de Análise I, segue que existe uma subsequência $(f_{n_{k_1}}(x_1))_{n_{k_1} \in \mathbb{N}}$ da sequência numérica $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ que será convergente para a_1 em $\mathbb{R}$.

Mas a sequência numérica $(f_{n_{k_1}}(x_2))_{n_{k_1} \in \mathbb{N}}$ também é limitada em $\mathbb{R}$, logo pelo mesmo motivo acima, existirá uma subsequência $(f_{n_{k_2}}(x_2))_{n_{k_2} \in \mathbb{N}}$ da sequência numérica $(f_{n_{k_1}}(x_1))_{n_{k_1} \in \mathbb{N}}$ que será convergente a_2 em $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$f_{n_{k_2}}(x_1) \rightarrow a_1, \quad \text{quando } n_{k_2} \rightarrow \infty,$$

$$f_{n_{k_2}}(x_2) \rightarrow a_2, \quad \text{quando } n_{k_2} \rightarrow \infty,$$

Prosseguindo no processo acima, encontramos uma subsequência $(f_{n_{k_j}})_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ teremos que a sequência numérica $(f_{n_{k_j}}(x_i))_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ que será convergente para a_i em $\mathbb{R}$, mostrando que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente em E_1 , completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.3.2 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em K .*

Notemos que mesmo que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada em K , pode não existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para alguma função definida em K , como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq \sin(nx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Afirmamos que não existe uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para alguma função em $[0, 2\pi]$.

Resolução:

Notemos que neste caso o compacto $K \doteq [0, 2\pi]$.

Suponhamos, por absurdo, que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para alguma função f definida $[0, 2\pi]$.

Neste caso teremos

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} [f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)] = 0, \quad x \in [0, 2\pi] \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)]^2 &= 0, \quad x \in [0, 2\pi].\end{aligned}\quad (3.64)$$

Mas

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)]^2 dx &\stackrel{\text{Exercício}}{=} \int_0^{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)]^2 dx \\ &= 0.\end{aligned}\quad (3.65)$$

Por outro lado, observemos que:

$$\int_0^{2\pi} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} [\text{sen}^2(n_k x) - 2 \text{sen}(n_k x) \text{sen}(n_{k+1} x) + \text{sen}^2(n_{k+1} x)] dx.$$

Mas

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^2(n_k x) dx &\stackrel{u=n_k x \Rightarrow du=n_k dx}{=} \int \text{sen}^2(u) \frac{1}{n_k} du \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2n_k} \left[u - \frac{\text{sen}(2u)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2n_k} \left[n_k x - \frac{\text{sen}(2n_k x)}{2} \right],\end{aligned}$$

logo

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(n_k x) dx = \frac{1}{2n_k} \left[n_k x - \frac{\text{sen}(2n_k x)}{2} \right] \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{n_k 2\pi}{2n_k} = \pi.$$

De modo semelhante teremos

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(n_{k+1} x) dx \stackrel{\text{Exercício}}{=} \pi.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\int \text{sen}(n_k x) \text{sen}(n_{k+1} x) dx &\stackrel{\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}}{=} \int \frac{1}{2} [\cos(n_k x - n_{k+1} x) - \cos(n_k x + n_{k+1} x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}(n_k x - n_{k+1} x)}{n_k - n_{k+1}} - \frac{\text{sen}(n_k x + n_{k+1} x)}{n_k + n_{k+1}} \right],\end{aligned}$$

assim

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(n_k x) \text{sen}(n_{k+1} x) dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi} [\text{sen}(n_k x) - \text{sen}(n_{k+1} x)]^2 dx = 2\pi \neq 0,$$

contrariando (3.65), o que nos mostra que não poderá existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo pontualmente para alguma função f definida $[0, 2\pi]$.

Observação 3.3.3 Uma outra questão importante é saber se uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que é pontualmente convergente, pode conter uma subsequência que seja uniformemente convergente.

O próximo exemplo mostra que isto, em geral, pode não ocorrer, mesmo que a convergência pontual da sequência de funções seja em um compacto.

Exemplo 3.3.2 Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Afirmamos que não existe uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo uniformemente para alguma função em $[0, 1]$.

Demonstração:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos:

$$x^2 + (1 - nx)^2 \geq x^2 \quad \text{e} \quad x^2 + (1 - nx)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{n},$$

logo $x^2 + (1 - nx)^2 \neq 0$ assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n está bem definida.

Além disso

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \stackrel{x^2 + (1 - nx)^2 \geq x^2}{\leq} 1, \quad x \in [0, 1],$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $[0, 1]$.

Como

$$x^2 + (1 - nx)^2 \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

segue

$$f_n \rightarrow 0, \quad \text{pontualmente em } [0, 1].$$

Por outro lado

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left[1 - n\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2} = 1. \quad (3.66)$$

Portanto nenhuma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poderá convergir uniformemente para alguma função em $[0, 1]$, caso contrário se $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[0, 1]$ deveríamos, em particular, ter:

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f_n\left(\frac{1}{n}\right)}_{(3.66)_1} \rightarrow 0,$$

. o que seria um absurdo.

Vamos agora introduzir a

Definição 3.3.2 Sejam (X, d) um espaço métrico, $E \subseteq X$ e $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Uma família $\mathfrak{F}$ formada por funções $f : E \rightarrow A$ será dita equicontínua em E se dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, y \in E \text{ tal que } d(x, y) < \delta, \quad \text{devemos ter } |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{F}. \quad (3.67)$$

Observação 3.3.4 Notemos que se a família $\mathfrak{F}$ é equicontínua em E e $f \in \mathfrak{F}$ então a função f será uniformemente contínua em E .

Com isto temos o

Teorema 3.3.1 *Sejam (X, d) um espaço métrico, $E \subseteq X$ subconjunto enumerável e $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em E tomando valores em A , que é pontualmente limitada em E .

Então a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge pontualmente em E .

Demonstração:

Seja

$$E \doteq \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq X.$$

Como a sequência numérica $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em A , segue que existe uma subsequência $(f_{n_{k_1}}(x_1))_{n_{k_1} \in \mathbb{N}}$ convergente para a_1 em A .

Notemos que a sequência numérica $(f_{n_{k_1}}(x_2))_{n_{k_1} \in \mathbb{N}}$ é limitada em A , logo existe uma subsequência $(f_{n_{k_2}}(x_2))_{n_{k_2} \in \mathbb{N}}$ convergente para a_2 em A .

Com isto teremos que

$$\begin{aligned} f_{n_{k_2}}(x_1) &\rightarrow a_1, \quad \text{quando } n_{k_2} \rightarrow \infty, \\ f_{n_{k_2}}(x_2) &\rightarrow a_2, \quad \text{quando } n_{k_2} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Prosseguindo no processo acima, encontramos uma subsequência $(f_{n_{k_j}})_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ teremos que a sequência numérica $(f_{n_{k_j}}(x_i))_{n_{k_j} \in \mathbb{N}}$ que será convergente para a_i em $\mathbb{R}$, mostrando que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente para cada $x \in E$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Podemos agora enunciar e demonstrar o

Teorema 3.3.2 *Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subseteq X$ subconjunto compacto, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f, f_n \in C(K; A)$.*

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente convergente para a função f em K .

Então a família $\mathcal{F} \doteq \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ será uma família equicontínua em K .

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \xrightarrow{u} f$ em K então existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_0 \quad \text{deveremos ter} \quad \|f_n - f_{N_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.68)$$

onde

$$\|g\| \doteq \sup_{x \in K} |g(x)|.$$

Como a função f_{N_0} é contínua em K , que é compacto em (X, d) , segue que a função f_{N_0} será uniformemente contínua em K (visto em Análise I), ou seja, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, y \in K, \quad \text{satisfaz } d(x, y) < \delta, \quad \text{segue que } |f_{N_0}(x) - f_{N_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.69)$$

Logo, se $n \geq N_0$ e $x, y \in K$ são tais que $d(x, y) < \delta$, teremos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= |f_n(x) - f_n(y) - f_{N_0}(x) + f_{N_0}(x) - f_{N_0}(y) + f_{N_0}(y)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{N_0}(x)| + |f_{N_0}(x) - f_{N_0}(y)| + |f_{N_0}(y) - f_n(y)| \\ &\leq \underbrace{\|f_n - f_{N_0}\|}_{\substack{(3.68) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(y)|}_{\substack{(3.69) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\|f_{N_0} - f_n\|}_{\substack{(3.68) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que a família $\mathcal{F}$ é equicontínua em K , completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 3.3.5 Para o resultado que vem a seguir precisaremos da caracterização de conjunto compacto em um espaço métrico (X, d) que é a seguinte:

Diremos que um subconjunto K de um espaço métrico (X, d) é compacto em X se para toda família $\{O_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$ temos que O_λ é um subconjunto aberto de (X, d) , satisfazendo $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, podemos encontrar $i_1, \dots, i_N \in \mathbb{N}$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^N O_{i_j},$$

ou seja, toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita, que ainda cobre K .

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte importante resultado, conhecido como Teorema de Árzela-Áscoli:

Teorema 3.3.3 Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, (X, d) um espaço métrico, $K \subseteq X$ um subconjunto compacto e para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $f_n \in C(K; A)$.

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada e equicontínua em K .

Então:

1. a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em K ;
2. a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que é uniformemente convergente em K .

Demonstração:

De 1.:

Dado $\varepsilon > 0$, como a família $\mathcal{F} \doteq \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua em K segue que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, y \in K \text{ tal que } d(x, y) < \delta, \quad \text{devemos ter: } |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.70)$$

Para $a \in X$ e $r > 0$, denotaremos por $B(a; r)$ a bola aberta de centro em a e raio r em (X, d) , ou seja:

$$B(a; r) \doteq \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Como $K \subseteq X$ é um subconjunto compacto de (X, d) e

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x; \delta), \quad \text{segue que existirão } p_1, \dots, p_{N_o} \in K \text{ tais que: } K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_o} B(p_i; \delta). \quad (3.71)$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em K , segue que, para cada $i \in \{1, \dots, N_o\}$, existe $M_i > 0$ tal que

$$|f_n(p_i)| < M_i, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (3.72)$$

Seja

$$M \doteq \max\{M_i; i = 1, \dots, N_o\}.$$

Notemos que para $x \in K$, de (3.71), segue que existe $i_o \in \{1, \dots, N_o\}$ tal que

$$x \in B(p_{i_o}; \delta), \quad (3.73)$$

assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |f_n(x) - f_n(p_{i_o}) + f_n(p_{i_o})| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(p_{i_o})|}_{\substack{d(x, p_{i_o}) < \delta \text{ logo (3.70)} \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{|f_n(p_{i_o})|}_{\substack{(3.72) \\ \leq M_{i_o} \leq M}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + M, \end{aligned}$$

mostrando que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em K , completando a demonstração de 1. .

De 2.:

Para demonstrarmos 2., notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que:

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B\left(x; \frac{1}{m}\right)$$

e assim, da compacidade do conjunto K , para cada $m \in \mathbb{N}$, segue que existirão $x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in K$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i_m=1}^{N_m} B\left(x_{i_m}; \frac{1}{m}\right).$$

Consideremos

$$E \doteq \{x_{i_m} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq K.$$

Deste modo segue que E será um subconjunto enumerável e denso em K (ou seja, $\bar{E} = K$).

De fato, pois se $x \in K$, dado $\eta > 0$, podemos escolher $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \eta.$$

Assim

$$x \in K \subseteq \bigcup_{i_m=1}^{N_m} B\left(x_{i_m}; \frac{1}{m}\right),$$

o que implicará que $x \in B\left(x_{i_{m_o}}; \frac{1}{m}\right)$, para algum $i_{m_o} \in \{1, \dots, N_m\}$, ou seja,

$$d(x, x_{i_{m_o}}) < \frac{1}{m} < \eta,$$

logo, $x \in \bar{E}$.

Logo, do Teorema (3.3.1), segue que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente em E , ou seja, a sequência numérica $(f_{n_k}(x))_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge em A , para cada $x \in E$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos a função $g_k : K \rightarrow A$ dada por

$$g_k(x) \doteq f_{n_k}(x), \quad x \in K.$$

Afirmamos que a sequência de funções $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em K , o que completará a demonstração de 2. (pois a sequência $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$).

De fato, sem perda de generalidade podemos escrever

$$E \doteq \{x_j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como em (3.70) (obtido do fato que a família $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua).

Notemos que se $x \in K$, como $\bar{E} = K$, temos que $x \in B(x_{j_x}; \delta)$ para algum $j_x \in \mathbb{N}$, assim

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x; \delta) \stackrel{\bar{E}=K}{\subseteq} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(x_j; \delta),$$

e como K é compacto em (X, d) segue que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^N B(x_k; \delta),$$

renomeando, se necessário, os elementos do conjunto E .

Para cada $j \in \{1, \dots, N\}$, como a sequência numérica $(g_k(x_j))_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente em A , segue que ela será uma sequência numérica de Cauchy, logo existirá $N_j = N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$i, k \geq N_j \quad \text{então} \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, se

$$\bar{N} \doteq \max\{N_j : j = 1, \dots, N\} \in \mathbb{N},$$

da desigualdade acima, teremos

$$i, k \geq \bar{N}, \quad \text{implicará} \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.74)$$

Logo se $x \in K$ teremos que $x \in B(x_{j_0}, \delta)$, para algum $j_0 \in \{1, \dots, N\}$, assim segue que

$$d(x, x_{j_0}) < \delta \quad \text{e, por (3.70), segue} \quad \underbrace{|g_i(x) - g_i(x_{j_0})|}_{f_{n_i}(x)} = \underbrace{|f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_{j_0})|}_{f_{n_i}(x_{j_0})} \stackrel{(3.70)}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (3.75)$$

Portanto se $i, k \geq \bar{N}$ teremos

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_k(x)| &= |[g_i(x) - g_k(x)] + [g_i(x_{j_0}) - g_i(x_{j_0})] + [g_k(x_{j_0}) - g_k(x_{j_0})]| \\ &\leq \underbrace{|g_i(x) - g_i(x_{j_0})|}_{d(x, x_{j_0}) < \delta \circ (3.75) \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_i(x_{j_0}) - g_k(x_{j_0})|}_{i, k \geq \bar{N} \circ (3.74) \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_k(x_{j_0}) - g_k(x)|}_{d(x, x_{j_0}) < \delta \circ (3.75) \frac{\varepsilon}{3}} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uniformemente de Cauchy em K .

Logo do Teorema (3.2.1) (na verdade do item 2. da Observação (3.2.2)) segue que a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uniformemente convergente em K , ou seja, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em K , completando a demonstração do item 2. e portanto do resultado. $\square$

3.4 O teorema de Stone-Weierstrass

O Teorema de Stone-Weierstrass nos diz que o conjunto formado pelos polinômios com coeficientes complexos é denso nas funções contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado a valores complexos, com a métrica da convergência uniforme, mais especificamente:

Teorema 3.4.1 *Seja $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$.*

Então existe uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$p_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em } [a, b].$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ então a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser escolhida com coeficientes reais.

Demonstração:

Começaremos mostrando as seguintes afirmações:

1. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$[a, b] = [0, 1].$$

De fato, suponhamos que para $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ exista uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em } [0, 1].$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$ consideremos a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$g(x) \doteq f[a + x(b - a)], \quad x \in [0, 1]. \quad (3.76)$$

Com isto teremos que $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$, logo existirá uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em } [0, 1].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando-se a função $p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$p_n(x) \doteq q_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \quad x \in [a, b],$$

segue que a função p_n será uma função polinomial definida em $[a, b]$.

Com isto teremos que

$$p_n(x) = q_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \stackrel{(3.76)}{=} f\left[a + \left(\frac{x - a}{b - a}\right)(b - a)\right] = f(x), \quad x \in [a, b],$$

ou seja,

$$p_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em } [a, b],$$

mostrando que a afirmação 1. é verdadeira.

2. Também podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(0) = f(1) = 0.$$

De fato, suponhamos que para $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ satisfazendo

$$g(0) = g(1) = 0,$$

exista uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em } [0, 1].$$

Dada $f \in C([0, 1]; \mathbb{C})$, se considerarmos a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) \doteq f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1],$$

segue que $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ e além disso

$$g(0) = f(0) - f(0) - 0[f(1) - f(0)] = 0,$$

$$g(1) = f(1) - f(0) - 1[f(1) - f(0)] = 0.$$

Notemos que, neste caso, teremos:

$$f(x) = g(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1]. \quad (3.77)$$

Logo se existir uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em } [0, 1],$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando-se a função $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (que será uma função polinomial) dada por

$$p_n(x) \doteq q_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1],$$

teremos

$$p_n(x) \doteq q_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)] \stackrel{(3.77)}{=} f(x), \quad x \in [0, 1],$$

ou seja,

$$p_n \xrightarrow{u} f, \quad \text{em } [0, 1],$$

mostrando que a afirmação 2. é verdadeira.

Resumindo as duas afirmações acima: sem perda de generalidade, podemos supor que $f \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ satisfaz

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Com isto, podemos estender a função f , continuamente, à reta toda, do seguinte modo (indicaremos a extensão da mesma também por f):

$$f(x) \doteq \begin{cases} f(x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1]^c \doteq (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}.$$

Com isto a função f será uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $q_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$q_n \doteq c_n(1 - x^2)^n, \quad x \in [-1, 1],$$

onde $c_n \in (0, \infty)$ é tal que

$$\int_{-1}^1 q_n(x) dx = 1. \quad (3.78)$$

Notemos também que para $x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pelo Binômio de Newton temos:

$$\begin{aligned} (1 - x^2)^n &\stackrel{\text{Bin. Newton}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (-1)^k x^{2k} \\ &= 1 - nx^2 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{n!}{(n-k)! k!} (-1)^k x^{2k}}_{\geq 0} \geq 1 - nx^2. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Por outro lado, observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &\stackrel{(1-x^2)^n \text{ é par}}{=} 2 \int_0^1 \underbrace{(1 - x^2)^n}_{\geq 0} dx \stackrel{\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1}{\geq} 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - x^2)^n dx \stackrel{(3.79)}{\geq} 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nx^2) dx \\ &= 2 \left(x - n \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{n}{3n^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

o que implicará em

$$c_n \doteq \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx} < \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $0 < \delta < 1$ e

$$\delta \leq |x| \leq 1 \Rightarrow \delta^2 \leq x^2 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 \leq (1 - \delta^2)$$

assim, se

$$\delta \leq |x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq q_n(x) = \underbrace{c_n}_{< \sqrt{n}} \underbrace{(1 - x^2)^n}_{\leq 1 - \delta^2} < \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n. \quad (3.81)$$

Mas

$$\sqrt{n} (1 - \delta^2)^n = n^{\frac{1}{2}} (1 - \delta^2)^n = \left(n^{\frac{1}{2n}} (1 - \delta^2)^n \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.82)$$

pois

$$n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{e} \quad (1 - \delta^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{pois } 0 < \delta < 1).$$

Logo, de (3.82) e (3.81), segue que

$$q_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{para } \delta \leq |x| \leq 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considermos a função $p_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$p_n(x) \doteq \int_{-1}^1 f(x+t)q_n(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções f e q_n são funções contínuas em $[-1, 1]$ segue que a função p_n está bem definida.

Notemos que para cada $x \in [0, 1]$, como $f = 0$ em $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, segue que para

$$t \in [-1, -x] \Rightarrow t+x \in [x-1, 0] \subseteq (-\infty, 0] \Rightarrow f(x+t) = 0 \quad (3.83)$$

$$t \in [1-x, 1] \Rightarrow t+x \in [1, 1+x] \subseteq [1, \infty) \Rightarrow f(x+t) = 0. \quad (3.84)$$

Logo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \int_{-1}^1 f(x+t)q_n(t) dt \\ &= \underbrace{\int_{-1}^{-x} f(x+t)q_n(t) dt}_{(3.83)_0} + \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t) dt + \underbrace{\int_{1-x}^1 f(x+t)q_n(t) dt}_{(3.84)_0} \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t) dt \begin{pmatrix} u \doteq x+t \Rightarrow du = dt \\ t = -x \Rightarrow u = 0 \\ t = 1-x \Rightarrow u = 1 \end{pmatrix} \int_0^1 f(u)q_n(u-x) du. \end{aligned}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o lado direito da igualdade acima é um polinômio na variável x , ou seja, a sequência de funções $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções polinomiais (que serão reais se a função f for real).

Dado $\varepsilon > 0$, como a função f é uniformemente contínua, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$|y - x| < \delta \quad \text{teremos} \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.85)$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad (= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|). \quad (3.86)$$

Com isto teremos, para cada $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$, que:

$$\begin{aligned}
 |p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 f(x+t) q_n(t) dt - f(x) \underbrace{\int_{-1}^1 q_n(t) dt}_{(3.78)_1} \right| \\
 &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] q_n(t) dt \right| \leq \int_{-1}^1 \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\geq 0} q_n(t) dt \\
 &= \int_{-1}^{-\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{(3.86) \leq 2M} q_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{(3.85) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pois } |(x+t)-x|=|t|<\delta} q_n(t) dt \\
 &\quad + \int_{\delta}^1 \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{(3.86) \leq 2M} q_n(t) dt \\
 &< 2M \left(\int_{-1}^{-\delta} \underbrace{q_n(t)}_{(3.81) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n} dt + \int_{\delta}^1 \underbrace{q_n(t)}_{(3.81) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n} dt \right) + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t) dt}_{\leq \int_{-1}^1 q_n(t) dt \stackrel{(3.78)_1}{=} 1} \\
 &\leq 2M \left[2\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \right] \underbrace{\delta}_{< 1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\text{de (3.82), existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que se } n \geq N \text{ segue que } \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
 \end{aligned}$$

mostrando que

$$p_n \xrightarrow{u} f \quad \text{em } [0, 1],$$

completando a demonstração do resultado. □

Como consequência temos o

Corolário 3.4.1 Para cada $a > 0$ fixado, consideremos a função $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq |x|, \quad x \in [-a, a].$$

Então existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$p_n(0) = 0$$

e

$$p_n \xrightarrow{u} f \quad \text{em } [-a, a].$$

Demonstração:

Como $f \in C([-a, a]; \mathbb{R})$ segue do Teorema de Stone-Weierstrass que existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$p_n^* \xrightarrow{u} f \quad \text{em } [-a, a]. \quad (3.87)$$

Em particular, teremos

$$p_n^*(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) = 0. \quad (3.88)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p_n(x) \doteq p_n^*(x) - p_n^*(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De (3.87) e (3.88) segue que

$$p_n = \underbrace{p_n^*}_{\xrightarrow{u} f} - \underbrace{p_n^*(0)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{u} f \quad \text{em } [-a, a]$$

e

$$p_n(0) = p_n^*(0) - p_n^*(0) = 0,$$

completando a demonstração do resultado. □

Temos a

Definição 3.4.1 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$.*

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E; \mathbb{C}) \doteq \{f; f : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ é função}\}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; \mathbb{C})$ se:

- (i) *se $f, g \in \mathcal{A}$ então $f + g \in \mathcal{A}$;*
- (ii) *se $f, g \in \mathcal{A}$ então $f \cdot g \in \mathcal{A}$;*
- (iii) *se $c \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{A}$ então $cf \in \mathcal{A}$.*

Se as funções consideradas forem a valores reais no item (iii) consideraremos apenas $c \in \mathbb{R}$.

Na situação acima, podemos introduzir a:

Definição 3.4.2 *Diremos que uma álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E; \mathbb{C})$ é uniformemente fechada se dada uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ em E implicar $f \in \mathcal{A}$.*

Observação 3.4.1 *O conjunto $\mathcal{B}$ formado por todas as funções de $\mathcal{F}(E; \mathbb{C})$ que são limites uniformes de sequências de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ será dito fecho uniforme de $\mathcal{A}$, e será indicado por $\overline{\mathcal{A}}$.*

Como exemplo temos o

Exemplo 3.4.1 *Sejam $E \doteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e*

$$\mathcal{A} \doteq \{p; p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ é função polinomial}\}.$$

Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $C([a, b]; \mathbb{R})$ (deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato) e o Teorema de Stone-Weierstrass garante que

$$\overline{\mathcal{A}} = C([a, b]; \mathbb{R}).$$

Para o próximo resultado precisaremos do seguinte exercício (cuja resolução será deixada par o leitor):

Exercício 3.4.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ e*

$$\mathcal{A} \doteq \{f; f: E \rightarrow \mathbb{C} \text{ é função limitada}\}.$$

Mostre que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; \mathbb{C})$.

Com isto temos o

Teorema 3.4.2 *Consideremos E e $\mathcal{A}$ como no Exercício acima e consideremos*

$$\mathcal{B} \doteq \overline{\mathcal{A}}.$$

Então $\mathcal{B}$ é uma álgebra uniformemente fechada.

Demonstração:

Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma álgebra.

Para isto:

1. se $f, g \in \mathcal{B}$ segue que existem sequências $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{e} \quad g_n \xrightarrow{u} g. \quad (3.89)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ então $f_n + g_n \in \mathcal{A}$.

Além disso, de (3.89), segue que

$$f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g,$$

ou seja, $f + g \in \mathcal{B}$.

2. De modo semelhante, se $c \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{B}$ segue que existe sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$f_n \xrightarrow{u} f. \quad (3.90)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $cf_n \in \mathcal{A}$ então $cf_n \in \mathcal{A}$.

Além disso, de (3.90), segue que

$$cf_n \xrightarrow{u} cf,$$

ou seja, $cf \in \mathcal{B}$

3. se $f, g \in \mathcal{B}$ segue que existem sequências $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tais que

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{e} \quad g_n \xrightarrow{u} g. \quad (3.91)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ então $f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}$.

Além disso, de (3.91), segue que

$$f_n \cdot g_n \xrightarrow{u} f \cdot g.$$

De fato, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |[f_n(x)g_n(x) - f(x) \cdot g(x)] + [f_n(x)g(x) - f_n(x) \cdot g(x)]| \\ &\leq |f_n(x)[g_n(x) - g(x)]| + |f_n(x) - f(x)|g(x)| \\ &\leq \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq N} |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| \underbrace{|g(x)|}_{\leq M} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in E$,

ou seja,

$$f_n \cdot g_n \xrightarrow{u} f \cdot g,$$

ou ainda, $f \cdot g \in \mathcal{B}$,

mostrando que $\mathcal{B}$ é uma álgebra.

Assim, por construção, $\mathcal{B}$ é uma álgebra uniformemente fechada.

□

Nosso objetivo, no que segue, é estender o Teorema de Stone-Weierstrass.

Para isto precisaremos introduzir alguns conceitos, entre eles, a:

Definição 3.4.3 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$ e $\mathcal{F}(E; A) \doteq \{f; f: E \rightarrow A \text{ é função}\}$.*

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E; A)$ é uma família que separa pontos de E se para cada $x_1, x_2 \in E$ com

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{existe} \quad f \in \mathcal{A}, \quad \text{tal que} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Por outro lado, diremos que a família $\mathcal{A}$ não se anula em nenhum ponto de E se para cada $x_0 \in E$,

$$\text{existe} \quad g \in \mathcal{A}, \quad \text{tal que} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Como exemplo destes dois tipos de famílias temos o:

Exemplo 3.4.2 *Seja $\mathcal{A} \doteq \{p; p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é função polinomial}\} \subseteq \mathcal{F}(E; A)$.*

Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$.

Notemos que se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$ então considerando-se a função polinomial $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, $p \in \mathcal{A}$) dada por

$$p(t) \doteq t, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que

$$p(x_1) = x_1 \neq x_2 = p(x_2),$$

mostrando que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ que separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_0 \in \mathbb{R}$, considerando-se a função polinomial $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou seja, $q \in \mathcal{A}$) dada por

$$q(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que

$$q(x_0) = 1 \neq 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.4.3 *Seja*

$$\mathcal{A} \doteq \{p; p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é função polinomial par}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$

(ou seja, se $p \in \mathcal{A}$ deveremos ter $p(-t) = p(t)$, $t \in \mathbb{R}$).

Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e que não separa pontos de $\mathbb{R}$ que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Notemos que se $x_1 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq 0$ teremos que $x_1 \neq x_2 \doteq -x_1$ e para todo $p \in \mathcal{A}$, como a função p é uma função par segue que

$$p(x_2) = p(-x_1) \stackrel{p \text{ é função par}}{=} p(x_1),$$

mostrando que a álgebra $\mathcal{A}$ não em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_0 \in \mathbb{R}$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$q(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que $q \in \mathcal{A}$ e

$$q(x_0) = 1 \neq 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Observação 3.4.2 *Notemos que se*

$$\mathcal{A} \doteq \{p; p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é função polinomial ímpar}\}$$

(ou seja, se $p \in \mathcal{A}$ deveremos ter $p(-t) = -p(t)$, $t \in \mathbb{R}$ então $\mathcal{A}$ é não é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ (pois produto de duas funções ímpares é uma função par).

Com isto temos o:

Proposição 3.4.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$ e $\mathcal{A}$ uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de E .*

Consideremos $x_1, x_2 \in E$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $c_1, c_2 \in A$.

Então existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

$$f(x_1) = c_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = c_2. \quad (3.92)$$

Demonstração:

Como $x_1 \neq x_2$ e a álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathcal{F}(E; A)$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de E , segue que existem $g, h, k \in \mathcal{A}$ tais que

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad k(x_2) \neq 0. \quad (3.93)$$

Consideremos as funções $u, v : E \rightarrow A$ dadas por

$$u(x) \doteq g(x)k(x) - g(x_1)k(x), \quad (3.94)$$

$$v(x) \doteq g(x)h(x) - g(x_2)h(x), \quad x \in E. \quad (3.95)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ e $g, h, k \in \mathcal{A}$ teremos que $u, v \in \mathcal{A}$.

Notemos que

$$u(x_1) \doteq g(x_1)k(x_1) - g(x_1)k(x_1) = 0, \quad (3.96)$$

$$u(x_2) \doteq g(x_2)k(x_2) - g(x_1)k(x_2) = \underbrace{[g(x_2) - g(x_1)]}_{\substack{(3.93) \\ \neq 0}} \underbrace{k(x_2)}_{\substack{(3.93) \\ \neq 0}} \neq 0, \quad (3.97)$$

$$v(x_2) \doteq g(x_2)h(x_2) - g(x_2)h(x_2) = 0, \quad (3.98)$$

$$v(x_1) \doteq g(x_1)h(x_1) - g(x_2)h(x_1) = \underbrace{[g(x_1) - g(x_2)]}_{\substack{(3.93) \\ \neq 0}} \underbrace{h(x_1)}_{\substack{(3.93) \\ \neq 0}} \neq 0. \quad (3.99)$$

Para finalizar, consideremos a função $f : E \rightarrow A$ dada por

$$f(x) \doteq \underbrace{\frac{c_1}{v(x_1)}}_{\substack{(3.99) \\ \neq 0}} v(x) + \underbrace{\frac{c_2}{u(x_2)}}_{\substack{(3.97) \\ \neq 0}} u(x), \quad x \in E. \quad (3.100)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ e $u, v \in \mathcal{A}$ teremos que $f \in \mathcal{A}$ e, além disso,

$$\begin{aligned} f(x_1) &\doteq \frac{c_1}{v(x_1)} v(x_1) + \frac{c_2}{u(x_2)} \overbrace{u(x_1)}^{(3.96)_0} = c_1, \\ f(x_2) &\doteq \frac{c_1}{v(x_1)} \underbrace{v(x_2)}_{(3.98)_0} + \frac{c_2}{u(x_2)} u(x_2) = c_2, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado. □

Podemos agora enunciar e demonstrar o Teorema de Stone, a saber:

Teorema 3.4.3 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A} \subseteq C(K; \mathbb{R})$ uma álgebra em $\mathcal{F}(K; \mathbb{R})$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de K .*

Então

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{R}). \quad (3.101)$$

Demonstração:

Notemos que, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$, se $f \in \mathcal{A}$ teremos que $|f| \in \mathcal{A}$.

De fato, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e a função f é contínua em K segue que ela será uma função limitada em K , ou seja, existe

$$a \doteq \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, do Corolário (3.4.1), segue que existem $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que (para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p_n(y)$ é um polinômio tal que $p_n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $p_n(y) = \sum_{i=1}^n c_i y^i$, $y \in \mathbb{R}$, para alguns $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$):

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon, \quad y \in [-a, a]. \quad (3.102)$$

Definamos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq \sum_{i=1}^n c_i f^i(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E; A)$ que contém a álgebra $\mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}$, segue que $g \in \overline{\mathcal{A}}$.

Mas

$$|g(x) - |f(x)|| = \left| \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{f^i(x)}_{=y^i \in [-a, a]} - \underbrace{|f(x)|}_{=y \in [-a, a]} \right| \stackrel{(3.102)}{<} \varepsilon, \quad x \in K,$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é uniformemente fechada e $g \in \overline{\mathcal{A}}$, segue que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, como afirmamos.

Afirmamos também que se $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ então as funções $h, s : K \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) \doteq \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad s(x) \doteq \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in K$$

satisfazem $h, s \in \overline{\mathcal{A}}$.

De fato, pois, para cada $x \in K$ temos que:

(i) se

$$\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$$

então

$$\min\{f(x), g(x)\} = g(x)$$

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \stackrel{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{f(x) - g(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

e

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \stackrel{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{f(x) - g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} h(x) &= \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ s(x) &= \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}. \end{aligned}$$

(ii) de modo semelhante, se

$$\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$$

então

$$\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$$

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \stackrel{g(x) \geq f(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{f(x) - g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

e

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \stackrel{g(x) \geq f(x)}{=} \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{f(x) - g(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} h(x) &= \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}, \\ s(x) &= \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, se $x \in K$ teremos

$$\begin{aligned} h(x) &= \max\{f(x), g(x)\} = \underbrace{\frac{f(x) + g(x)}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}} + \underbrace{\frac{|f(x) - g(x)|}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}}, \\ s(x) &= \min\{f(x), g(x)\} = \underbrace{\frac{f(x) + g(x)}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}} - \underbrace{\frac{|f(x) - g(x)|}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}}, \end{aligned}$$

mostrando, em particular, que $h, s \in \overline{\mathcal{A}}$, com afirmamos acima.

Afirmamos também que, se $f \in C(K; \mathbb{R})$ e $x_0 \in K$, dado $\varepsilon > 0$, existe $g_{x_0} \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$g_{x_0}(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad f(t) - \varepsilon < g_{x_0}(t), \quad t \in K. \quad (3.103)$$

De fato, notemos que, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ segue que a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de funções limitadas, logo do Teorema (3.4.2), segue que $\overline{\mathcal{A}}$ será uma álgebra (que será uniformemente fechada) que contém a álgebra $\mathcal{A}$, que separa pontos e que não se anula em nenhum ponto de K , segue que a álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ também terá essas propriedades.

Logo para cada $y \in K$, $y \neq x_0$, da Proposição (3.4.1) (tomando-se $x_1 \doteq x_0$, $x_2 \doteq y$, $c_1 \doteq f(x_0)$ e $c_2 \doteq f(y)$), segue que existe $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$h_y(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad h_y(y) = f(y). \quad (3.104)$$

Como as funções h_y, f são contínuas em K e $h_y(y) = f(y)$, existe $\delta_y > 0$ de modo que se $t \in K$ e

$$\begin{aligned} |y - t| < \delta_y \quad \text{segue que} \quad |h_y(t) - f(y)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f(t) - f(y)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

assim, se $t \in K$ e $|y - t| < \delta_y$ teremos

$$\begin{aligned} |h_y(t) - f(t)| &= |[h_y(t) - f(y)] + [f(y) - f(t)]| \leq \underbrace{|h_y(t) - f(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y) - f(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\ \Leftrightarrow \quad -\varepsilon &< h_y(t) - f(t) < \varepsilon, \end{aligned}$$

em particular, se $J_y \doteq (y - \delta_y, y + \delta_y) \cap K$ teremos

$$f(t) - \varepsilon < h_y(t), \quad t \in J_y. \quad (3.105)$$

Deste modo teremos $K \subseteq \bigcup_{y \in K} J_y$ e como K é um conjunto compacto em $\mathbb{R}$ (e J_y são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$), segue que existem $y_1, \dots, y_{N_0} \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_0} J_{y_i}.$$

Para cada $x_0 \in K$ definamos a função $g_{x_0} : K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_{x_0}(t) \doteq \max\{h_{y_1}(t), \dots, h_{y_{N_0}}(t)\}, \quad t \in K.$$

Como, para cada $i \in \{1, \dots, N_0\}$ temos $h_{y_i} \in \overline{\mathcal{A}}$ segue que $g_{x_0} \in \overline{\mathcal{A}}$.

Notemos que se $t \in K$ segue que existe $i_0 \in \{1, \dots, N_0\}$ tal que

$$t \in J_{i_0} \stackrel{(3.105)}{\Rightarrow} h_{i_0}(t) > f(t) - \varepsilon. \quad (3.106)$$

Assim teremos

$$g_{x_0}(x_0) = \max\{\underbrace{h_{y_1}(x_0)}_{(3.104) f(x_0)}, \dots, \underbrace{h_{y_{N_0}}(x_0)}_{(3.104) f(x_0)}\} = f(x_0), \quad (3.107)$$

$$g_{x_0}(t) = \max\{h_{y_1}(t), \dots, h_{y_{N_0}}(t)\} \geq h_{i_0}(t) \stackrel{(3.106)}{>} f(t) - \varepsilon, \quad (3.108)$$

completando a prova da afirmação.

Como, para cada $x_0 \in K$, temos $f, g_{x_0} \in C(K; \mathbb{R})$, segue que existe $\delta_{x_0} > 0$ tal que se $t \in K$ são tais que

$$|t - x_0| < \delta_{x_0} \quad \text{segue que} \quad |g_{x_0}(t) - g_{x_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad (3.109)$$

$$|f(x_0) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.110)$$

assim se $t \in K$ e satisfaz

$$\begin{aligned} |t - x_0| < \delta_{x_0} \quad \text{teremos} \quad |g_{x_0}(t) - f(t)| &= |[g_{x_0}(t) - g_{x_0}(x_0)] + \overbrace{[g_{x_0}(x_0) - f(t)]}^{(3.107) f(x_0)}| \\ &\leq \underbrace{|g_{x_0}(t) - g_{x_0}(x_0)|}_{(3.109) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_0) - f(t)|}_{(3.110) < \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\ \Rightarrow \quad -\varepsilon < g_{x_0}(t) - f(t) < \varepsilon, \end{aligned}$$

em particular, segue que se $t \in K$ satisfaz

$$|t - x_0| < \delta_{x_0}, \quad \text{teremos:} \quad f(t) - \varepsilon < g_{x_0}(t) < f(t) + \varepsilon. \quad (3.111)$$

Mas $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x; \delta_x)$, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, segue que existem $x_1, \dots, x_{N_1} \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_1} B(x_i; \delta_{x_i}). \quad (3.112)$$

Consideremos a função $h: K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \min\{g_{x_1}(x), \dots, g_{x_{N_1}}(x)\}, \quad x \in K.$$

Como $g_{x_i} \in \overline{\mathcal{A}}$, para $i = 1, \dots, N_1$, segue que $h \in \overline{\mathcal{A}}$.

Além disso, para $t \in K$, teremos

$$\begin{aligned} h(t) &= \min\{g_{x_1}(t), \dots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{\text{Existe } i_1 \in \{1, \dots, N_1\} \text{ tal que}}{=} g_{x_{i_1}}(t) \stackrel{(3.103)}{>} f(t) - \varepsilon, \\ h(t) &= \min\{g_{x_1}(t), \dots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{(3.112) \Rightarrow t \in B(x_{i_0}, \delta_{i_0}) \text{ para algum } i_0 \in \{1, \dots, N_1\}}{\leq} g_{x_{i_0}}(t) \stackrel{(3.111)}{<} f(t) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja

$$|h(x) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \in K,$$

completando a demonstração do resultado. □

Observação 3.4.3

1. O Teorema de Stone só é válido para álgebras contidas nas funções contínuas definidas em compactos a valores reais, isto é, o Teorema de Stone não é válido para álgebras contidas nas funções contínuas a valores complexos (ver Exercício 21 página 169).

2. O Teorema de Stone será válido para álgebras contidas nas funções contínuas em compactos a valores complexos se acrescentarmos a hipótese da álgebra $\mathcal{A}$ ser auto-adjunta, isto é, se

$$f \in \mathcal{A}, \text{ implicar } \bar{f} \in \mathcal{A},$$

onde se $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ então definimos a função $\bar{f}: K \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo

$$\bar{f}(x) \doteq \overline{f(x)}, \quad x \in K,$$

sendo que $\bar{z}$ denota o conjugado do número complexo z .

Mais precisamente, temos o:

Corolário 3.4.2 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A} \subseteq C(K; \mathbb{C})$ uma álgebra auto-adjunta em K que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de K .*

Então

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C}). \quad (3.113)$$

Demonstração:

Consideremos

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \doteq \{f \in \mathcal{A}; f \text{ é uma função a valores reais}\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ é uma álgebra real (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor).

Notemos que se $f \in \mathcal{A}$ então podemos escrever

$$f(x) = u(x) + i v(x), \quad x \in K,$$

onde $u, v: K \rightarrow \mathbb{R}$ são funções a valores reais.

Neste caso teremos

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2}. \quad (3.114)$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra auto-adjunta em K segue que, $\bar{f} \in \mathcal{A}$ e assim (3.114) implicará que $u \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

Notemos também que se $x_1, x_2 \in K$ são tais que $x_1 \neq x_2$ então, como a álgebra $\mathcal{A}$ separa pontos de K , segue, da Proposição (3.4.1), que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

$$f(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = 0.$$

Isto implicará que

$$u(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad u(x_2) = 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ separa pontos de K .

Por outro lado, se $x_0 \in K$, como a álgebra $\mathcal{A}$ não se anula em nenhum ponto de K , segue, da Proposição (3.4.1), que existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$g(x_0) \neq 0.$$

Seja $\lambda \doteq \overline{g(x_0)}$.

Neste caso teremos que

$$\lambda g(x_0) = \underbrace{|g(x_0)|}_{\neq 0}^2 > 0.$$

Consideremos a função $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) \doteq \lambda g(x), \quad x \in K$$

e sejam $u, v : K \rightarrow \mathbb{R}$ as funções a valores reais tais que

$$f = u + iv.$$

Neste caso teremos

$$u(x_0) = \Re[f(x_0)] = \Re[\underbrace{\lambda g(x_0)}_{=|g(x_0)|}] = \underbrace{|g(x_0)|}_{\neq 0} > 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ não se anula em nenhum ponto de K .

Logo do Teorema de Stone (isto é, Teorema (3.4.3)) segue que $\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = C(K; \mathbb{R})$.

Por fim, notemos que se $f \in C(K; \mathbb{C})$ segue que $f = u + iv$, onde $u, v \in C(K; \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$, ou seja, $C(K; \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}}$, completando a demonstração. $\square$

Para finalizar temos o

Corolário 3.4.3 *Toda função contínua e 2π -periódica a valores reais pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico em $\mathbb{R}$, isto é, por uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo*

$$g(t) = \sum_{n=0}^N [A \cos(nt) + B \sin(nt)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Denotemos por

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{f; f \text{ é uma função contínua e } 2\pi\text{-periódica a valores reais definidas em } \mathbb{R}\}.$$

Consideremos

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ g; g(t) = \sum_{n=0}^N [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)], \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra que separa pontos e que não se anula em nenhum ponto de $[-\pi, \pi]$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor).

Logo, do Teorema de Stone segue que $\overline{\mathcal{A}} = C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 3.4.4 *O resultado acima permanece válido se considerarmos funções contínuas e 2π -periódicas a valores complexos, mais precisamente, se denotarmos por*

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \{f; f \text{ é uma função contínua e } 2\pi\text{-periódica a valores complexos definida em } \mathbb{R}\}.$$

e

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ g; g(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R} \right\},$$

pode-se mostrar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, auto-adjunta, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $[-\pi, \pi]$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) e assim, do Corolário (3.4.2) segue que $\overline{\mathcal{A}} = C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, como queríamos demonstrar.

3.5 Exercícios

Capítulo 4

Séries de Potências e de Fourier

Começaremos este capítulo tratando das séries de potências e mais adiante trataremos das séries de Fourier.

4.1 Séries de potências

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um aberto de $\mathbb{R}$ e $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Nesta seção consideraremos funções f , como acima, que podem ser representadas por uma série de funções, denominada série de potências, do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-\delta, \delta) \quad (4.1)$$

ou mais geralmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \quad x \in (a - \delta, a + \delta) \quad (4.2)$$

denominada série de potências centrada em $x = a$.

Observação 4.1.1

1. Se a função f tem a propriedade que em cada ponto $a \in A$ existe $\delta_a > 0$ tal que a série de potências (4.2) converge para a função f no intervalo $(a - \delta_a, a + \delta_a) \subseteq A$ diremos que a função f é uma função analítica em A .
2. Se existe $R \in (0, \infty]$ tal que a série de funções (4.1) converge em $(-R, R)$ para a função f , diremos que a função f possui uma expansão em série de potências em torno de $x = 0$.
3. De modo semelhante, se existe $R \in (0, \infty]$ tal que a série de funções (4.2) converge em $(a - R, a + R)$ para a função f , diremos que a função f possui uma expansão em série de potências em torno de $x = a$.
4. Nosso estudo começará considerando-se $a = 0$, ou seja, estudando a série de potências (4.1).

Depois trataremos a série de potências (4.2) que, como veremos, será um caso particular da série de potências (4.1).

Com isto temos o

Proposição 4.1.1 *Sejam $x_0, x_1 \neq 0$.*

Então,

1. *se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ for convergente então a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente pontualmente convergente para $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*
2. *se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ for divergente então a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente para $x \in (-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$.*

Demonstração:

De 1.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ é convergente e $x_0 \neq 0$ logo, do Critério da Divergência para séries numéricas, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0.$$

Assim a sequência numérica $(c_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|c_n x_0^n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in (-|x_0|, |x_0|)$, ou seja, $|x| < |x_0|$, teremos

$$|c_n x^n| \stackrel{x_0 \neq 0}{=} |c_n x_0^n| \left| \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M r^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $r \doteq \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, pois $|x| < |x_0|$.

Como $0 \leq r < 1$ segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente (pois é uma série geométrica de razão r , que é menor do que 1).

Logo, do Critério da Comparação para séries numérica (cujos termos são não-negativos), segue que para cada $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ será convergente, portanto a série de potências

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente para $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

De 2.:

Sabemos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é divergente.

Suponhamos, por absurdo, que para algum $x_2 \in (-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ seja convergente.

Então do item 1. seguirá que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será convergente $x \in (-|x_2|, |x_2|)$, o que é

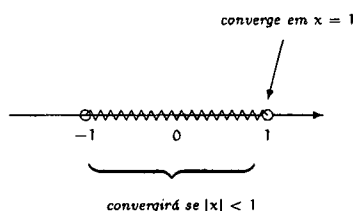
um absurdo, pois x_1 pertence a esse intervalo (pois $|x_2| > |x_1|$) mas a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é divergente.

Portanto a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente para $x \in (-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$. $\square$

A seguir consideraremos alguns exemplos, a saber:

Exemplo 4.1.1 A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente em $x_0 = 1$, pois a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.

Logo da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ será absolutamente convergente para $|x| < |x_0| = 1$ (veja figura abaixo).



Exemplo 4.1.2 A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ é convergente para $x \in (-1, 1)$, pois para $0 < x_0 < 1$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_0^{2n}$ será convergente.

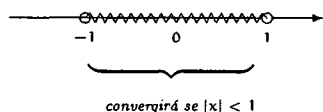
De fato,

$$|(-1)^n x_0^{2n}| \leq x_0^2 \doteq r < 1$$

e a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão r menor que 1.

Logo, do Teorema da Comparação para séries numérica (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_0^{2n}$ é convergente.

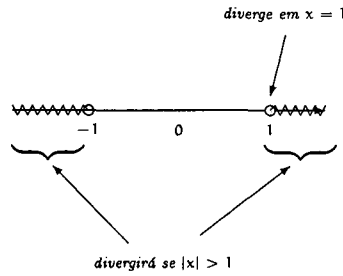
Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ será absolutamente convergente para $x \in (-x_0, x_0)$ para todo $x_0 \in (0, 1)$, isto é, será absolutamente convergente para $x \in (-1, 1)$.



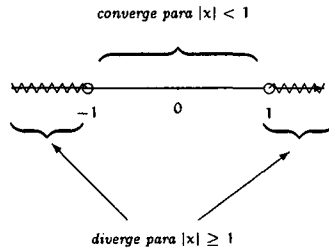
Por outro lado a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ é divergente em $x_1 = 1$ (pois a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ é divergente).

Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ é divergente para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (veja figura abaixo).

Além disso é fácil de ver (será deixado como exercício para o leitor) que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ é divergente em $x_1 = -1$.



Com isto temos a seguinte situação:



Em geral temos a seguinte situação:

Teorema 4.1.1 Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:

1. a série de potências só converge em $x = 0$;
2. a série de potências converge absolutamente em toda a reta $\mathbb{R}$;
3. existe $R > 0$ tal que a série de potências é absolutamente convergente para $x \in (-R, R)$ e divergente para $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$.

Demonstração:

Se o item 1. ocorrer, 2. e 3. não ocorrerão.

Vamos supor que o item 1. não ocorre, ou seja existe $x_0 \neq 0$ tal que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ seja convergente.

Logo do item 1. da Proposição (4.1.1), segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergirá absolutamente para $x \in (-|x_0|, |x_0|) = (-r, r)$, onde $r \doteq |x_0| > 0$.

Seja S o conjunto formado por todos os $r > 0$ que têm a propriedade acima, isto é, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para $x \in (-r, r)$.

O conjunto S é não vazio (pois $r = |x_0| > 0$ está em S).

Se S não for limitado então o item 2. ocorrerá, ou seja, a série de potências convergirá em toda a reta $\mathbb{R}$.

Se S for limitado afirmamos que o item 3. ocorrerá.

De fato, se S é limitado, como ele é não vazio, então existe $0 < R \doteq \sup S$.

Afirmamos que R satisfaz o item 3.

De fato, seja $r \in S$ tal que $0 < r < R$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_0| < r$.

Como $r \in S$ e $|x_0| < r$ temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ converge, logo, da Proposição (4.1.1)

item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para $x \in (-r, r)$.

Se $|x_1| > R$ afirmamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é divergente.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é convergente.

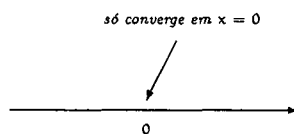
Então, pela Proposição (4.1.1) item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será convergente para $x \in (-|x_1|, |x_1|)$, ou seja, $|x_1| \in S$, o que é um absurdo pois teríamos $|x_1| > R = \sup S$ e $|x_1| \in S$.

Portanto a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge para $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, mostrando que R satisfaz 2., completando a demonstração do resultado. □

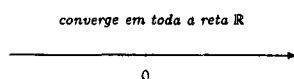
Observação 4.1.2

1. O Teorema acima nos diz que uma, e somente uma, das possibilidades abaixo, para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ocorrerá:

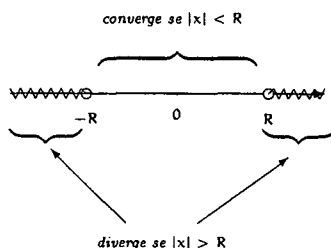
(i) $R = 0$:



(ii) $R = \infty$:



(iii) $0 < R < \infty$:



Neste último caso, poderá ocorrer todo tipo de situação em relação a convergência da série de potências nos pontos $x = -R$ e $x = R$ como veremos em exemplos a seguir.

2. O $0 < R \leq \infty$ obtido nos itens 2. e 3. do Teorema acima terá uma importância muito grande no estudo das séries de potências, como veremos.

Assim teremos a seguinte definição:

Definição 4.1.1 Definiremos raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ como sendo $R \in [0, \infty]$ obtido no Teorema acima.

O conjunto formado por todos os $x \in \mathbb{R}$ onde a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge será dito intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Observação 4.1.3

1. Segue do Teorema acima que toda série de potências tem um (único) raio de convergência e portanto um (único) intervalo de convergência.
2. O raio de convergência de uma série de potências pode ser 0, isto é, podemos ter $R = 0$.

Neste caso o intervalo de convergência da série de potências será $I = \{0\}$ (o conjunto formado por um ponto, que na verdade não é um intervalo), como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

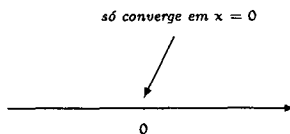
Observemos que para todo $x_1 > 0$ fixado temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x_1^n$ é divergente.

De fato, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^n x_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n x_1 = \infty > 1,$$

do Critério da Raiz para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x_1^n$ é divergente.

Assim, segue da Proposição (4.1.1) item 2., que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ só converge quando $x = 0$, isto é, $R = 0$ e o intervalo de convergência da série de potências é $I = \{0\}$.



3. O raio de convergência R pode ser infinito e portanto o intervalo de convergência associado a correspondente série de potências será $I = \mathbb{R}$, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Observemos que para todo $x_0 > 0$ fixado que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ é convergente.

De fato, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_0^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0}{n+1} = 0 < 1,$$

do Critério da Razão para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$ é convergente se $x_0 > 0$.

Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge em $\mathbb{R}$, isto é, $R = \infty$ e o intervalo de convergência da série de potências é $I = \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \text{converge em toda a reta } \mathbb{R} \\ \hline 0 \end{array}$$

4. Se $0 < R < \infty$, a priori, nenhuma conclusão podemos tirar sobre o comportamento da série de potência $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ nos pontos $x = -R$ e $x = R$.

Podemos ter situações, como veremos, que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ converge em um dos pontos e diverge no outro, ou diverge nos dois ou ainda converge nos dois.

Um exemplo de um desses casos é a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

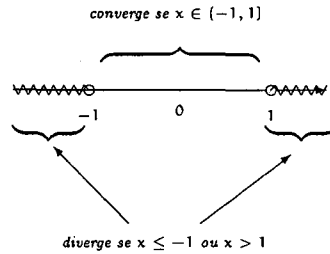
Observemos que a série de potências converge em $x_0 = 1$, pois a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente (série harmônica alternada).

Logo, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge para $|x| < 1$.

Por outro lado, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ diverge em $x_1 = -1$, pois a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (série harmônica).

Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ diverge para $|x| > 1$.

Com isto temos que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ será $R = 1$ e o seu intervalo de convergência será $I = (-1, 1]$, ou seja, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge em $x = R = 1$ e diverge em $x = -R = -1$.



Com isto podemos demonstrar o:

Teorema 4.1.2 Se existe $R \in (0, \infty]$ tal que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ seja pontualmente convergente para $x \in (-R, R)$ e definamos a função $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R). \quad (4.3)$$

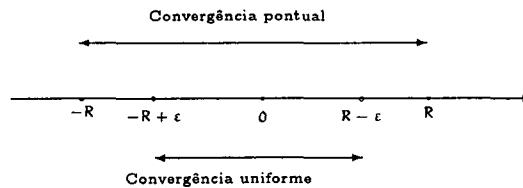
Então para $\varepsilon \in (0, R)$ a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será uniformemente em $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Em particular, a função f será diferenciável $(-R, R)$ (em particular, contínua) e

$$f'(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R), \quad (4.4)$$

ou seja, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode ser derivada termo a termos em $(-R, R)$.

Demonstração:



Dado $\varepsilon \in (0, R)$, para $|x| < R - \varepsilon$, teremos

$$|c_n x^n| = |c_n| |x|^n \leq |c_n| (R - \varepsilon)^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $R - \varepsilon \in (-R, R)$ segue, por hipótese, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (R - \varepsilon)^n$ é convergente.

Logo, segue do Teste M de Weierstrass (isto é, Teorema (3.2.2)) que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ será uniformemente em $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Notemos que do Corolário (3.2.3) segue que a função f será diferenciável $(-R, R)$ e vale (4.4), completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.1.4

1. Notemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \stackrel{L'Hospital}{=} 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

2. Do item acima temos que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nc_n x_0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|} |x_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} |x_0|,$$

logo, do Critério da Raiz para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n|$ converge se, e somente se, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x_0^{n-1}|$ converge, isto é, as séries de potências $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ têm o mesmo raio de convergência.

Conclusão: uma série de potências pode ser derivada, termo a termo, que a série de funções obtida será uma série de potências cujo raio de convergência é o mesmo da série de potências dada inicialmente.

3. Vale notar, como veremos em exemplos a seguir, que os intervalos de convergência das séries acima podem ser diferentes.

Podemos resumir as observações acima no:

Corolário 4.1.1 Nas condições do Teorema (4.1.2) temos que $f \in C^\infty((-R, R); \mathbb{R})$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n x^{n-k}, \quad x \in (-R, R). \quad (4.5)$$

Em particular, deveremos ter $f^{(k)}(0) = k! c_k$, ou seja,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \quad (4.6)$$

Demonstração:

Observemos que (4.5) segue da aplicação do Teorema (4.1.2) e da Observação acima (por indução sobre $k \in \mathbb{N}$).

Por outro lado, fazendo $x = 0$ em (4.5) obteremos

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n 0^{n-k} = k(k-1) \cdots 1 = c_k k!,$$

completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.1.5

1. Existem funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tais que

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como por exemplo a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Pode-se mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ teremos

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Assim, se $x \neq 0$ teremos

$$f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}^{=0} x^n$$

Em particular, a função f não é uma função analítica em $\mathbb{R}$.

2. Suponhamos que $R > 0$ e que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge em $x = R$.

Então o Teorema (4.1.2) garante que a função $f \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será contínua em $(-R, R)$.

O que podemos dizer sobre a função f em $x = R$?

O resultado a seguir, conhecido como **Teorema de Abel**, afirma que a função f será contínua em $x = R$ (na verdade trataremos do caso em que $R = 1$).

Teorema 4.1.3 Suponhamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ é convergente e consideremos $f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-1, 1].$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = f(1),$$

ou seja, a função f será contínua em $x = 1$.

Em particular, $f \in C((-1, 1]; \mathbb{R})$.

Demonstração:

Consideremos a sequência numérica $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, temos que

$$s_{-1} \doteq 0,$$

$$s_n \doteq \sum_{k=0}^n c_k.$$

Com isto, mostra-se, por indução sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que

$$c_n = s_n - s_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ fixados, teremos:

$$\sum_{n=0}^m c_n x^n = \sum_{n=0}^m (s_n - s_{n-1}) x^n.$$

Como

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m &= \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n - \sum_{n=0}^{m-1} \overbrace{s_n x^{n+1}}^{k=n+1} + s_m x^m \\ &= \sum_{n=0}^m s_n x^n - \underbrace{\sum_{k=1}^m s_{k-1} x^k}_{s_{-1} \doteq 0 \sum_{n=0}^m s_{n-1} x^n} \\ &= \sum_{n=0}^m \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=c_n} x^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{n=0}^m c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo, se $|x| < 1$, tomando-se o limite, quando $m \rightarrow \infty$, na identidade acima obteremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n + \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} s_m}_{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \in \mathbb{R}} \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} x^m}_{\substack{|x| < 1 \\ = 0}} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \quad (4.7)$$

Se

$$s \doteq \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \in \mathbb{R},$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_0 \quad \text{teremos} \quad |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, se $|x| < 1$ teremos

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1. \quad (4.9)$$

De fato, pois para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos que

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^m) &= (1+x+\cdots+x^m) - (x+x^2+\cdots+x^m+x^{m+1}) \\ &= 1-x^{m+1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty, \text{ pois } |x| < 1.\end{aligned}$$

Com isto, para $|x| < 1$, teremos

$$\begin{aligned}|f(x) - s| &\stackrel{(4.7), (4.9)}{=} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right| = |1-x| \left| \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s)x^n \right| \\ &\stackrel{x \in (-1,1)}{=} (1-x) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s)x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |(s_n - s)x^n| = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |s_n - s| |x|^n \\ &= (1-x) \left[\sum_{n=0}^{N_0} |s_n - s| \underbrace{|x|^n}_{<1} + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \underbrace{|s_n - s|}_{(4.8) \frac{\varepsilon}{2}} |x|^n \right] \\ &< (1-x) \left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N_0} |s_n - s|}_{\doteq M} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |x|^n \right] \leq M(1-x) + \frac{1-x}{1-|x|} \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.10)\end{aligned}$$

Notemos que se $M = 0$, a desigualdade acima implicará que

$$|f(x) - s| < \frac{1-x}{1-|x|} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo se $x \rightarrow 1^-$ podemos supor, sem perda de generalidade que, $0 < x < 1$, o que implicaria $1 - |x| = 1 - x$, assim

$$|f(x) - s| < \frac{1-x}{1-|x|} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1-x}{1-x} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ou seja, } f(x) = s, \quad \text{para } x \in (1-\delta, 1)$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = s = f(1),$$

mostrando que a função f é contínua em $x = 1$.

Por outro lado, se $M > 0$ consideremos

$$\delta \doteq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Logo se

$$0 \leq \frac{\delta \leq \frac{1}{2}}{1-\delta} < x < 1 \quad \text{teremos} \quad M(1-x)^{-x < \delta-1 \text{ e } M > 0} M[1 + (\delta-1)] = M\delta \stackrel{\delta \leq \frac{\varepsilon}{2M}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2},$$

logo, de (4.10), teremos

$$|f(x) - s| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{=1} + \underbrace{\frac{1-x}{1-|x|}}_{=x} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = s = f(1),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x = 1$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Como consequência temos o

Corolário 4.1.2 *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ séries numéricas convergentes com somas A , B e C , respectivamente, onde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ temos:*

$$c_n \doteq a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (4.11)$$

Então

$$C = A \cdot B.$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ g(x) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \\ h(x) &\doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Notemos que as funções acima estão bem definidas pois para cada $x_0 \in [0, 1]$, pela Proposição (4.1.1) item 1. segue que as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$, e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ serão absolutamente convergentes e para x_0 as correspondentes séries numéricas são convergentes, por hipótese.

Logo, para cada, para cada $x_0 \in [0, 1]$, as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n$, e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ podem ser multiplicadas (ver Teorema 3.50 página 74 do W.Rudin), ou seja,

$$h(x_0) = f(x_0) g(x_0), \quad x_0 \in [0, 1]. \quad (4.12)$$

Pelo Teorema de Abel, as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$ são contínuas à direita de $x = 1$ ou seja, se $x \rightarrow 1^-$, teremos

$$f(x) \rightarrow A, \quad g(x) \rightarrow B \quad \text{e} \quad h(x) \rightarrow C,$$

assim, passando o limite, quando $x_0 \rightarrow 1^-$ em (4.12), segue que $C = AB$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Temos também o seguinte resultado:

Teorema 4.1.4 *Seja $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e consideremos a sequência numérica $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que:*

$$b_i \doteq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \in [0, \infty).$$

Suponhamos que a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente em $\mathbb{R}$.

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}. \quad (4.13)$$

Demonstração:

Seja

$$E \doteq \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

um subconjunto enumerável de modo que

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ definamos a função $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(x_0) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}, \quad (4.14)$$

$$f_i(x_n) \doteq \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função f_i está bem definida.

De fato, pois em x_0 ela tem a expressão de uma série numérica que, por hipótese, é convergente e em x_n , para $n \in \mathbb{N}$, ela terá a expressão de uma soma finita.

Como

$$|f_i(x_0)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$$

e a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_0)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado teremos

$$|f_i(x_n)| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i. \quad (4.16)$$

Como a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente, do Critério da Comparação para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Observemos também que, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função f_i é contínua em x_0 .

De fato, como $x_n \rightarrow x_0$ segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(x_n) \stackrel{(4.15)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \stackrel{(4.14)}{=} f_i(x_0).$$

Definamos agora a função $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), \quad x \in E. \quad (4.17)$$

Notemos que a função g está bem definida e é contínua em x_0 .

De fato, pois para cada $k \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$|f_i(x_k)| \stackrel{(4.16)}{\leq} b_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Logo do Teste M de Weierstrass segue que a série de funções $g = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge uniformemente em E .

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, a função f_i é contínua em x_0 , segue que a função g será contínua em x_0 .

Por hipótese, temos que a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é absolutamente convergente, em particular, para

cada $n \in \mathbb{N}$ temos, a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)$ será convergente e teremos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right). \quad (4.18)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}}^{(4.14) f_i(x_0)} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) \stackrel{(4.17)}{=} g(x_0) \stackrel{g \text{ é cont. em } x_0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) \right] \stackrel{(4.15)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) \right] \\ &\stackrel{(4.18)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado. □

Enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Taylor que nos diz:

Teorema 4.1.5 *Sejam $R \in (0, \infty]$ o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e definamos a função $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Se $a \in (-R, R)$ então a função f pode ser expandida em uma série de potências em torno de $x = a$ que converge para a função f em $I_a \doteq (a - (R - |a|), a + (R - |a|))$ e além disso

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad x \in I_a. \quad (4.19)$$

Demonstração:

Notemos que se $x \in (-R, R)$ então

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x - a) + a]^n \stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} (x - a)^m \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} c_n \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a^{n-m} \right] (x - a)^m, \end{aligned}$$

que será a expansão da função f em série de potências em torno de $x = a$.

Notemos que se $a > 0$ segue que $|a| = a$ e assim teremos:

$$-R < x < R \Leftrightarrow -R - a < x - a < R - a \Leftrightarrow -R - |a| < x - a < R - |a|.$$

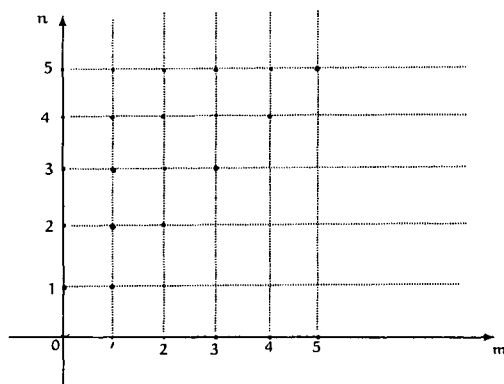
Vale algo semelhante se $a \leq 0$ (deixaremos os detalhes como exercício para o leitor).

Para terminar precisamos demonstrar a identidade (*).

Para isto afirmamos que, para cada $x_0 \in I_a$, a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x_0 - a)^m$ é absolutamente convergente.

De fato, pois (ver figura abaixo)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x_0 - a)^m \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n |c_n| \binom{n}{m} |a|^{n-m} |x_0 - a|^m \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \underbrace{\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |a|^{n-m} |x_0 - a|^m}_{\text{Binômio de Newton } (|x_0 - a| + |a|)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|x_0 - a| + |a|)^n. \end{aligned}$$



Como $x_0 \in I_a$, isto é, $a - (R - |a|) < x_0 < a + (R - |a|)$, segue que $|x_0 - a| + |a| < R$ e portanto a série numérica acima converge absolutamente, logo (*) segue do Teorema (4.1.4).

Para finalizar, notemos que se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - a)^n, \quad x \in I_a$$

então, se $I'_a \doteq (-R + |a|, R - |a|)$, definindo-se a função $g : I'_a \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq f(y + a) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n, \quad y \in I'_a, \quad (4.20)$$

teremos que

$$g^{(n)}(0) = n! d_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e como (verifique!)

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

segue que

$$d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e assim

$$f(x) = g(x - a) \stackrel{(4.20)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad x \in I_a,$$

completando a demonstração. □

Para finalizar esta seção temos o

Teorema 4.1.6 *Suponhamos que as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ são convergentes em $(-R, R)$.*

Seja

$$E \doteq \{x \in (-R, R) ; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\}.$$

Se E tem um ponto de acumulação então

$$a_n = b_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Em particular, $E = (-R, R)$, ou seja, as duas séries de potências acima coincidem em $(-R, R)$.

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja

$$c_n \doteq a_n - b_n$$

e consideremos a função $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Observemos que $x_0 \in E$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n, \quad \Leftrightarrow \quad 0 &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_0^n}_{= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x_0^n} = f(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{A} \subseteq (-R, R)$ o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de E e $\mathcal{B} \doteq (-R, R) \setminus \mathcal{A}$.

Por hipótese temos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ e notemos que se $x_0 \in \mathcal{A}$, como a função f é contínua em $(-R, R)$, segue que $f(x_0) = 0$, ou seja, $x_0 \in E$, logo $\mathcal{A} \subseteq E$.

De fato, notemos que se $x_0 \in \mathcal{A}$, deverá existir uma sequência numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que pertence a E tal que $x_n \rightarrow x_0$.

$$f(x_0) \stackrel{x_n \rightarrow x_0}{=} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{f \text{ é contínua em } x_0}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \stackrel{x_n \in E \Rightarrow f(x_n) = 0}{=} 0.$$

Notemos que, o conjunto $\mathcal{A}$ contém todos os seus pontos de acumulação, ou seja, o conjunto $\mathcal{A}$ é fechado em $(-R, R)$.

Como consequência temos que o conjunto $\mathcal{B}$ é um subconjunto aberto de $(-R, R)$.

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto aberto em $(-R, R)$.

Para mostrar isto consideremos $x_0 \in \mathcal{A} \subseteq (-R, R)$.

O Teorema acima garante que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R - |x_0|.$$

Afirmamos que:

$$d_n = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

De fato, caso contrário, como $f(x_0) = 0$, existirá $k_0 \in \mathbb{N}$, o menor natural, tal que $d_{k_0} \neq 0$ e assim teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=k_0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \stackrel{m \doteq n - k_0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_0} (x - x_0)^{m+k_0} \\ &= (x - x_0)^{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_0} (x - x_0)^m, \quad |x - x_0| < R - |x_0|, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Logo se considerarmos a função $g: I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_0} (x - x_0)^m, \quad x \in I_{x_0},$$

onde $I_{x_0} \doteq \{x \in (-R, R); |x - x_0| < R - |x_0|\}$, segue que

$$f(x) = (x - x_0)^{k_0} g(x), \quad |x - x_0| < R - |x_0|.$$

Observemos que a função g é contínua em x_0 (na verdade $g \in C^\infty(I_{x_0}; \mathbb{R})$ pois é dada por uma série de potências convergente) e $g(x_0) = d_{k_0} \neq 0$, pela escolha que fizemos acima.

Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que se

$$x \in B(x_0; \varepsilon) \subseteq I_{x_0}, \quad \text{teremos} \quad g(x) \neq 0.$$

Assim se $x \in B(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ teremos

$$f(x) \stackrel{(4.21)}{=} \underbrace{(x - x_0)^{k_0}}_{\neq 0} \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \neq 0. \quad (4.22)$$

Como $x_0 \in \mathcal{A}$, segue que x_0 é ponto de acumulação do conjunto E em $(-R, R)$, ou seja, existe uma sequência numérica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $x_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que $x_n \in B(x_0; \varepsilon)$, para n suficientemente grande, ou seja, $f(x_n) = 0$, para n suficientemente grande, o que contraria (4.22).

Portanto deveremos ter $d_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja, $f(x) = 0$ para $x \in I_{x_0}$, que é uma vizinhança de x_0 contida em $(-R, R)$.

Logo $I_{x_0} \subseteq E$, ou seja, se $x_0 \in \mathcal{A}$ então todo $x \in I_{x_0}$ deverá pertencer a E , em particular, x será ponto de acumulação de E , ou ainda, que $I_{x_0} \subseteq \mathcal{A}$, mostrando que o conjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto aberto em $(-R, R)$.

Logo teremos

$$(-R, R) = A \cup B,$$

onde A, B são abertos em $(-R, R)$ e são disjuntos.

Como o conjunto $(-R, R)$ é conexo em $\mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$, segue que $B = \emptyset$ (ver Teorema 2.47, página 42 do Rudin), ou seja, $A = (-R, R) \subseteq E \subseteq (-R, R)$, portanto $E = (-R, R)$.

Logo, teremos $f(x) = 0$, para todo $x \in (-R, R)$, o que implicará que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e assim, do Teorema (4.1.5), segue que $c_n \stackrel{(4.19)}{=} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou ainda $a_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, completando a demonstração do resultado. □

4.2 As funções Exponencial e Logarítmo

Nesta seção, utilizando as séries de potências, estudaremos as funções logarítmo e exponencial complexas e suas propriedades e aplicações.

Começaremos pela

Definição 4.2.1 Definamos a função $E: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$E(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.23)$$

que será denominada função exponencial (complexa).

A seguir exibiremos algumas propriedades da função exponencial.

Observação 4.2.1

1. Para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ a série numérica complexa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_0^n$ será convergente.

De fato, notemos que se $z_0 = 0$ nada temos a demonstrar.

Por outro lado, se $z_0 \neq 0$ notamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{z_0^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{z_0^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_0|}{n+1} = 0 < 1, \quad (4.24)$$

assim, do Critério da Razão para séries numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z_0|^n$ será convergente, o que implicará que a série numérica complexa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_0^n$ será convergente.

Em particular, a função exponencial está bem definida.

2. Se $z \in \mathbb{C}$ segue que

$$\overline{E(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n} \stackrel{\text{Exercício}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \overline{z}^n = E(\overline{z}).$$

3. Se $z, w \in \mathbb{C}$ teremos

$$E(z+w) = E(z) \cdot E(w).$$

De fato,

$$E(z) \cdot E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m$$

$$\stackrel{\text{Def. 3.48 Rudin página 73}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\binom{n}{m}}{n!} z^m w^{n-m} \stackrel{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\ = E(z+w).$$

4. Em particular, do item acima, segue que, para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, teremos

$$E(z_0) \cdot E(-z_0) = E[z_0 + (-z_0)] = E(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = 1,$$

ou seja, o número complexo $E(z_0)$ é inversível e seu inverso será $E(-z_0)$, isto é,

$$[E(z_0)]^{-1} = E(-z_0).$$

5. Se $x_0 \in [0, \infty)$ segue que

$$E(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \underbrace{x_0^n}_{>0} > 0.$$

Se $x_0 \in (-\infty, 0)$, do item 3. acima, segue que

$$E(x_0) = \left[\underbrace{E(-x_0)}_{>0, \text{ pois } -x_0 > 0} \right]^{-1} > 0,$$

assim

$$E(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

6. Para $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \underbrace{x^n}_{\rightarrow \infty} = \infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) \stackrel{y \doteq -x}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{E(y)} \stackrel{\lim_{y \rightarrow \infty} E(y) = \infty}{=} 0.$$

7. A função $\underline{E}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

De fato, se $0 \leq x < y$ teremos

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{x^n}_{< y^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = E(y).$$

Por outro lado se, $x < y \leq 0$ teremos $-x > -y \geq 0$ e assim

$$\underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}} < \underbrace{E(-x)}_{=\frac{1}{E(x)}} \Rightarrow E(x) < E(y).$$

Os outros casos serão deixados como exercício para o leitor.

8. A função $\underline{E}$ pertence a $C^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ e

$$E'(z) = E(z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

De fato, como a função $\underline{E}$ é dada por uma série de potências que converge em $\mathbb{C}$ segue, do Corolário (4.1.1), que ela será uma função que pertencerá a $C^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$.

Além disso, a série de potências que define a função $\underline{E}$ poderá ser derivada, termo a termo, em $\mathbb{C}$, ou seja, para todo $z \in \mathbb{C}$ teremos

$$\begin{aligned} E'(z) &= \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{n!} z^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \stackrel{m \doteq n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m = E(z). \end{aligned}$$

9. Definamos o número de Euler, que será indicado por $\underline{e}$, como sendo

$$e \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in (0, \infty).$$

10. Notemos que se $n \in \mathbb{N}$ segue que

$$e^n = E(1)^n = \underbrace{E(1) \cdots E(1)}_{n \text{ fatores}} \stackrel{\text{item 2.}}{=} E(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ parcelas}}) = E(n).$$

11. Se $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ teremos

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left[E\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q &= \underbrace{E\left(\frac{p}{q}\right) \cdots E\left(\frac{p}{q}\right)}_{q \text{ fatores}} \stackrel{\text{item 2.}}{=} E\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q \text{ parcelas}}\right) = E\left(q \frac{p}{q}\right) = E(p) \\ &\stackrel{\text{item 9.}}{=} e^p, \end{aligned}$$

logo

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right).$$

Com a função exponencial podemos definir outras funções importantes que serão introduzidas e estudadas a seguir.

Começemos pela:

Observação 4.2.2 Sejam $x > 1$ e $y \in \mathbb{R}$ fixados.

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{p \in \mathbb{Q}; p < y\}.$$

Com isto afirmamos que o conjunto

$$\{x^p; p \in \mathcal{P}\}$$

será limitado superiormente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 4.2.2 Na situação acima, definiremos

$$x^y \doteq \sup_{p \in \mathcal{P}} x^p.$$

Temos as seguintes observações:

Observação 4.2.3

1. Se $x \in \mathbb{R}$, teremos

$$e^x = \sup_{p \in \mathcal{P}} e^p,$$

onde

$$\mathcal{P} \doteq \{p \in \mathbb{Q}; p < x\}.$$

2. Como a função $\underline{E}$ é contínua e monótona crescente em $\mathbb{R}$ segue que

$$e^x = E(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De fato, seja $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de números racionais tais que

$$p_n < x \quad \text{e} \quad p_n \rightarrow x, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Então

$$\underbrace{E(p_n)}_{\text{Obs. (4.2.1) item 10. } e^{p_n}} \rightarrow E(x), \quad \text{isto é,} \quad e^{p_n} \rightarrow E(x),$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Como a função E é monótona crescente em $\mathbb{R}$ segue que

$$\underbrace{E(p_n)}_{=e^{p_n}} < \underbrace{E(p_{n+1})}_{=e^{p_{n+1}}} \stackrel{p_n < x}{\leq} E(x),$$

o que implicará

$$e^x = \sup_{p \in \mathcal{P}} e^p \stackrel{e^p = E(p) \leq E(x)}{\leq} E(x). \quad (4.25)$$

Por outro lado, se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência monótona decrescente de números racionais tais que

$$x < q_n \quad \text{e} \quad q_n \rightarrow x, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

segue da continuidade da função $\underline{E}$ em $\mathbb{R}$ que

$$\underbrace{E(q_n)}_{\text{Obs. (4.2.1) item 10. } e^{q_n}} \rightarrow E(x), \quad \text{ou seja,} \quad e^{q_n} \rightarrow E(x) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Como a função E é monótona crescente em $\mathbb{R}$ segue que

$$E(x) < \underbrace{E(q_n)}_{=e^{q_n}} = e^{q_n},$$

logo fazendo $n \rightarrow \infty$, obteremos o que implicará

$$E(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{q_n} = e^x. \quad (4.26)$$

Logo de (4.25) e (4.26) segue que $e^x = E(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, como afirmamos.

Com isto introduziremos a

Definição 4.2.3 Definimos a função exponencial (real), indicada por $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo

$$\exp(x) \doteq e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podemos resumir algumas das propriedades acima bem como outras, no seguinte resultado:

Proposição 4.2.1

1. Para $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

2. A função exponencial pertence a $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e maior que zero. Além disso

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Se $x, y \in \mathbb{R}$ teremos

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

4. Se

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty, \quad & \text{teremos} \quad e^x \rightarrow \infty, \\ y \rightarrow -\infty, \quad & \text{teremos} \quad e^y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

5. Para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Demonstração:

Deixaremos a demonstração dos itens não tratados na Observação anterior como exercício para o leitor.

Notemos que a propriedade 5. segue do fato que se $x > 0$ teremos

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (4.27)$$

Logo, se $x > 0$ teremos

$$0 \leq x^n e^{-x} \stackrel{(4.27)}{<} \frac{(n+1)!}{x} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow \infty,$$

mostrando o item 5. .

□

Observação 4.2.4

1. Como a função $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente crescente, $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, diferenciável em $\mathbb{R}$ e $E'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ segue, do Teorema da Função Inversa (Análise I) que existe sua função inversa $L: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e esta será estritamente crescente, diferenciável em $(0, \infty)$.

Em particular, teremos

$$E[L(y)] = y, \quad y \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad L[E(x)] = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivando a segunda identidade em relação a x e utilizando a Regra da Cadeia, obteremos

$$1 = L'[E(x)] \cdot E'(x) = L[E(x)] \cdot E'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

e assim, definindo-se $y \doteq E(x)$, segue, da identidade acima, que

$$L'(y) \cdot y = 1 \quad \text{ou seja,} \quad L'(y) = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, \infty).$$

Notemos que

$$L(1) \stackrel{1=E(0)}{=} L[E(0)] \stackrel{L[E(x)]=x}{=} 0.$$

2. Integrando-se a identidade anterior, em relação a y , de 1 a y obteremos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$L(y) - \underbrace{L(1)}_{=0} = \int_1^y \frac{1}{t} dt, \quad y \in (-0, \infty),$$

ou seja, a função inversa associada a função exponencial é a função $L : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$L(y) \doteq \int_1^y \frac{1}{t} dt, \quad y \in (-0, \infty), \quad (4.28)$$

que é denominada função Logaritmo natural e denotada por $\ln$.

3. Se $y \in (0, \infty)$ segue que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = E(x).$$

Notemos que se $y \rightarrow \infty$ segue que $x \rightarrow \infty$ (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor), ou seja,

$$L(y) = L[E(x)] = x \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad y \rightarrow \infty.$$

4. Por outro lado, se $y \rightarrow 0^+$ segue que $x \rightarrow -\infty$ (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor), ou seja,

$$L(y) = L[E(x)] = x \rightarrow -\infty \quad \text{se} \quad y \rightarrow 0^+.$$

5. Observemos que se $u, v \in (0, \infty)$ segue que existe $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = E(x) \quad \text{e} \quad v = E(y),$$

ou seja,

$$L(u) = x \quad \text{e} \quad L(v) = y.$$

Com isto teremos

$$L(u \cdot v) = L[E(x) \cdot E(y)] \stackrel{\text{Obs. (4.2.1) item 2.}}{=} L[E(x + y)] = x + y = L(u) + L(v)$$

6. Em particular, se $n \in \mathbb{N}$ e $y \in (0, \infty)$ segue, por indução e a identidade acima, que

$$L[y^n] = L[\underbrace{y \cdot \dots \cdot y}_{n\text{-fatores}}] = nL(y).$$

Logo

$$y^n = E[L(y^n)], \quad y \in (0, \infty).$$

7. Como consequência, se $y \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, teremos que $x \doteq y^m \in (0, \infty)$, e assim segue que

$$L[x] = L(y^m) \stackrel{\text{item 5. acima}}{=} m \cdot L(y) \stackrel{y=x^{\frac{1}{m}}}{=} m \cdot L\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \quad \text{ou seja,} \quad L\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}L(x),$$

ou ainda:

$$x^{\frac{1}{m}} = E\left[\frac{1}{m}L(x)\right].$$

8. Dos itens 5. e 6 acima segue que se $x \in (0, \infty)$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, teremos

$$x^{\frac{n}{m}} = E \left[\frac{n}{m} L(x) \right].$$

9. Baseado nos itens acima, para $x \in (0, \infty)$ e $y \in \mathbb{R}$, é natural definirmos:

$$x^y = E[y \cdot L(x)].$$

10. Deixaremos como exercício para o leitor a verificação de que este modo de definir x^y coincide como o que introduzimos anteriormente na Definição (4.2.2).

11. Notemos que se $y \in \mathbb{R}$, a função $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq x^y, \quad x \in (0, \infty),$$

será diferenciável em $(0, \infty)$ e além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^y &= \frac{d}{dx} \{E[y \cdot L(x)]\} \stackrel{\text{Regr da Cadeia}}{=} E'[y \cdot L(x)] \cdot y \cdot L'(x) \\ &= E[y \cdot L(x)] \cdot \frac{1}{x} = y \cdot x^{y-1}, \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

12. Além disso, se $y \in (0, \infty)$ segue que para $\varepsilon \in (0, y)$ e $x \in (1, \infty)$ teremos

$$\begin{aligned} x^{-y} \cdot L(x) &= x^{-y} \cdot \int_1^x \frac{1}{t} dt \stackrel{t>1 \Rightarrow t^{1-\varepsilon} < t}{<} x^{-y} \cdot \int_1^x t^{\varepsilon-1} dt \\ x^{-y} \cdot \left[\frac{t^\varepsilon}{\varepsilon} \right]_{t=1}^{t=x} &= x^{-y} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \overbrace{\frac{x^{\varepsilon-y}}{\varepsilon}}^{<0} \rightarrow 0, \quad \text{se } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-y} \cdot L(x) = 0.$$

4.3 Funções trigonométricas complexas

Nesta seção, utilizando a função exponencial complexa definida na seção anterior, introduziremos as funções trigonométricas complexas e estudaremos suas propriedades básicas.

Começaremos pelas:

Definição 4.3.1 Definiremos as funções $C, S: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$C(z) \doteq \frac{1}{2} [E(iz) + E(-iz)], \quad (4.29)$$

$$S(z) \doteq \frac{1}{2i} [E(iz) - E(-iz)], \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.30)$$

que serão denominadas funções cosseno e seno (complexos), respectivamente.

A seguir temos algumas propriedades relacionadas com estas duas funções.

Observação 4.3.1

1. Notemos que se $x \in \mathbb{R}$, utilizando-se a propriedades básica da conjugação de números complexos, teremos:

$$\begin{aligned}\overline{C(x)} &= \overline{\frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)]} \stackrel{\overline{Z+W}=\overline{Z}+\overline{W}}{=} \frac{1}{2} [\overline{E(ix)} + \overline{E(-ix)}] \stackrel{\overline{E(w)}=E(\overline{w})}{=} \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\overline{E(ix)}}_{=E(-ix)} + \underbrace{\overline{E(-ix)}}_{=E[-(-ix)]=E(ix)} \right] = \frac{1}{2} [E(-ix) + E(ix)] = C(x),\end{aligned}$$

ou seja, $C(x) \in \mathbb{R}$.

De modo semelhante teremos:

$$\begin{aligned}\overline{S(x)} &= \overline{\frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)]} = \frac{1}{-2i} [\overline{E(ix)} - \overline{E(-ix)}] \stackrel{\overline{E(x)}=E(\overline{x})}{=} \\ &= \frac{1}{-2i} \left[\underbrace{\overline{E(ix)}}_{=E(-ix)} - \underbrace{\overline{E(-ix)}}_{=E[-(-ix)]=E(ix)} \right] = \frac{1}{-2i} [E(-ix) - E(ix)] = S(x),\end{aligned}$$

ou seja, $S(x) \in \mathbb{R}$.

2. Como consequência, para $x \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\underbrace{C(x)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{S(x)}_{\in \mathbb{R}} = \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)] + i \left\{ \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)] \right\} = E(ix),$$

ou seja,

$$\Re [E(ix)] = C(x) \quad e \quad \Im [E(ix)] = S(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Observemos também que, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$|E(ix)|^2 = E(ix) \cdot \underbrace{\overline{E(ix)}}_{=E(\overline{ix})=E(-ix)} = E(ix) \cdot E(-ix) = E(ix - ix) = E(0) = 1,$$

em particular, segue que

$$|E(ix)| = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. As funções $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são diferenciáveis em $\mathbb{C}$ (na verdade pertencem a $C^\infty(\mathbb{C}; \mathbb{C})$) e além disso, segue que:

$$\begin{aligned}C'(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2} [E(iz) + E(-iz)] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dz} [E(iz)] + \frac{d}{dz} [E(-iz)] \right\} \\ &\stackrel{\text{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2} \{ E(iz) \cdot i + E(-iz) \cdot (-i) \} = -\frac{1}{2i} [E(iz) - E(-iz)] \\ &= -S(z), \quad z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned}S'(z) &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2i} [E(iz) - E(-iz)] \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{d}{dz} [E(iz)] - \frac{d}{dz} [E(-iz)] \right\} \\ &\stackrel{\text{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2i} \{ E(iz) \cdot i - E(-iz) \cdot (-i) \} = \frac{1}{2} [E(iz) + E(-iz)] \\ &= C(z), \quad z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

5. Notemos que

$$C(0) = \frac{1}{2} \left[\overbrace{E(i \cdot 0)}^{=1} + \overbrace{E(-i \cdot 0)}^{=1} \right] = 1 \quad e \quad S(0) = \frac{1}{2i} \left[\underbrace{E(i \cdot 0)}_{=1} - \underbrace{E(-i \cdot 0)}_{=1} \right] = 0.$$

6. Existe $x_0 \in (0, \infty)$ tal que $C(x_0) = 0$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $x > 0$ tenhamos $C(x) \neq 0$.

Como a função $\underline{C}$ é contínua em $\mathbb{C}$, $C(0) = 1$ e estamos supondo que $C(x) \neq 0$ para $x \in (0, \infty)$, segue que $C(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$.

Mas $S'(x) = C(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim a função $\underline{S}$ seria estritamente crescente em $(0, \infty)$.

Isto, juntamente com o fato que a função $\underline{S}$ é contínua em $\mathbb{C}$ e $S(0) = 0$ segue que $S(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$.

Deste modo teríamos, para $0 < x < y$, que:

$$\begin{aligned} S(x)(y-x) &= \int_x^y S(x) dt \stackrel{S(x) < S(t) \text{ se } t \in (x,y)}{<} \int_x^y \overbrace{S(t)}^{=-C'(t)} dt = \int_x^y [-C'(t)] dt \\ &\stackrel{\text{Teor. Fund. Cálculo}}{=} -[C(y) - C(x)] \leq |C(y)| + |C(x)| \\ C(x) &\leq |C(x)| = |\Re[E(ix)]| \leq |E(ix)| = 1 \\ &\leq 2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$S(x)(y-x) \leq 2, \quad x \in (0, \infty).$$

O que é um absurdo, pois se $y \rightarrow \infty$, como $S(x) > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$ segue que,

$$S(x)(y-x) \rightarrow \infty.$$

Logo podemos concluir que existe $x_0 \in (0, \infty)$ tal que $C(x_0) = 0$.

7. Seja $x_0 \in (0, \infty)$ tal que $C(x_0) = 0$ e para todo $x \in (0, x_0)$ temos que $C(x) \neq 0$ (isto é, $x_0 > 0$ será o primeiro zero da função $\underline{C}$).

Notemos que existe tal $x_0 \in (0, \infty)$ pois sabemos que o conjunto Z formado pelos zeros de uma função contínua é um conjunto fechado (pois $\{x \geq 0; C(x) = 0\} = \underbrace{C^{-1}(\{0\})}_{\text{fechado}} \cap \underbrace{[0, \infty)}_{\text{fechado}}$) e

como $C(0) = 1 \neq 0$ segue que $x_0 = \min Z > 0$.

Com isto podemos definir $\pi \in (x_0, \infty)$ por

$$\pi \doteq 2x_0.$$

Notemos que:

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(x_0) = 0.$$

8. Observemos também que

$$1 = |E(ix_0)|^2 = \underbrace{[C(x_0)]^2}_{=0} + [S(x_0)]^2, \quad \text{assim teremos } [S(x_0)]^2 = 1, \quad \text{ou seja, } S(x_0) = \pm 1.$$

Como $C(x) > 0$ e $S'(x) = C(x) > 0$ para $x \in (0, x_0)$ segue que a função $\underline{S}$ será estritamente crescente em $(0, x_0)$.

Mas $S(0) = 0$ logo, da continuidade da função $\underline{S}$, segue que

$$S(x) > 0 \quad \text{para } x \in (0, x_0) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.31)$$

Portanto deveremos ter $S(x_0) = 1$.

9. Em particular, teremos

$$E(ix_0) = C(x_0) + iS(x_0) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

ou seja,

$$E\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

10. Notemos também que:

$$\begin{aligned} E(i\pi) &= E\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} \cdot \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} = i \cdot i = -1, \\ E(i2\pi) &= E(i\pi + i\pi) = \overbrace{E(i\pi)}^{=-1} \cdot \overbrace{E(i\pi)}^{=-1} = (-1) \cdot (-1) = 1, \end{aligned}$$

e portanto

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \cdot \overbrace{E(2\pi i)}^{=1} = E(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

ou seja, a função $\underline{E}$ é uma função $2\pi i$ -periódica.

11. Dos itens 4. e 5. teremos, para $x \in \mathbb{R}$, que

$$C'(x) = -S(x) \quad S'(x) = C(x), \quad C(0) = 1 \quad \text{e} \quad S(0) = 0.$$

Do curso de Equações Diferenciais Ordinárias segue que deveremos ter:

$$C(x) = \cos(x) \quad \text{e} \quad S(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, as funções $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são extensões das funções trigonométricas reais, para o campo complexo.

Podemos resumir isto no seguinte resultado:

Proposição 4.3.1

1. a função $\underline{E}$ é $2\pi i$ -periódica;
2. as funções $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são $2\pi i$ -periódicas;

3. as restrições das funções $\underline{C}$ e $\underline{S}$ à $\mathbb{R}$ são funções reais e 2π -periódicas;
4. Se $t \in (0, 2\pi)$ teremos $E(it) \neq 1$;
5. se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $|z_0| = 1$ então existirá um único $t_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$E(it_0) = z_0.$$

Demonstração:

Do item 1.:

Foi mostrado na Observação acima item 8.

Do item 2.:

Foi mostrado na Observação acima item 9.

Do item 3.:

Se $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\begin{aligned} C(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} \{E[i(x + 2\pi)] + E[-i(x + 2\pi)]\} = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{E[ix + 2\pi i]}_{=E(ix)} + \underbrace{E[-ix - 2\pi i]}_{=E(-ix)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{E(ix) + E(-ix)\} = C(x), \end{aligned} \quad (4.32)$$

e

$$\begin{aligned} S(x + 2\pi) &= \frac{1}{2i} \{E[i(x + 2\pi)] - E[-i(x + 2\pi)]\} = \frac{1}{2i} \left\{ \underbrace{E[ix + 2\pi i]}_{=E(ix)} - \underbrace{E[-ix - 2\pi i]}_{=E(-ix)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \{E(ix) - E(-ix)\} = S(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

mostrando que as restrições das funções $\underline{C}$ e $\underline{S}$ à $\mathbb{R}$ são funções reais 2π -periódicas.

Do item 4.:

Se $s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $E(is) = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, como $|E(it)| = 1$, da Observação acima item 8., $x = C(s), y = S(s) \in (0, 1)$, ou seja, $x, y \in (0, 1)$.

Notemos também que

$$E(4si) = [E(is)]^4 = (x + iy)^4 \stackrel{\text{Exercício}}{=} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

Logo, $E(4si) \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$xy(x^2 - y^2) = 0 \quad \stackrel{x, y \in (0, 1)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y.$$

Mas $x^2 + y^2 = |E(is)| = 1$, assim teremos

$$1 = x^2 + y^2 = (\pm y)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{2},$$

ou seja, $E(4si) \in \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$E(4si) = \left(\underbrace{x^2}_{=\frac{1}{2}} \right)^2 - 6 \underbrace{x^2}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{y^2}_{=\frac{1}{2}} + \left(\underbrace{y^2}_{=\frac{1}{2}} \right)^2 = \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -1, \Rightarrow E(4si) = -1.$$

Portanto se

$$s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{é tal que } E(4si) \in \mathbb{R}, \quad \text{deveremos ter: } E(4si) = -1. \quad (4.34)$$

Suponhamos, por absurdo, que existe $t_0 \in (0, 2\pi)$ tal que $E(it_0) = 1$.

Como $s \doteq \frac{t_0}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, segue que

$$E(4si) = E(it_0) = 1, \quad (4.35)$$

ou seja, $E(4si) \in \mathbb{R}$.

Logo, de (4.34), segue que $E(4si) = -1$, o que contraria (4.35), portanto não existe $t_0 \in (0, 2\pi)$ tal que $E(it) = 1$, completando a demonstração do item 4. .

Do item 5.:

A unicidade segue do item 4., pois se $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ são tais que

$$\begin{aligned} E(it_1) = E(it_2) = z_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E(it_1)}{E(it_2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E(it_1) \cdot \underbrace{[E(it_2)]^{-1}}_{=E(-it_2)}}_{=E[i(t_1 - t_2)]} = 1 \\ \Rightarrow \quad E[i(t_1 - t_2)] = 1. \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, que $t_1 \neq t_2$, que podemos supor, sem perda de generalidade que $t_2 < t_1$.

Logo $t_2 - t_1 \in (0, 2\pi)$, o que contraria o item 4. (pois $E[i(t_2 - t_1)] \neq 1$).

Para mostrar a existência de $t \in [0, 2\pi)$ tal que $E(it) = z_0$, escrevemos $z_0 = x_0 + iy_0$, onde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Notemos que $|x_0|, |y_0| \leq 1$, pois $x_0^2 + y_0^2 = |z_0|^2 = 1$.

A seguir consideraremos os seguintes casos:

I. Caso que $x_0, y_0 \in [0, 1]$.

Observemos que a função $\underline{C}$ é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ do valor 1 para o valor 0.

Como ela é uma função contínua segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$C(t_0) = x_0.$$

Por outro lado, como

$$[C(t_0)]^2 + [S(t_0)]^2 = 1 \quad \text{e} \quad S(t_0) \stackrel{(4.31)}{\geq} 0, \quad \text{para } t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

segue que

$$y_0 \stackrel{y_0 \geq 0}{=} \sqrt{1 - x_0^2} = \sqrt{1 - [C(t_0)]^2} \stackrel{[C(t_0)]^2 + [S(t_0)]^2 = 1}{=} S(t_0) \stackrel{S(t_0) \geq 0}{=}$$

assim

$$z_0 \doteq x_0 + iy_0 = C(t_0) + iS(t_0) = E(it_0),$$

completando a demonstração para o caso em que $x_0, y_0 \in [0, 1]$.

II. Caso que $x_0 \in [-1, 0)$ e $y_0 \in [0, 1]$.

Neste caso teremos:

$$-iz_0 = -i(x_0 + iy_0) = y_0 - ix_0 = \underbrace{y_0}_{\geq 0} + i \underbrace{(-x_0)}_{> 0}$$

e assim estaremos na situação acima.

Logo poderemos encontrar $\tilde{t}_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que

$$E(i\tilde{t}_0) = -iz_0.$$

Portanto

$$z_0 = \frac{1}{-i} \cdot E(i\tilde{t}_0) = i \cdot E(i\tilde{t}_0) = E\left(\frac{\pi}{2}i\right) \cdot E(i\tilde{t}_0) = E\left(\frac{\pi}{2}i + i\tilde{t}_0\right) = E\left[\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \tilde{t}_0}_{\doteq t_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \subseteq [0, 2\pi)}\right)i\right].$$

III. Caso que $x_0 \in (-1, 1)$ e $y_0 \in (-1, 0)$.

Nesta situação teremos:

$$-z_0 = -(x_0 + iy_0) = \underbrace{-x_0}_{\in (-1, 1)} + i \underbrace{(-y_0)}_{\in (0, 1)},$$

e assim podemos aplicar a situação acima para obter $\tilde{t}_0 \in [0, \pi)$ tal que

$$-z_0 = E(i\tilde{t}_0) \Rightarrow z_0 = -1 \cdot E(i\tilde{t}_0) = E(i\pi) \cdot E(i\tilde{t}_0) = E(i\pi + i\tilde{t}_0) = E\left[\left(\underbrace{\pi + \tilde{t}_0}_{\doteq t_0 \in [0, 2\pi)}\right)i\right],$$

completando a demonstração do resultado.

,

□

Temos também as seguintes observações:

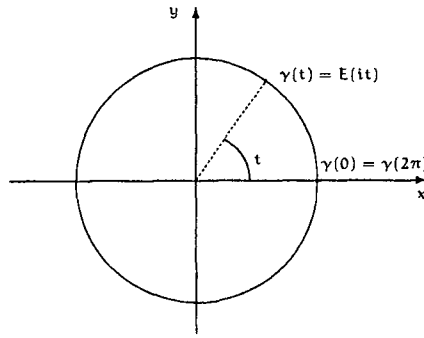
Observação 4.3.2

1. Segue do item 5. da Proposição acima, e do fato que $|E(it)| = 1$, que a curva parametrizada diferenciável $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$) dada por

$$\gamma(t) \doteq E(it), \quad t \in [0, 2\pi]$$

será uma curva fechada simples cuja imagem é a circunferência (veja figura abaixo)

$$x^2 + y^2 = 1.$$



2. Como

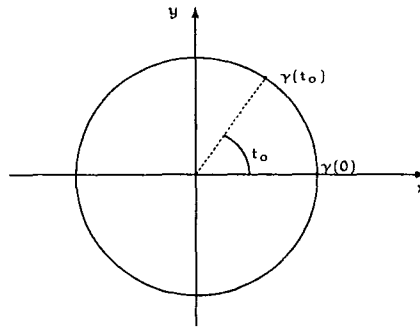
$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}[E(it)] \stackrel{\text{Regra da Cadeia}}{=} E'(it) \cdot i = i \cdot E(it), \quad t \in [0, 2\pi],$$

segue que

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{|i \cdot E(it)|}_{=|i||E(it)|=1} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

ou seja, o comprimento da curva parametrizada diferenciável γ é igual ao comprimento da circunferência do plano xOy de centro na origem e raio 1.

3. Se $t_0 \in (0, 2\pi]$, quando t varia de 0 até t_0 , $\gamma(t)$ descreverá uma arco da circunferência (ver figura abaixo).



4. Consideremos o triângulo de vértices (ver figura abaixo):

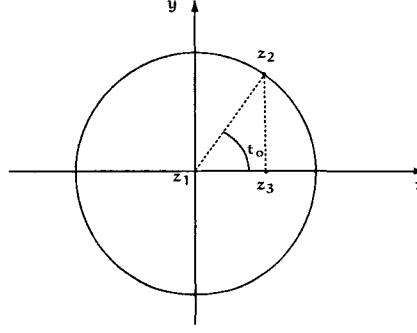
$$z_1 \doteq 0, \quad z_2 \doteq \gamma(t_0) \quad e \quad z_3 \doteq C(t_0).$$

Então teremos, da Trigonometria, que

$$C(t_0) = \cos(t_0) \quad e \quad S(t_0) = \text{sen}(t_0),$$

ou seja, como as funções envolvidas são 2π -periódicas segue que

$$C(t) = \cos(t) \quad e \quad S(t) = \text{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



4.4 O Teorema fundamental da Álgebra

Nesta seção trataremos do Teorema Fundamental da Álgebra, a saber:

Teorema 4.4.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{C}$, para $i \in \{0, \dots, n\}$, com $a_n \neq 0$.*

Então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$, onde

$$P(z) \doteq \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

ou seja, todo polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos possui, pelo menos, uma raiz complexa.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_n = 1$.

De fato, caso contrário consideramos o polinômio $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{a_n} P(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se provarmos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $Q(z_0) = 0$ isto implicará que $\frac{1}{a_n} P(z) = 0$, ou seja, $P(z_0) = 0$, demonstrando o resultado.

Seja

$$\mu \doteq \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$$

que existe pois $|P(z)| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| = R > 0$ teremos

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \stackrel{a_n=1}{=} \left| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| \\ &= \underbrace{|z|}_{=R}^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \underbrace{|z|}_{=R}^k = R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \\ &= R^n \left(1 - |a_0| R^{-n} - |a_1| R^{-n+1} - \dots - |a_{n-1}| R^{-1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que quando $R \rightarrow \infty$, o lado direito da expressão acima tende a ∞ (pois $R^{-n}, R^{-n+1}, \dots, R^{-1} \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$).

Logo existe $R_0 > 0$ tal que

$$|P(z)| > \mu, \quad \text{para } |z| > R_0,$$

logo

$$\mu \doteq \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{z \in B_0} |P(z)|,$$

onde $B_0 \doteq \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_0\}$.

Como a função $z \mapsto |P(z)|$ é uma função contínua na bola fechada $B_0 \doteq \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_0\}$ (que é compacta em $\mathbb{R}^2$), segue que ela assume seu valor mínimo em B_0 , ou seja, $\mu = \min_{z \in B_0} |P(z)|$, ou ainda, existe $z_0 \in B_0$ tal que

$$|P(z_0)| = \mu.$$

Afirmção: $\mu = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $P(z_0) = \mu \neq 0$.

Consideremos a função $Q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{P(z_0)} P(z + z_0), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que a função Q é uma função polinomial não-constante (pois a função P é uma função polinomial não-constante já que $a_n = 1, n \geq 1$), que satisfaz:

$$\begin{aligned} Q(0) &= \frac{1}{P(z_0)} P(0 + z_0) = 1, \\ |Q(z)| &= \frac{|P(z + z_0)|}{|P(z_0)|} \geq \frac{\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z + z_0)|}{|P(z_0)|} = \frac{\overbrace{\inf_{w \in \mathbb{C}} |P(w)|}^{\mu}}{|P(z_0)|} = \frac{|P(z_0)|}{|P(z_0)|} = 1, \\ \text{isto é, } |Q(z)| &\geq 1, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Logo podemos escrever

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.37}$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$ é o menor natural tal que $b_k \neq 0$ (que existe, pois função polinomial Q é não constante).

Notemos que se considerarmos $z \doteq -\frac{b_k}{|b_k|}$, teremos que $|z| = 1$.

Logo da Proposição (4.3.1) item 5., segue que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{-ik\theta} = E(-ik\theta) \stackrel{\text{Prop. (4.3.1)}}{=} z = -\frac{b_k}{|b_k|} \Rightarrow e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \tag{4.38}$$

Seja $r > 0$ tal que $r^k < \frac{1}{|b_k|}$, ou seja:

$$r^k |b_k| < 1.$$

Então (4.38) implicará em

$$\left| 1 + \underbrace{r^k b_k e^{ik\theta}}_{-|b_k|} \right| = \left| 1 - r^k |b_k| \right| \stackrel{r^k |b_k| < 1}{=} 1 - r^k |b_k|. \tag{4.39}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned}
 |Q(re^{i\theta})| &= |1 + b_k r^k e^{ik\theta} + b_{k+1} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} + \dots + b_n r^n e^{in\theta}| \\
 &\leq |1 + b_k r^k e^{ik\theta}| + |b_{k+1} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta}| + \dots + |b_n r^n e^{in\theta}| \\
 &\leq |1 + b_k r^k e^{ik\theta}| + |b_{k+1} r^{k+1}| \underbrace{|e^{i(k+1)\theta}|}_{=1} + \dots + |b_n r^n| \underbrace{|e^{in\theta}|}_{=1} \\
 &\leq \underbrace{|1 + b_k r^k e^{ik\theta}|}_{1 - r^k |b_k|} + |b_{k+1}| r^{k+1} + \dots + |b_n| r^n \\
 &\stackrel{(4.39)}{=} 1 - |b_k| r^k + |b_{k+1}| r^{k+1} + \dots + |b_n| r^n \\
 &= 1 - r^k [|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{n-k}|b_n|].
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Notemos que se $r \in (0, \infty)$ é suficientemente pequeno, a expressão dentro do colchete acima será maior que zero (pois $|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{n-k}|b_n| \uparrow |b_k|$ quando $r \rightarrow 0^+$).

Assim $|Q(re^{i\theta})| < 1$ para todo $r > 0$, suficientemente pequeno, o que contraria o fato que $|Q(re^{i\theta})| \geq 1$ (ver (4.36)).

Portando $\mu = 0$, ou seja, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$, completando a demonstração do resultado. □

4.5 Séries de Fourier

Nesta seção estudaremos a Série de Fourier associada a uma função periódica "bem comportada".

Começaremos pela:

Definição 4.5.1 Um polinômio trigonométrico é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que pode ser colocada na seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

onde $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ para $i \in \{0, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, N\}$.

Observação 4.5.1

1. Podemos reescrever (4.41) na forma

$$f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.42}$$

onde

$$c_0 \doteq \frac{a_0}{2}, \quad c_n \doteq \frac{a_n - ib_n}{2} \quad e \quad c_{-n} \doteq \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.43}$$

Basta, para $n \in \mathbb{Z}$, substituir

$$\cos(nx) = \frac{e^{-inx} + e^{inx}}{2} \quad e \quad \sin(nx) = \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2i}$$

em (4.41).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. Observemos que todo polinômio trigonométrico é uma função 2π -periódica pois, para cada $n \in \mathbb{Z}$ a função $x \mapsto e^{inx}$ tem 2π com um período.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. Notemos também que se $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ então

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right] = e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $x \mapsto \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]$ também será uma função 2π -periódica.

4. Além disso teremos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. Notemos que, para cada $m \in \{-N, \dots, N\}$, multiplicando-se (4.42) por e^{-imx} e integrando-se em $[-\pi, \pi]$ obteremos:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right] e^{-imx} dx = \sum_{n=-N}^N c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx}_{\substack{\text{Exercício} \\ \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}}} = 2\pi c_m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx, \quad m \in \{-N, \dots, N\}. \quad (4.44)$$

6. Notemos também que se função f é dada por (4.42) e $|m| > N$ então

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = 0.$$

7. Neste caso os coeficientes de (4.41) poderão ser obtidos da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ e $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (4.45)$$

8. Por fim notemos que, o polinômio trigonométrico (4.41) será a valores reais se, e somente se, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ para $i \in \{0, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, N\}$.

Por sua vez isto será equivalente a

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pois

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \overline{a_n} = a_n, \quad \overline{b_n} = b_n \quad \frac{\overline{a_n} + i\overline{b_n}}{2} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \overline{\left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right)} = \overline{c_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

9. Se a função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável em $[-\pi, \pi]$, os números complexos c_m , $m \in \mathbb{Z}$, dados por (4.44) estarão bem definidos e serão denominados coeficientes (complexos) de Fourier associados à função f .

Podemos agora introduzir a:

Definição 4.5.2 Uma série trigonométrica (ou de Fourier) será uma série de funções que pode ser colocada na seguinte forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.46)$$

onde a N -ésima soma parcial desta série de funções é dada por (4.42), ou seja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.5.2 Temos as seguintes questões relacionadas com a série de funções acima:

1. Quando a série de Fourier associada a uma dada função f 2π que é 2π -periódica converge (pontualmente ou uniformemente)?
2. Se for convergente, convergirá para a função f ?
3. Outras questões interessantes serão colocadas ao longo desta seção.

Para começar a responder a essas questões precisaremos de alguns resultados que serão tratados a seguir.

Antes porém temos a:

Definição 4.5.3 Consideremos a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$\int_a^b \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) dx = 0, \quad \text{se } m \neq n,$$

$m, n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a família $\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal.

Se além disso tivermos

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

diremos que a família $\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal.

Com isto temos o:

Exemplo 4.5.1 Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $\phi_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Então a família $\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortonormal.

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também o

Exemplo 4.5.2 Consideremos $\phi_0, \phi_1, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\phi_0(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_1(x) \doteq \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_1(x) \doteq \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_2(x) \doteq \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_2(x) \doteq \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, x \in [-\pi, \pi].$$

Então a família $\{\phi_i, \psi_j; i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N}\}$ é uma conjunto ortonormal.

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observação 4.5.3 Consideremos $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$.

1. Seja $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em $[a, b]$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definamos

$$c_n \doteq \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt, \quad (4.47)$$

que será denominado n -ésimo coeficiente (complexo) de Fourier associado à função f .

Neste caso poderemos considerar a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad x \in [a, b]$$

que será denominada série de Fourier (complexa) associada à função f (relativamente a família $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$).

2. Nosso objetivo será estudar a convergência da série de Fourier associada a função f dada.

Para isto começaremos com o:

Teorema 4.5.1 Sejam $f \in \mathfrak{R}$ em $[a, b]$ e $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em $[a, b]$.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ consideremos as funções $s_N, t_N : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por:

$$s_N(x) \doteq \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x), \quad (4.48)$$

$$t_N(x) \doteq \sum_{k=0}^N d_k \phi_k(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.49)$$

onde (4.48) é a N -ésima soma parcial da série de Fourier associada a função f (ou seja, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, o coeficiente c_n é dado por (4.47)).

Então, teremos

$$\int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2 dx. \quad (4.50)$$

A igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$, $k \in \{0, \dots, N\}$.

Demonstração:

Observemos que para cada $N \in \mathbb{Z}^+$ teremos

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) \overline{t_N(x)} dx &= \int_a^b f(x) \overbrace{\left(\sum_{k=0}^N d_k \phi_k(x) \right)}^{=\sum_{k=0}^N \overline{d_k} \phi_k(x)} dx = \sum_{k=0}^N \int_a^b f(x) \overline{d_k} \phi_k(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^N \overline{d_k} \underbrace{\int_a^b f(x) \phi_k(x) dx}_{\stackrel{(4.47)}{=} c_k} = \sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |t_N(x)|^2 dx &= \int_a^b \overbrace{t_N(x)}^{=\sum_{k=0}^N d_k \phi_k(x)} \overbrace{\overline{t_N(x)}}^{=\sum_{j=0}^N \overline{d_j} \phi_j(x)} dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^N d_k \phi_k(x) \right) \left(\sum_{j=0}^N \overline{d_j} \phi_j(x) \right) dx \\
 &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N d_k \overline{d_j} \underbrace{\int_a^b \phi_k(x) \phi_j(x) dx}_{\stackrel{\text{Conj. ortonormal}}{=} \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}} = \sum_{k=0}^N d_k \overline{d_k} = \sum_{k=0}^N |d_k|^2.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2 dx &= \int_a^b [f(x) - t_N(x)] \cdot \overline{[f(x) - t_N(x)]} dx = \int_a^b [f(x) - t_N(x)] \cdot [\overline{f(x)} - \overline{t_N(x)}] dx \\
 &= \int_a^b [f(x)\overline{f(x)} - f(x)\overline{t_N(x)} - t_N(x)\overline{f(x)} + t_N(x)\overline{t_N(x)}] dx \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \underbrace{\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)} dx}_{=\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)} dx} - \underbrace{\int_a^b t_N(x)\overline{f(x)} dx}_{=\overline{\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)} dx}} + \underbrace{\int_a^b |t_N(x)|^2 dx}_{\stackrel{(4.52)}{=} \sum_{k=0}^N |d_k|^2} \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \underbrace{\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)} dx}_{\stackrel{(4.51)}{=} \sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k} - \underbrace{\int_a^b f(x)\overline{t_N(x)} dx}_{\stackrel{(4.51)}{=} \sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k - \underbrace{\sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k}_{=\sum_{k=0}^N d_k \overline{c_k}} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^N \overline{d_k} c_k - \sum_{k=0}^N d_k \overline{c_k} + \sum_{k=0}^N |d_k|^2 \\
 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^N (\overline{d_k} c_k + d_k \overline{c_k}) + \sum_{k=0}^N |d_k|^2.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N |d_k - c_k|^2 &= \sum_{k=0}^N (d_k - c_k) \cdot \overbrace{(d_k - c_k)}^{=(\overline{d_k} - \overline{c_k})} = \sum_{k=0}^N (d_k \overline{d_k} - d_k \overline{c_k} - c_k \overline{d_k} + c_k \overline{c_k}) \\ &= \sum_{k=0}^N |d_k|^2 - \sum_{k=1}^n (d_k \overline{c_k} + c_k \overline{d_k}) + \sum_{k=0}^N |c_k|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^N |d_k|^2 - \sum_{k=0}^N (d_k \overline{c_k} + c_k \overline{d_k}) = \sum_{k=0}^N |d_k - c_k|^2 - \sum_{k=0}^N |c_k|^2.$$

Logo substituindo esta identidade em (4.53) obteremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x)|^2 dx + \overbrace{\sum_{k=0}^N |d_k - c_k|^2}^{\geq 0} - \sum_{k=0}^N |c_k|^2 \\ &\geq \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^N |c_k|^2, \end{aligned} \quad (4.54)$$

e a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$ para $k \in \{0, \dots, N\}$.

Para finalizar observemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |s_N(x)|^2 dx &= \int_a^b \overbrace{\sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x)}^{s_N(x)} \overline{s_N(x)} dx = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x) \right] \overline{\left[\sum_{j=0}^N c_j \phi_j(x) \right]} dx \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x) \right] \left[\sum_{j=0}^N \overline{c_j} \overline{\phi_j(x)} \right] dx = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i \overline{c_j} \underbrace{\int_a^b \phi_i(x) \overline{\phi_j(x)} dx}_{\begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}} \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N c_i \overline{c_i} = \sum_{i=0}^N |c_i|^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

e

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 dx &= \int_a^b [f(x) - s_N(x)] \cdot \overline{[f(x) - s_N(x)]} dx = \int_a^b [f(x) - s_N(x)] \cdot [\overline{f(x)} - \overline{s_N(x)}] dx \\ &= \int_a^b [f(x) \overline{f(x)} - f(x) \overline{s_N(x)} - s_N(x) \overline{f(x)} + s_N(x) \overline{s_N(x)}] dx \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_a^b f(x) \overline{s_N(x)} dx - \int_a^b s_N(x) \overline{f(x)} dx + \underbrace{\int_a^b |s_N(x)|^2 dx}_{\stackrel{(4.55)}{=} \sum_{k=0}^N |c_k|^2} \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_a^b f(x) \overline{s_N(x)} dx - \underbrace{\int_a^b \overline{f(x)} s_N(x) dx}_{=\int_a^b f(x) \overline{s_N(x)} dx} + \sum_{k=0}^N |c_k|^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \overline{s_N(x)} dx &\stackrel{(4.48)}{=} \int_a^b f(x) \overline{\left(\sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x) \right)} dx = \sum_{i=0}^N \overline{c_i} \underbrace{\int_a^b f(x) \phi_i(x) dx}_{\stackrel{(4.47)}{=} c_i} \\ &\stackrel{c_i \overline{c_i} = |c_i|^2}{=} \sum_{i=0}^N \overline{c_i} c_i = \sum_{i=0}^N |c_i|^2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

e que

$$\int_a^b \overline{f(x)} s_N(x) dx = \underbrace{\left[\int_a^b f(x) \overline{s_N(x)} dx \right]}_{\stackrel{(4.57)}{=} \sum_{i=0}^N |c_i|^2} = \overline{\left(\sum_{i=0}^N |c_i|^2 \right)} = \sum_{i=0}^N |c_i|^2.$$

Logo substituindo esta identidade em (4.56) obteremos:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=0}^N |c_i|^2 - \sum_{i=0}^N |c_i|^2 + \sum_{k=0}^N |c_k|^2 \\ &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{i=0}^N |c_i|^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Portanto

$$\int_a^b |f(x) - t_N(x)|^2 dx \stackrel{(4.54)}{\geq} \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^N |c_k|^2 \stackrel{(4.58)}{=} \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 dx,$$

mostrando (4.50) e, de (4.54), notamos que valerá a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$, $k \in \{0, \dots, n\}$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.5.4

1. O resultado acima nos diz que entre todas as funções $t_n = t_n(x)$ do tipo polinômio trigonométrico que utilizarmos para aproximar a função f , as funções $s_n = s_n(x)$ são aquelas que nos fornecerão as melhores aproximações (na norma acima).

2. Notemos que (4.55) nos diz que, para todo $N \in \mathbb{N}$ teremos

$$\int_a^b |s_N(f, x)|^2 dx \leq \sum_{i=0}^N |c_i|^2.$$

Temos também a desigualdade de Bessel, a saber:

Teorema 4.5.2 *Sejam $f \in \mathcal{R}$ em $[a, b]$ e $e = \{\phi_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em $[a, b]$.*

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad (4.59)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, o coeficiente $\underline{c}_n$ será dada por (4.47).

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad (4.60)$$

que é conhecido como Lema de Riemann-Lebesgue.

Demonstração:

Para cada $N \in \mathbb{N}$ segue, de (4.58), que

$$0 \leq \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{n=0}^N |c_n|^2,$$

ou seja,

$$0 \leq \sum_{n=0}^N |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (4.61)$$

Logo fazendo $N \rightarrow \infty$ segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente (pois a sequência das somas parciais será monótona crescente e limitada em $\mathbb{R}$) e além disso

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

mostrando (4.59).

Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente, do Critério da Divergência, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^2 = 0$ o que implicará que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Como consequência temos um resultado análogo para as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ e $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dados por (4.45), a saber:

Corolário 4.5.1 *Sejam $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.*

Então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b |f(x)|^2 dx, \quad (4.62)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, os coeficientes $\underline{a}_n, \underline{b}_n$ serão dados por (4.43).

Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (4.63)$$

que é conhecido como Lema de Riemann-Lebesgue.

Demonstração:

Notemos que o conjunto $\{\Phi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ formado pelas funções $\Phi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\Phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

forma um conjunto ortonormal.

Mas, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ temos que

$$|c_n|^2 \stackrel{(4.43)}{=} \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}. \quad (4.64)$$

Como, do Teorema (4.5.2), temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente segue, do Critério da Comparação para séries numéricas (cujos termos são não negativos) que as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ serão convergentes.

Além disso, da desigualdade de Bessel, segue que

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right) = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] \stackrel{(4.64)}{=} \pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \stackrel{(4.59)}{\leq} \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Observemos que o fator $\frac{1}{\pi}$ aparece na desigualdade acima está relacionado com o fato que $\|e^{in\cdot}\| = 2\pi$ (examine a demonstração do Teorema acima trocando, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a função ϕ_k pela função Φ_k).

Como as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ são convergentes, do Critério da Divergência, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 0$ o que implicará que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, completando a demonstração do resultado. □

4.6 Algumas séries trigonométricas

A seguir exibiremos alguns resultados importantes relacionados com a convergência da série de Fourier associada a uma função f que é 2π -periódica e "bem comportada".

Começaremos fazendo as seguintes observações:

Observação 4.6.1 *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função 2π -periódica tal que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.*

1. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideremos

$$c_n \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (4.65)$$

o n -ésimo coeficiente de Fourier associado à função f e

$$S_N(x) = S_N(f; x) \doteq \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.66)$$

a n -ésima soma parcial da série de Fourier associado à função f , isto é, de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.67)$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideremos a função $\Phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.68)$$

Com isto, do Exemplo (4.5.1), segue que o conjunto $\{\Phi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal em $[-\pi, \pi]$.

2. Logo, utilizando-se de (4.55), teremos que (4.61) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x)|^2 dx \stackrel{(4.55)}{=} \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \stackrel{(4.61)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (4.69)$$

O fator $\frac{1}{2\pi}$ aparece pois $\int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 dx = 2\pi$.

3. Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideremos a função $D_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$D_N(x) \doteq \sum_{n=-N}^N e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.70)$$

que é denominado núcleo de Dirichlet de ordem N .

4. Observemos que para cada $N \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\begin{aligned} (e^{ix} - 1) D_N(x) &= (e^{ix} - 1) \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{i(n+1)x}}_{k \doteq n+1, \sum_{k=-N+1}^{N+1} e^{ikx}} - \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{inx}}_{\sum_{k=-N+1}^N e^{ikx} - e^{-iNx}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=-N+1}^{N+1} e^{ikx}}_{\sum_{k=-N+1}^N e^{ikx} + e^{i(N+1)x}} - \sum_{n=-N+1}^N e^{ikx} - e^{-iNx} \\ &= \sum_{k=-N+1}^N e^{ikx} + e^{i(N+1)x} - \sum_{n=-N+1}^N e^{ikx} - e^{-iNx} \\ &= e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}. \end{aligned}$$

Multiplicando-se essa igualdade por $e^{-i\frac{x}{2}}$ obteremos

$$\underbrace{e^{-i\frac{x}{2}} (e^{ix} - 1)}_{= \underbrace{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}_{= 2i \operatorname{sen}(\frac{x}{2})}} D_N(x) = e^{-i\frac{x}{2}} (e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}) = \underbrace{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}_{= 2i \operatorname{sen}[(N+\frac{1}{2})x]},$$

ou seja,

$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.71)$$

5. Observemos também que, para $N \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$\begin{aligned}
 S_N(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{i(x-t)}}_{=D_N(x-t)} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \quad \begin{pmatrix} s \doteq x-t \Rightarrow ds = -dt \\ t = -\pi \Rightarrow s = x+\pi \\ t = \pi \Rightarrow s = x-\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-s) D_N(s) (-ds) \\
 &\quad \text{f, } D_N \text{ são } 2\pi\text{-periódicas} \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(x-s) D_N(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) D_N(s) ds. \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

Agora podemos enunciar e demonstrar um resultado que trata da convergência pontual da série de Fourier (4.67):

Teorema 4.6.1 *Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função 2π -periódica em $\mathbb{R}$ tal que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.*

Suponhamos que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, existam $\delta, M > 0$ tais que se

$$|t| < \delta \quad \text{implicar} \quad |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq M|t|, \quad (4.73)$$

então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) = f(x_0), \quad (4.74)$$

isto é, a série de Fourier (4.67) associada a função f convergirá, em $\underline{x_0}$, para $f(x_0)$, ou ainda

$$f(x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx_0}.$$

Demonstração:

Consideremos a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(t) \doteq \begin{cases} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}, & 0 < |t| < \pi \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad (4.75)$$

e $g(t + 2\pi) = g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{D_N(x)}_{=\sum_{n=-N}^N e^{inx}} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx}_{\begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}} = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1. \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 S_N(x_0) - f(x_0) &\stackrel{(4.72)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - s) D_N(s) ds - f(x_0) \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) ds}^{(4.76)_1} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{[f(x_0 - s) - f(x_0)]}_{\stackrel{(4.75)}{=} g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \underbrace{D_N(s)}_{\stackrel{(4.71)}{=} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)s\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)s\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)s\right] ds \\
 &\stackrel{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)s\right] = \operatorname{sen}(Ns) \cdot \cos\left(\frac{s}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \cos(Ns)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \operatorname{sen}(Ns) ds \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right] \cos(Ns) ds. \tag{4.77}
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 \left| g(s) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right| &= \frac{|f(x_0 + s) - f(x_0)|}{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right|} \underbrace{\left| \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right|}_{\leq 1} \stackrel{(4.73)}{\leq} \frac{M|s|}{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right|} \\
 &= 2M \left| \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}}} \right| \leq L, \tag{4.78}
 \end{aligned}$$

para $|s| < \delta$, pois $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}} = 1$ e

$$\left| g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \frac{|f(x_0 + s) - f(x_0)|}{\left| \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right|} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right| = |f(x_0 + s) - f(x_0)| \leq M|s| \leq M\pi, \tag{4.79}$$

ou seja, as funções 2π -periódicas

$$g_1 : s \mapsto g(s) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \quad \text{e} \quad g_2 : s \mapsto g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \tag{4.80}$$

são funções limitadas em $\mathbb{R}$ e juntamente com o fato que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ implicarão que as funções acima pertencem a $\mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ (deixaremos os detalhes dessa afirmação como exercício para o leitor).

Com isto podemos considerar os coeficientes de Fourier associados a função g_1 , que serão indicados por $a_n, b_n, n \in \mathbb{Z}^+$ (dados por (4.45), trocando-se função f pela função g_1).

Também podemos considerar os coeficientes de Fourier associados a função g_2 , que serão indicados por $A_n, B_n, n \in \mathbb{Z}^+$ (dados por (4.45), trocando-se função f pela função g_2).

Logo do Corolário (4.5.1) segue que, $a_N, b_N, A_N, B_N \rightarrow \infty$, quando $N \rightarrow \infty$, em particular:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \right] \text{sen}(Ns) \, ds &= \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g_1(s) \text{sen}(Ns) \, ds}^{(4.45) \pi b_N} \rightarrow 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \text{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \right] \cos(Ns) \, ds &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g_2(s) \cos(Ns) \, ds}_{(4.45) \pi A_N} \rightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.81)$$

ou seja, de (4.77), teremos

$$S_N(x_0) - f(x_0) \rightarrow 0, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

mostrando (4.74) e completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.6.2 Uma função f que satisfaz a condição (4.73) será dita função localmente Lipschitziana em $x = x_0$.

Como consequência temos o

Corolário 4.6.1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções 2π -periódicas em $\mathbb{R}$ tais que $f, g \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Suponhamos que $f(x) = 0$ para $x \in I$.

Então para cada $x \in I$ teremos

$$S_N(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty. \quad (4.82)$$

Em particular, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ segue que

$$S_N(f; x) - S_N(g; x) = S_N(f - g; x) \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty, \quad (4.83)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Como a função $f = 0$ satisfaz (4.73) para cada $x \in I$, segue do resultado acima que para cada $x \in I$ teremos que (4.74) será válido, implicando que

$$S_N(x) \rightarrow f(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in I,$$

ou seja, vale (4.82).

Se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então teremos $(f - g)(x) = 0$ para $x \in I \doteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Vale observar que

$$S_N(f; x) - S_N(g; x) = S_N(f - g; x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.84)$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo da primeira parte do que provamos e de (4.84), segue (4.83), completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.6.3 O resultado acima nos diz que o comportamento da série de Fourier de uma função f periódica "bem comportada" em um ponto x_0 depende, em princípio, somente, dos valores da função em alguma vizinhança de x_0 .

Isto nos diz que duas séries de Fourier associadas a duas funções diferentes podem coincidir em um intervalo aberto mas podem diferir em outro intervalo aberto.

Conclusão: o comportamento de uma série de Fourier é bem diferente do comportamento de uma série de potências, que estudamos na Seção 1 deste capítulo (ver Teorema (4.1.6)).

Podemos agora enunciar e demonstrar, o assim denominado, **Teorema de Stone-Weierstrass** para polinômios trigonométricos, mais precisamente temos o:

Teorema 4.6.2 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e 2π -periódica em $\mathbb{R}$.

Então dado $\varepsilon > 0$ existe um polinômio trigonométrico $P = P(x)$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (4.85)$$

Demonstração:

Se "identificarmos" x como $x + 2\pi$ (por meio de uma relação de equivalência) podemos identificar uma função 2π -periódica em $\mathbb{R}$ com uma função definida na circunferência unitária centrada na origem, que denotaremos por S^1 .

Para isto basta considerar a aplicação $x \mapsto e^{ix}$ que leva a reta $\mathbb{R}$ em S^1 e permitirá a identificação citada.

Notemos que o conjunto formado por todos os polinômios trigonométricos formam uma álgebra $\mathcal{A}$ auto-adjunta, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de S^1 e o conjunto S^1 é compacto em $\mathbb{R}^2$ (deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor).

Logo do Corolário (3.4.2) segue que $\overline{\mathcal{A}} = C(S^1; \mathbb{C})$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.6.4 O resultado acima nos diz que toda função contínua e 2π -periódica em $\mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por um polinômio trigonométrico em $\mathbb{R}$.

Com isto podemos enunciar e demonstrar a assim denominada **Identidade de Parseval**, a saber:

Corolário 4.6.2 Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções 2π -periódicas em $\mathbb{R}$ tal que $f, g \in \mathcal{R}$ em $[-\pi, \pi]$, cujos coeficientes de Fourier são $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, respectivamente.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, consideremos a N -ésima soma parcial da série de Fourier (na forma complexa)

$$S_N(f; x) \doteq \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.86)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, c_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier associado à função f , isto é,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (4.87)$$

Então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 dx = 0, \quad (4.88)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n}, \quad (4.89)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \quad (4.90)$$

Demonstração:

Lembremos que se $h \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ segue, do Corolário (2.3.1), que $|h|^2 \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.

Neste caso denotaremos por

$$\|h\|_2 \doteq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Como $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$, segue, do Exercício 12 página 140, que dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tal que a função $\underline{h}$ seja 2π -periódica em $\mathbb{R}$ e

$$\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.91)$$

Como a função $\underline{h}$ é contínua e 2π -periódica em $\mathbb{R}$, do Teorema (4.6.2), segue que existe um polinômio trigonométrico $P = P(x)$ tal que

$$|h(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \quad (4.92)$$

o que implicará em

$$\|h - P\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - P(x)|^2}_{\substack{(4.92) \\ \leq \frac{\varepsilon^2}{9}}} dx \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(4.92)}{<} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9} dx \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.93)$$

Seja $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ e, para cada $n \in \{-N_1, \dots, N_1\}$ consideremos $C_n \in \mathbb{C}$, tais que

$$P(x) = \sum_{n=-N_0}^{N_0} C_n e^{-inx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.94)$$

com $C_{-N_0} \neq 0$ ou $C_{N_0} \neq 0$.

Então aplicando-se o Teorema (4.5.1) a família do Exemplo (4.5.1) ($(t_N)_{N \in \mathbb{N}}$ como sendo $t_N(x) \doteq P(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ como sendo $s_N(x) \doteq S_N(f; x)$, $x \in \mathbb{R}$) segue que (multiplicando-se ambos o membros da desigualdade (4.50) por $\frac{1}{2\pi} > 0$)

$$\|h - S_N(h)\|_2 \stackrel{(4.50)}{\leq} \|h - P\|_2 \stackrel{(4.93)}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo } N \geq N_0, \quad (4.95)$$

assim, da Observação (4.5.4) item 2. e do Teorema (4.5.2), segue que

$$\begin{aligned} \|S_N(h) - S_N(f)\|_2 &= \|S_N(h - f)\|_2 \stackrel{\text{Obs. (4.5.4) item 2. aplicado à função } h-f}{\leq} \sum_{n=-N}^N |c_n - d_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n - d_n|^2 \stackrel{(4.59) \text{ aplicado a } h-f}{\leq} \|h - f\|_2 \stackrel{(4.91)}{<} \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Logo se $N \geq N_0$ teremos

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|_2 &= \|[f - h] + [h - S_N(h)] + [S_N(h) - S_N(f)]\|_2 \\ &\leq \underbrace{\|f - h\|_2}_{\substack{(4.91) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\|h - S_N(h)\|_2}_{\substack{(4.95) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\|S_N(h) - S_N(f)\|_2}_{\substack{(4.96) \\ < \frac{\varepsilon}{3}}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 dx = 0,$$

mostrando (4.88).

Com isto, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f, x) \overline{g(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right] \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-N}^N c_n \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{g(x)} dx}_{=\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \overline{e^{-inx}} dx} \\ &= \sum_{n=-N}^N c_n \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx}_{=\overline{d_n}} = \sum_{n=-N}^N c_n \overline{d_n}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Mas

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f; x) \overline{g(x)} dx \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(f; x)] \overline{g(x)} dx \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |[f(x) - S_N(f; x)] \overline{g(x)}| dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)| \underbrace{|\overline{g(x)}|}_{=|g(x)|} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)| |g(x)| dx \stackrel{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 dx}_{\xrightarrow{(4.89)} 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo podemos passar o limite, quando $N \rightarrow \infty$, em (4.97) e assim obter

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f, x) \overline{g(x)} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n \overline{d_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n},$$

mostrando (4.89).

Fazendo $g = f$ em (4.89) obteremos (4.90), completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 4.6.5 Podemos fazer um estudo semelhante ao feito acima para funções $2L$ -periódicas, bastando, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, substituir, nas considerações acima, a função

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

pela função

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

e, de modo semelhante, substituir as funções

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$$

pelas funções

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

respectivamente.

4.7 Exercícios

Capítulo 5

Funções de Várias Variáveis Reais

Neste capítulo trataremos das funções de várias variáveis reais a valores reais (ou complexos).

Serão abordados assuntos relacionados com a continuidade e a diferenciabilidade de tais funções.

5.1 Um pouco de Álgebra Linear

Nesta seção abordaremos alguns tópicos relacionados com transformações lineares.

Estamos supondo que o leitor esteja familiarizado com a teoria básica de Álgebra Linear, que compreende os assuntos relacionados com espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), base e dimensão de espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que são finitamente gerados, transformações lineares entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que são finitamente gerados entre outros tópicos.

Começaremos com a:

Observação 5.1.1

Sejam $(X, +, \cdot)$, $(Y, +, \cdot)$ e $(Z, +, \cdot)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

A verificação dos fatos citados abaixo serão deixadas como exercício para o leitor.

1. Denotaremos o conjunto formado por todas as transformações lineares $T : X \rightarrow Y$ por

$$L(X; Y).$$

2. Notemos que $(L(X; Y), +, \cdot)$ será um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) onde $\pm$ denota a soma de funções e $\cdot$ denota a multiplicação de uma função por número real (ou complexo).

3. Lembremos também que se $T \in L(X; Y)$ e $S \in L(Y; Z)$ então $S \circ T \in L(X; Z)$.

4. Se $n \in \mathbb{N}$, denotaremos a norma usual do espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ por $\|\cdot\|$, ou seja, se $x \doteq (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ então

$$\|x\| \doteq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Com as considerações acima temos:

Proposição 5.1.1 *Sejam $n, m, k \in \mathbb{N}$. Então:*

1. Se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\|A(x)\| \leq \lambda \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Em particular, existe

$$\|A\|_L \doteq \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(y)\| < \infty \quad (5.2)$$

e a transformação linear $\underline{A}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$;

2. $\|\cdot\|_L$ é uma norma em $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$;

3. Se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ e $B \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$ então

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L \|A\|_L. \quad (5.3)$$

Demonstração:

De 1.:

Seja $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima entrada}}, 0, \dots, 0), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Consideremos $y = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i$ tal que $\|y\| \leq 1$.

Notemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ teremos

$$|y_i| = \sqrt{y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2} = \|y\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |y_i| \leq 1.$$

Seja

$$\lambda \doteq \sum_{i=1}^n \|A(\vec{e}_i)\|. \quad (5.4)$$

Com isto segue que

$$\begin{aligned} \|A(y)\| &= \left\| A \left(\sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i \right) \right\| \stackrel{A \text{ é transf. linear}}{=} \left\| \sum_{i=1}^n y_i A(\vec{e}_i) \right\| \stackrel{\text{Des. triangular}}{\leq} \sum_{i=1}^n \|y_i A(\vec{e}_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{|y_i|}_{\leq 1} \|A(\vec{e}_i)\| = \sum_{i=1}^n \|A(\vec{e}_i)\| \stackrel{(5.4)}{=} \lambda. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Assim o conjunto $\{\|A(y)\|; \|y\| \leq 1\}$ é limitado superiormente por λ portando admitirá supremo e, além disso, teremos:

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|A(y)\| \leq \lambda,$$

mostrando (5.2).

Se $x = 0$ então $\|x\| = 0$, e como $\underline{A}$ é uma transformação linear, segue que $A(x) = 0$ e assim (5.1) ocorrerá trivialmente (pois ambos os lados serão zero e assim a igualdade ocorrerá).

Por outro lado, se $x \neq 0$, considerando-se $y \doteq \frac{x}{\|x\|}$, segue que $\|y\| = 1$ e assim, de (5.5) obteremos

$$\|A(y)\| \leq \lambda \quad \stackrel{y = \frac{x}{\|x\|}}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|}_{= \frac{1}{\|x\|} \|A(x)\|} \leq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \|A(x)\| \leq \lambda \|x\|,$$

mostrando (5.1).

Se $\lambda = 0$ segue, trivialmente, que a função $\underline{A}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$.

Se $\lambda > 0$, temos que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ segue que

$$\|A(x) - A(y)\| \stackrel{A \text{ é transf. linear}}{=} \|A(x - y)\| \stackrel{(5.1)}{\leq} \lambda \|x - y\|,$$

mostrando que a função $\underline{A}$ é Lipschitziana em $\mathbb{R}^n$, em particular, uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$ (basta tomar $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{\lambda}$), completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Notemos que

- Se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então $\|A\|_L \geq 0$.

Além disso

$$\begin{aligned} \|A\|_L = 0 &\Leftrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|A(x)\| = 0 \text{ para } \|x\| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ para } \|x\| \leq 1 \stackrel{\text{Exercício}}{\Leftrightarrow} A(x) = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n; \end{aligned}$$

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então

$$\begin{aligned} \|\alpha A\|_L &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\alpha A)(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|\alpha| \|A(x)\|\} \\ &\stackrel{|\alpha| \geq 0}{=} |\alpha| \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = |\alpha| \|A\|_L; \end{aligned}$$

- Se $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então

$$\begin{aligned} \|A + B\|_L &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\|A(x) + B(x)\|}_{\leq \|A(x)\| + \|B(x)\|} \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|A(x)\| + \|B(x)\|\} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|A(x)\|\} + \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|B(x)\|\} = \|A\|_L + \|B\|_L, \end{aligned}$$

mostrando que $\|\cdot\|_L$ é uma norma em $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Observemos que se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então, para $x \neq 0$ teremos

$$\begin{aligned} \|A\|_L &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|A(y)\| \geq \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \stackrel{A \text{ é transf. linear}}{=} \left\| \frac{1}{\|x\|} A(x) \right\| \\ &\stackrel{\|\cdot\|_L \text{ é norma}}{=} \frac{1}{\|x\|} \|A(x)\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|A(x)\| \leq \|A\|_L \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

Notemos que se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|x\| \leq 1$ teremos

$$\|(B \circ A)(x)\| = \|B[A(x)]\| \stackrel{(5.6)}{\leq} \|B\|_L \|A(x)\| \stackrel{(5.6)}{\leq} \|B\|_L (\|A\|_L \|x\|).$$

Tomando-se o supremo para $\|x\| \leq 1$ obteremos

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L \|A\|_L,$$

completando a demonstração do item 3. e do resultado.

□

Observação 5.1.2

1. Notemos que se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ admite transformação inversa segue que $m = n$.

De fato, se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ admite transformação inversa segue que $\dim[\mathcal{N}(A)] = 0$ e $\dim[\mathcal{I}(A)] = m$.

Logo de um resultado de Álgebra Linear segue que

$$\underbrace{\dim[\mathcal{I}(A)]}_{=m} + \underbrace{\dim[\mathcal{N}(A)]}_{=0} = n,$$

ou seja, $m = n$.

2. Por simplicidade, denotaremos $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ por $L(\mathbb{R}^n)$ e um elemento de $L(\mathbb{R}^n)$ será denominado operador linear em $\mathbb{R}^n$.

Para finalizar esta seção temos o

Teorema 5.1.1 *Seja $\Omega \doteq \{A \in L(\mathbb{R}^n); A \text{ é inversível}\}$. Então*

1. Se $A \in \Omega$ e $B \in L(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\|B - A\|_L \|A^{-1}\|_L < 1 \quad (5.7)$$

segue que $B \in \Omega$.

2. Ω é um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n)$ (munido da norma $\|\cdot\|_L$).

3. A aplicação $T: \Omega \rightarrow \Omega$ dada por

$$T(A) \doteq A^{-1}, \quad A \in \Omega$$

é uma função contínua e bijetora em Ω .

Demonstração:

De 1.:

Notemos que se $C \in \Omega$ segue que $\|C\|_L \neq 0$ (pois caso contrário $C = 0$, e assim não seria injetora).

Assim como $A \in \Omega$ temos que A é um operador linear inversível assim $A^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\|A^{-1}\|_L \neq 0$.

Sejam

$$\alpha \doteq \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} \quad \text{e} \quad \beta \doteq \|B - A\|_L. \quad (5.8)$$

Notemos que

$$\beta = \|B - A\|_L \stackrel{(5.7)}{<} \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} = \alpha, \quad \text{isto é,} \quad \beta < \alpha. \quad (5.9)$$

Logo para $x \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$\begin{aligned} \alpha\|x\| &= \alpha \underbrace{\|A^{-1}[A(x)]\|}_{\stackrel{(5.6)}{\leq} \|A^{-1}\|_L \|A(x)\|} \leq \underbrace{\alpha\|A^{-1}\|_L}_{\stackrel{(5.8)}{=} 1} \|A(x)\| = \|A(x)\| \\ &= \|(A - B)(x) + B(x)\| \leq \underbrace{\|(A - B)(x)\|}_{\stackrel{(5.6)}{\leq} \|A - B\|_L \|x\|} + \|B(x)\| \leq \underbrace{\|A - B\|_L}_{\stackrel{(5.8)}{=} \beta} \|x\| + \|B(x)\| \\ &= \beta\|x\| + \|B(x)\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha - \beta)\|x\| \leq \|B(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.10)$$

Como $\beta < \alpha$ (ver (5.9)) segue que $\|B(x)\| \neq 0$ se $x \neq 0$, ou seja, o operador linear B é injetor e como o domínio e o contradomínio são iguais (logo têm mesma dimensão) implicará que o operador linear B será sobrejetor, ou ainda bijetor.

Assim teremos $B \in \Omega$, completando a demonstração de 1. .

De 2.:

Dado $A \in \Omega$, notemos que se $B \in L(\mathbb{R}^n)$ é tal que

$$\|B - A\|_L < \alpha,$$

de (5.9) e do item 1. segue que $B \in \Omega$, mostrando a bola aberta $B(A; \alpha) \subseteq \Omega$, ou seja, Ω é um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n)$ (munido da norma $\|\cdot\|_L$), completando a demonstração de 2. .

De 3.:

Se $A, B \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$ e α, β com em (5.8) trocando-se x por $B^{-1}y$ em (5.10) obteremos

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)\|B^{-1}(y)\| &\leq \|B[B^{-1}(y)]\| = \|y\| \Rightarrow \|B^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}\|y\|, \\ \sup_{\|y\| \leq 1} \|B^{-1}\|_L &\leq \frac{1}{\alpha - \beta}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

Logo, se $A \in \Omega$, da Proposição (5.1.1) item 3., segue que

$$\begin{aligned} B^{-1} - A^{-1} &= B^{-1}(AA^{-1}) - (B^{-1}B)A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1} \\ \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\|_L &= \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\|_L \stackrel{(5.3)}{\leq} \underbrace{\|B^{-1}\|_L}_{\stackrel{(5.11)}{\leq} \frac{1}{\alpha - \beta}} \underbrace{\|A - B\|_L}_{\stackrel{(5.8)}{=} \beta} \underbrace{\|A^{-1}\|_L}_{\stackrel{(5.11)}{=} \frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \frac{1}{\alpha - \beta} \beta \frac{1}{\alpha} \\ \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\|_L &\leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Portanto, se $B \xrightarrow{\|\cdot\|_L} A$, isto é, se $\beta = \|B - A\|_L \rightarrow 0$, segue, de (5.12), que $\|B^{-1} - A^{-1}\|_L \rightarrow 0$, ou ainda $B^{-1} \xrightarrow{\|\cdot\|_L} A^{-1}$, ou seja, a aplicação T é contínua em Ω (munido da norma $\|\cdot\|_L$), completando a demonstração do item 3. e do resultado. $\square$

5.2 Diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais a valores reais (ou complexos)

Nesta seção trataremos da diferenciabilidade de funções de várias variáveis a valores reais (ou complexos) e algumas aplicações da mesma bem como propriedades associadas.

Antes de introduzir a noção de diferenciabilidade para este caso, lembraremos da noção análoga para o caso de funções reais de uma variável real.

Observação 5.2.1

1. Nosso objetivo no que segue é introduzir o conceito de diferenciabilidade em $x_0 \in E$, onde E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, para uma função $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$.

2. No capítulo anterior tratamos, de modo rápido, a questão da diferenciabilidade de uma função vetorial $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

A seguir faremos o estudo da situação do item acima de modo mais preciso e depois trataremos da situação geral do item 1.

3. Seja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in (a, b)$.

Dizemos que a função f é diferenciável em x_0 se existe o seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

Neste caso denotamos o limite acima por $f'(x_0)$ e o denominamos de derivada da função f no ponto x_0 .

4. O limite (5.13) é equivalente a escrever

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h), \quad (5.14)$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \quad (5.15)$$

5. Por sua vez, a expressão (5.14) pode ser lida da seguinte forma: a diferença $f(x_0 + h) - f(x_0)$ é aproximadamente igual função linear, $h \mapsto f'(x_0)h$, para h suficientemente pequeno, onde o erro é dado pela função $r = r(h)$.

6. Deste modo $f'(x_0)$ pode ser visto, não como um número real, mas como associado a um operador linear definido em $\mathbb{R}$ (a saber, $h \mapsto f'(x_0)h$).

Lembremos que, do ponto de vista da Álgebra Linear, $\mathbb{R}$ é isomorfo a $L(\mathbb{R})$ (pois ambos são unidimensionais).

Para o caso de funções vetoriais temos a:

Definição 5.2.1 Sejam $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial e $x_0 \in (a, b)$.

Diremos que a função f é diferenciável em x_0 se existir $y \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = y. \quad (5.16)$$

Neste caso diremos que y é a derivada da função f no ponto x_0 , que será indicada por $f'(x_0)$, ou seja

$$f'(x_0) \doteq y.$$

Diremos que a função f é diferenciável em (a, b) se ela a função f for diferenciável em cada ponto de (a, b) .

Com isto podemos considerar a função $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Observação 5.2.2

1. Notemos que o limite acima é considerado na norma de $\mathbb{R}^m$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existirá $h \in I_\delta^* \doteq (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ tal que $x_0 + h \in (a, b)$ e

$$\left\| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - y \right\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

2. Observemos que (5.16) é equivalente a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{h} = 0, \quad (5.17)$$

onde

$$r(h) \doteq f(x_0 + h) - f(x_0) - y, \quad h \in I_\delta^*. \quad (5.18)$$

3. Portanto a função $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ será diferenciável em $x_0 \in (a, b)$ se, e somente se, existe $y \in \mathbb{R}^m$, que será denotado por $f'(x_0)$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - y h\|_{\mathbb{R}^m}}{|h|} = 0. \quad (5.19)$$

4. Notemos também que no caso acima podemos interpretar $f'(x_0)$ como sendo associada a uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^m$ (a saber, $h \mapsto f'(x_0) h$), pois $\mathbb{R}^m$ é isomorfo a $L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ (pois ambos têm dimensão m).

5. Na situação acima, se $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, temos que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, existe uma função $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad x \in (a, b),$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \vec{u}_i, \quad x \in (a, b).$$

6. Sejam $x_0 \in E$, E subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial, cujas funções componentes são $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Afirmamos que a função f é diferenciável em x_0 se, e somente se, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função f_i é diferenciável em x_0 .

Além disso

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), \dots, f'_m(x_0)).$$

De fato, a função f é diferenciável em x_0 se, e somente se, existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - y h}{h} = 0. \quad (5.20)$$

Seja $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Logo (5.20) ocorrerá se, e somente se, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ tivermos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - y_i h}{h} = 0, \quad (5.21)$$

ou seja, se, e somente se, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função f_i for diferenciável em x_0 e $y_i = f'_i(x_0)$, como afirmamos acima.

7. Na situação acima, se olharmos $f'(x)$ como uma transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^m$, isto é, $f'(x) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, a expressão acima nos diz que a matriz da transformação linear $h \mapsto f'(x_0)h$ em relação às bases canônicas $\beta_1 \doteq \{1\}$ e $\beta_2 \doteq \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, será dada por

$$[f'(x_0)]_{\beta_1, \beta_2} = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

A caracterização (5.19) pode ser estendida para funções que têm várias variáveis reais tomando valores reais, ou seja, temos a:

Definição 5.2.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto em $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a função f é diferenciável em x_0 se existir $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - y \bullet h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad (5.22)$$

onde $\bullet$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$

Neste caso diremos que y é a derivada da função f no ponto x_0 , que será indicada por $f'(x_0)$, ou seja

$$f'(x_0) \doteq y.$$

Diremos que a função f é diferenciável em E se ela a função f for diferenciável em cada ponto de E .

Com isto podemos considerar a função $f': E \rightarrow \mathbb{R}$.

Observação 5.2.3

1. Observemos que (5.22) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - y \bullet h|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \quad (5.23)$$

2. A definição acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

A função f é diferenciável em $x_0 \in E$ se existir $y \in \mathbb{R}$ de modo que dado $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que se $h \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ teremos $x_0 + h \in E$ e

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - y \bullet h}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \right| < \varepsilon.$$

3. Observemos que (5.22) é equivalente a :

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{|r(h)|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad (5.24)$$

onde

$$r(h) \doteq f(x_0 + h) - f(x_0) - y \bullet h, \quad h \in \mathbb{R}^n, \quad \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta. \quad (5.25)$$

4. Notemos também que no caso acima podemos interpretar $f'(x_0)$ como sendo uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ (a saber, $h \mapsto f'(x_0)h$), já que $\mathbb{R}^n$ é isomorfo a $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ (pois ambos têm dimensão n).

Podemos agora considerar a situação geral:

Definição 5.2.3 *Sejam E subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

Diremos que a função f é diferenciável em x_0 se existir uma transformação linear $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \quad (5.26)$$

Neste caso definimos a derivada da função f no ponto x_0 , que será indicada por $f'(x_0)$, como sendo

$$f'(x_0) \doteq A. \quad (5.27)$$

Diremos que a função f é diferenciável em E se a função f for diferenciável em cada ponto de E .

Com isto podemos considerar a função $f': E \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ que a cada $x \in E$ associará $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Observação 5.2.4

1. *Observemos que, como E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in E$ existe $\eta > 0$ tal que $B(x_0; \eta) \subseteq E$.*

Assim, a função f será diferenciável em x_0 se existir uma transformação linear $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tal que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta \in (0, \eta)$, de modo que se

$$0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta, \quad \text{deveremos ter} \quad \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} < \varepsilon. \quad (5.28)$$

2. *Notemos que em (5.26) a norma do numerador é a norma de $\mathbb{R}^m$ e a norma do denominador é a norma de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Na situação acima consideremos, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$, a i -ésima componente da função f .*

Afirmamos que a função f é diferenciável em x_0 se, e somente se, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função f_i é diferenciável em x_0 .

Além disso

$$f'(x_0)(h) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0)(h) \\ \vdots \\ f'_m(x_0)(h) \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O resultado a seguir garante que se a função for diferenciável a derivada estará bem definida, isto é,

Proposição 5.2.1 *Se (5.26) ocorrer com $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então deveremos ter $B = A$.*

Demonstração:

Seja $C \doteq A - B$.

Então para $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq \vec{0}$, de modo que $x_0 + h \in A$, teremos

$$\begin{aligned} \|C(h)\|_{\mathbb{R}^m} &= \|(A - B)(h)\|_{\mathbb{R}^m} = \| -\{f(x_0 + h) - f(x_0)\} - A(h) + \{f(x_0 + h) - f(x_0)\} - B(h) \|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m} + \|f(x_0 + h) - f(x_0) - B(h)\|_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Como função f é diferenciável em x_0 , de (5.29), segue que

$$0 \leq \frac{\|C(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \stackrel{(5.29)}{\leq} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} + \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - B(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow \vec{0},$$

ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|C(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|C(tx)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|tx\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}. \quad (5.30)$$

Notemos que para $t \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ teremos

$$\frac{\|C(tx)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|tx\|_{\mathbb{R}^n}} \text{ é linear } \frac{\|tC(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|tx\|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{|t| \|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{|t| \|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{\|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Isto, juntamente com (5.30), implicarão que

$$\frac{\|C(x)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\},$$

e como $x \neq \vec{0}$ segue que

$$C(x) = \vec{0}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \Rightarrow C(x) = \vec{0}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$A(x) - B(x) = \vec{0}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mostrando que $B = A$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 5.2.5

1. A expressão (5.26) na Definição acima pode ser reescrita da seguinte forma:

Se a função f for diferenciável em $x_0 \in E$ então a função $r: V \doteq B(\vec{0}; \eta) \setminus \{\vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$r(h) \doteq f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h), \quad h \in V \quad (5.31)$$

deverá satisfazer

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \quad (5.32)$$

2. Notemos que se a função f é diferenciável em $x_0 \in E$ segue que ela será uma função contínua em x_0 .

De fato, pois

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \stackrel{(5.31), f'(x_0)=A}{=} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} [f'(x_0)h + r(h)].$$

Da Proposição (5.1.1) temos que $f'(x_0)$ é contínua (pois $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$), logo será contínua em $\vec{0}$, assim

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} f'(x_0)h = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \|r(h)\|_{\mathbb{R}^m} = \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \|h\|_{\mathbb{R}^n} \right] = \underbrace{\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}}_{(5.32) \ 0} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \|h\|_{\mathbb{R}^n}}_{=0} = 0,$$

assim

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0,$$

mostrando que a função f é contínua em $x_0 \in E$.

3. Daqui em diante omitiremos os índices nas normas dos espaços euclidianos que aparecerão (ou seja, $\|\cdot\| \doteq \|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$).

Em cada caso o leitor é convidado a verificar que a norma que estaremos utilizando é a norma usual do correspondente espaço euclidiano.

A seguir exibiremos um resultado muito importante, a saber:

Proposição 5.2.2 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.*

Então a função A é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e

$$A'(x_0) = A, \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração:

Notemos que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|A(x_0 + h) - A(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} \stackrel{A \text{ é linear}}{=} \lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\overbrace{\|A(x_0) + A(h) - A(x_0) - A(h)\|}^{=0}}{\|h\|} = 0,$$

ou seja, a função A é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $A'(x_0) = A$, terminando a demonstração do resultado. $\square$

Valem as propriedades básicas de diferenciação, a saber:

Proposição 5.2.3 *Sejam E subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções diferenciáveis em x_0 e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Então

1. *As funções $(f \pm g)$ serão diferenciáveis em x_0 e*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

2. *A função (λf) será diferenciável em x_0 e*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Demonstração:

As demonstrações dos itens acima serão deixadas como exercício para o leitor. □

Temos também o seguinte importante resultado, conhecido como regra da cadeia:

Teorema 5.2.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $U \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ função diferenciável em x_0 , $y_0 \doteq f(x_0) \in U$ e $g: U \rightarrow \mathbb{R}^j$ função diferenciável em y_0 .*

Então a função $(g \circ f)$ será diferenciável em x_0 e além disso

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \circ f'(x_0). \quad (5.33)$$

Demonstração:

Como $x_0 \in E$, $y_0 \in U$, estes são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, e a função f é contínua em x_0 , segue que existem $\eta_1, \eta_2 > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(x_0; \eta_1) \subseteq E$ e se

$$x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0; \eta_1) \quad \text{teremos} \quad f(x) \in B_{\mathbb{R}^m}(y_0; \eta_2) \subseteq U, \quad (5.34)$$

onde $B_{\mathbb{R}^l}(z_0; \eta)$ indica a bola aberta de centro em $z_0 \in \mathbb{R}^l$ e raio η em $\mathbb{R}^l$.

Consideremos as funções $u: B_{\mathbb{R}^n}(x_0; \eta_1) \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $v: B_{\mathbb{R}^m}(y_0; \eta_2) \rightarrow \mathbb{R}^j$ dadas por

$$u(h) \doteq f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h, \quad h \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0; \eta_1), \quad (5.35)$$

$$v(k) \doteq g(y_0 + k) - g(y_0) - g'(y_0)k, \quad k \in B_{\mathbb{R}^m}(y_0; \eta_2). \quad (5.36)$$

Como as funções f e g são diferenciáveis em x_0 e y_0 , respectivamente, segue que

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \vec{0}} \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} = 0. \quad (5.37)$$

Logo, dado $h \in B_{\mathbb{R}^n}(\vec{0}; \eta_1)$, consideremos

$$k \doteq \underbrace{f(x_0 + h)}_{\in B(x_0; \eta_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{=y_0} \stackrel{(5.34)}{\in} B_{\mathbb{R}^m}(\vec{0}; \eta_2), \quad \text{em particular,} \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + k = y_0 + k. \quad (5.38)$$

Então

$$\begin{aligned} \|k\| &\stackrel{(5.38)}{=} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \stackrel{(5.35)}{=} \|f'(x_0)h - u(h)\| \leq \|f'(x_0)h\| + \|u(h)\| \\ &\stackrel{f'(x_0) \text{ é transf. linear}}{\leq} \|f'(x_0)\|_L \|h\| + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \|h\| = \left[\|f'(x_0)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right] \|h\|. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - [g'[f(x_0)] \circ f'(x_0)](h) &= \underbrace{g[f(x_0 + h)]}_{\stackrel{(5.38)}{=} y_0 + k} - \underbrace{g[f(x_0)]}_{=y_0} - g'[f(x_0)][f'(x_0)h] \\ &= \underbrace{g(y_0 + k) - g(y_0)}_{\stackrel{(5.36)}{=} v(k) + g'(y_0)k} - g'(y_0)[f'(x_0)h] \\ &= v(k) + g'(y_0)k - g'(y_0)[f'(x_0)h] \\ &\stackrel{g'(y_0) \text{ é linear}}{=} v(k) + g'(y_0)[\underbrace{k}_{\stackrel{(5.38)}{=} f(x_0 + h) - f(x_0)}} - f'(x_0)h \\ &= v(k) + g'(y_0)[\underbrace{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}_{\stackrel{(5.35)}{=} u(h)}} \\ &= v(k) + g'(y_0)[u(h)]. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 \frac{\|(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - g'(y_0)[f'(x_0)h]\|}{\|h\|} &= \frac{\|v(k) + g'(y_0)[u(h)]\|}{\|h\|} \\
 &\leq \frac{\|v(k)\|}{\|h\|} + \frac{\|g'(y_0)[u(h)]\|}{\|h\|} \stackrel{(5.39)}{\leq} \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|} + \|g'(y_0)\|_L \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \\
 &\leq \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} \left\{ \|f'(x_0)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right\} \frac{1}{\|h\|} + \|g'(y_0)\|_L \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \\
 &= \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} \left\{ \|f'(x_0)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right\} + \|g'(y_0)\|_L \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Notemos que, da diferenciabilidade da função f em x_0 , se $h \rightarrow \vec{0}$ em $\mathbb{R}^n$, segue que $\frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$.

Logo, de (5.39), segue que $k \rightarrow \vec{0}$ em $\mathbb{R}^m$.

Como isto, da diferenciabilidade da função g em y_0 , como $k \rightarrow \vec{0}$ em $\mathbb{R}^m$, deveremos ter $\frac{\|v(k)\|}{\|k\|} \rightarrow 0$.

Portanto, fazendo $h \rightarrow \vec{0}$ em $\mathbb{R}^n$, das conclusões acima e de (5.40), segue que

$$\frac{\|(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) - g'(y_0)[f'(x_0)h]\|}{\|h\|} \rightarrow 0,$$

ou seja, a função $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e além disso

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \circ f'(x_0),$$

ou seja, vale (5.33), completando a demonstração do resultado. □

5.3 Derivadas parciais

Nesta seção estudaremos algumas propriedades importantes de funções diferenciáveis definidas em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^m$.

Antes porém introduziremos alguns conceitos que serão utilizados no estudo acima.

Para isto sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Seja $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.1 Seja $j \in \{1, \dots, n\}$.

Se existir o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{e}_j) - f(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

diremos que o mesmo é a derivada parcial da função f , em relação a x_j , no ponto x_0 e este será indicado por $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ ou $\partial_{x_j} f(x_0)$, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{e}_j) - f(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.41}$$

Observação 5.3.1

1. Podem ocorrer situações em que uma função possui todas as derivadas parciais em um ponto mas não ser diferenciável nesse ponto.

Na verdade, podem existir todas as derivadas parciais mas a função em um ponto do seu domínio e ela não ser, nem mesmo, contínua nesse ponto, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Observemos que a função f não é contínua em (x_0, y_0) .

De fato, pois

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) &\stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) &\stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{(t^2)^2 + (t^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

logo não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, em particular, a função f não é contínua em $(x_0, y_0) \doteq (0, 0)$.

Portanto, pela Observação (5.2.5) item 2., segue que a função f não poderá ser diferenciável em $X_0 \doteq (x_0, y_0) = (0, 0)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{e}_1) - f(X_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f[(0, 0) + t(1, 0)]}^{=f(t,0) \stackrel{t \neq 0}{=} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0} - \underbrace{f(0, 0)}_{=0}}{t} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\vec{e}_2) - f(X_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f[(0, 0) + t(0, 1)]}^{=f(0,t) \stackrel{t \neq 0}{=} \frac{0 \cdot t}{0^2 + t^2} = 0} - \underbrace{f(0, 0)}_{=0}}{t} = 0, \end{aligned}$$

ou seja, existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ mas a função f não será diferenciável em $(0, 0)$.

2. Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ são funções tais que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0)$ então existirão as

derivadas parciais $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial x_j}(x_0)$ e $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_j}(x_0)$ e além disso

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \pm g)}{\partial x_j}(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \pm \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0), \\ \frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_j}(x_0) &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0). \end{aligned}$$

Deixaremos a demonstração destes fatos como exercício para o leitor.

3. Como veremos mais adiante, se a função $\underline{f}$ for diferenciável em x_0 então existirão todas derivadas parciais da função $\underline{f}$ no ponto x_0 e poderemos obtê-las utilizando-se a derivada da função $\underline{f}$ no ponto x_0 .

4. Consideremos, como acima, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função.

Sejam $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ e $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, definamos a função $f_i: E \rightarrow \mathbb{R}$ (a i -ésima componete da função $\underline{f}$) onde:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \vec{u}_i, \quad x \in E.$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, teremos

$$f_i(x) = f(x) \bullet \vec{u}_i,$$

onde $\bullet$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^m$.

5. Observemos também que, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, se existir o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + t\vec{e}_j) - f_i(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

este será a derivada parcial da i -ésima componente da função $\underline{f}$, em relação x_j , no ponto x_0 , isto é,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \doteq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + t\vec{e}_j) - f_i(x_0)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.43)$$

Mantendo a notação acima, temos o:

Teorema 5.3.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em x_0 .*

Então para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ existe a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ e além disso

$$f'(x_0)\vec{e}_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \vec{u}_i. \quad (5.44)$$

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ é diferenciável em x_0 , da Observação (5.2.4) item 3., segue que as funções $\underline{f}_i$ são diferenciáveis em x_0 , para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, teremos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - f'_i(x_0)h}{\|h\|} = 0,$$

que é equivalente a (fazendo $k \doteq \frac{1}{t} h \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + tk) - f_i(x_0) - f'_i(x_0)(tk)}{\underbrace{\|tk\|}_{|t| \|k\|}} = 0, \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}. \quad (5.45)$$

Com isto teremos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + t\vec{e}_j) - f_i(x_0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + t\vec{e}_j) - f_i(x_0) - f'_i(x_0)(t\vec{e}_j) + f'_i(x_0)(t\vec{e}_j)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + t\vec{e}_j) - f_i(x_0) - f'_i(x_0)(t\vec{e}_j)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f'_i(x_0)(t\vec{e}_j)}^{f'_i(x_0) \text{ é linear } t f'_i(x_0)(\vec{e}_j)}}{t} \\ &\stackrel{k \doteq \vec{e}_j \text{ em (5.45)}}{=} 0 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t [f'_i(x_0)\vec{e}_j]}{t} = f'_i(x_0)\vec{e}_j, \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ e

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = f'_i(x_0)\vec{e}_j, \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.46)$$

Como

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \vec{u}_i, \quad x \in E$$

e existem as derivadas parciais de cada parcela, da Observação (5.3.1) item 4., segue que

$$f'(x_0)\vec{e}_j \stackrel{f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \vec{u}_i}{=} \sum_{i=1}^n [f'_i(x_0)\vec{e}_j] \vec{u}_i \stackrel{(5.46)}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \vec{u}_i,$$

completando a demonstração do resultado. □

Observação 5.3.2

1. Na situação acima, consideremos $\beta_1 \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ e $\beta_2 \doteq \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Afirmamos que a matriz da transformação linear $f'(x_0)$ em relação as bases β_1 e β_2 , de notada por $[f'(x_0)]_{\beta_1, \beta_2}$, será dada por:

$$[f'(x_0)]_{\beta_1, \beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}). \quad (5.47)$$

De fato, do Teorema acima temos que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$

$$f'(x_0)\vec{e}_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \vec{u}_i,$$

ou seja, a j -ésima coluna da matriz $[f'(x_0)]_{\beta_1, \beta_2}$ será

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz $[f'(x_0)]_{\beta_1, \beta_2}$ será dada por (5.47).

2. Em particular, se $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$\begin{aligned} [f'(x_0)h]_{\beta_2} &= [f'(x_0)]_{\beta_1\beta_2} \cdot [h]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) h_j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) h_j \right) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) h_j \right] \bar{u}_i. \end{aligned} \quad (5.48)$$

3. Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ uma curva parametrizada diferenciável e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em E .

Sejam $\beta_1 \doteq \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, as funções componentes associadas a função γ , isto é,

$$\gamma(t) \doteq (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t) \bar{e}_i, \quad t \in [a, b]. \quad (5.49)$$

Consideremos a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) \doteq f(\gamma(t)), \quad t \in [a, b].$$

Do Teorema (5.2.1) segue que a função g é diferenciável em $[a, b]$ e

$$g'(t) = f'[\gamma(t)] \circ [\gamma'(t)], \quad t \in [a, b].$$

Como $\gamma'(t) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ e $f'[\gamma(t)] \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, segue que $g'(t) \in L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Notemos que $L(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ é isomorfo a $\mathbb{R}$ (pois ambos têm dimensão 1), assim podemos identificar $g'(t)$ com um número real.

4. Na situação acima, se $\beta_0 \doteq \{1\}$ e $\beta_1 \doteq \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, temos que a matriz da transformação linear $\gamma'(t)$ em relação a estas bases será uma matriz coluna $n \times 1$ onde, a i -ésima linha da mesma, será $\gamma_i'(t)$, ou seja

$$[\gamma'(t)]_{\beta_0, \beta_1} \stackrel{(5.49)}{=} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

Por outro lado, a matriz da transformação linear $f'(x)$ em relação às bases β_1 e β_0 será dada por (ver item 1. desta Observação)

$$[f'(x)]_{\beta_1, \beta_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in E.$$

Logo a matriz da transformação linear $g'(t)$ em relação à base β_0 será (via Álgebra Linear)

$$\begin{aligned} [g'(t)]_{\beta_0, \beta_0} &= [f'[\gamma(t)]]_{\beta_1, \beta_0} \cdot [\gamma'(t)]_{\beta_0, \beta_1} \stackrel{\text{Alg. Linear}}{=} [f'[\gamma(t)]]_{\beta_1, \beta_0} \cdot [\gamma'(t)]_{\beta_0, \beta_1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}[\gamma(t)] & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}[\gamma(t)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t)] \gamma_i'(t), \end{aligned} \quad (5.50)$$

para $t \in [a, b]$.

Temos a

Definição 5.3.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas parciais em x_0 .*

Definimos o vetor gradiente da função f em x_0 , que será indicado por $\nabla f(x_0)$, como sendo

$$\nabla f(x_0) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \in \mathbb{R}^n, \quad (5.51)$$

ou

$$\nabla f(x_0) \doteq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \vec{e}_i, \quad (5.52)$$

onde $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Observação 5.3.3

1. Voltando ao item 4. da Observação (5.3.2), notamos que se $x_0 \doteq \gamma(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$, como

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t_0) \vec{e}_i,$$

de (5.50), segue que

$$g'(t_0) \stackrel{(5.50)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t_0)] \gamma_i'(t_0) = \nabla f[\gamma(t_0)] \bullet \gamma'(t_0). \quad (5.53)$$

2. Notemos que se $x_0 \in E$, como E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, existirá $\delta > 0$ tal que $B(x_0; \delta) \subseteq E$.

Logo se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário (isto é, $\|\vec{u}\| = 1$) e considerarmos a curva parametrizada $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow E$ dada por

$$\gamma(t) \doteq x_0 + t\vec{u}, \quad t \in (-\delta, \delta), \quad (5.54)$$

segue que a curva γ será uma curva parametrizada diferenciável em E e

$$\gamma'(t) = \vec{u}, \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Logo, de (5.53), segue que

$$g'(0) = \nabla f[\gamma(0)] \bullet \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \bullet \vec{u}. \quad (5.55)$$

Por outro lado notemos que

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{u}) - f(x_0)}{t}. \quad (5.56)$$

Com isto temos a:

Definição 5.3.3 *Na situação acima, o limite (5.56) (quando existir) será denominado derivada direcional da função f em x_0 , na direção do vetor $\vec{u}$ e indicada por $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$.*

Observação 5.3.4

1. Notemos que o vetor $\vec{u}$ na Definição acima deve ser unitário.
2. Se existirem todas as derivadas parciais da função f em x_0 , de (5.55) e (5.56), implicarão que existirá a derivada direcional da função f em x_0 na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u}$ e além disso

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0) \stackrel{(5.56)}{=} g'(0) \stackrel{(5.55)}{=} \nabla f(x_0) \bullet \vec{u}. \quad (5.57)$$

3. Na situação acima, se $\nabla f(x_0) \neq \vec{0}$ e considerarmos vetores unitários $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, teremos que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$ atingirá seu valor máximo quando o vetor $\vec{u}$ for múltiplo positivo do vetor $\nabla f(x_0)$, mais precisamente se

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

De fato, pois se $\theta \in [0, 2\pi)$ nos fornece o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\nabla f(x_0)$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0) &= \nabla f(x_0) \bullet \vec{u} = \|\nabla f(x_0)\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cos(\theta) \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cos(\theta), \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$ atingirá seu valor máximo quando $\theta = 0$, isto é, quando o vetor $\vec{u}$ for múltiplo positivo do vetor $\nabla f(x_0)$, ou seja,

$$\vec{u} = \lambda \nabla f(x_0), \quad \text{com } \lambda > 0.$$

Como

$$1 = \|\vec{u}\| = \|\lambda \nabla f(x_0)\| = \lambda \overbrace{\|\nabla f(x_0)\|}^{\neq 0} \quad \text{segue que} \quad \lambda = \frac{1}{\|\nabla f(x_0)\|},$$

ou seja

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

como afirmamos,

Neste caso $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$ será igual a $\|\nabla f(x_0)\|$.

4. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$ atingirá seu valor mínimo quando

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|},$$

pois, neste caso $\theta = \pi$ e assim $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0)$ será igual a $-\|\nabla f(x_0)\|$.

A verificação deste fato é semelhante ao que fizemos no item acima.

5. Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário tal que

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i,$$

onde $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ segue, de (5.52), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0) &\stackrel{(5.57)}{=} \nabla f(x_0) \bullet \vec{u} = \nabla f(x_0) \bullet \left(\sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i \right) \\ &\stackrel{\text{Prop. Produto interno}}{=} \sum_{i=1}^n u_i \left(\underbrace{\nabla f(x_0) \bullet \vec{e}_i}_{\stackrel{(5.52)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}} \right) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \end{aligned}$$

ou seja, a derivada direcional da função f no ponto x_0 an direção do vetor unitário $\vec{u}$ pode ser obtida por meio das derivadas parciais da mesma no mesmo ponto, isto é:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) u_i. \quad (5.58)$$

A seguir enunciaremos alguns resultados importantes que são consequência da diferenciabilidade de uma função de várias variáveis reais tomando valores num espaço euclidiano.

Começaremos pela Desigualdade do valor médio, mais precisamente:

Teorema 5.3.2 *Suponhamos que a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) .*

Então existe $t_0 \in (a, b)$ tal que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(t_0)\|(b - a). \quad (5.59)$$

Demonstração:

Seja

$$z \doteq f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^n \quad (5.60)$$

e consideremos a função $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq z \bullet f(t), \quad t \in [a, b].$$

Como função f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) segue que a função ϕ será contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) (usamos o fato que a função $x \mapsto z \bullet x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^n$, cuja verificação será deixada como exercício para o leitor).

Logo pelo Teorema do Valor Médio (visto em Análise I) segue que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(t_0)(b - a). \quad (5.61)$$

Mas (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor)

$$\phi'(t) = z \bullet f'(t),$$

logo (5.61) tornar-se-á

$$\phi(b) - \phi(a) = [z \bullet f'(t_0)](b - a). \quad (5.62)$$

Temos também que

$$\phi(b) - \phi(a) = z \bullet f(b) - z \bullet f(a) = z \bullet \left[\underbrace{f(b) - f(a)}_{\stackrel{(5.60)}{=} z}} \right] = z \bullet z = \|z\|^2 \geq 0, \quad (5.63)$$

assim

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\stackrel{(5.63)}{=} |\phi(b) - \phi(a)| \stackrel{(5.62)}{=} |z \bullet f'(t_0)| (b-a) \\ &\stackrel{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|z\| \|f'(t_0)\| (b-a). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Se $z = \vec{0}$, isto é, $f(b) = f(a)$ nada temos a fazer pois o lado direito de (5.59) será igual a zero.

Se $z \neq \vec{0}$ teremos $\|z\| > 0$ e (5.64) implicará que

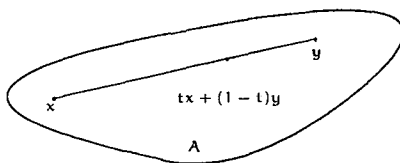
$$\|z\| \leq \|f'(t_0)\| (b-a) \stackrel{(5.60)}{\Rightarrow} \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(t_0)\| (b-a),$$

ou seja, vale (5.59), completando a demonstração do resultado. $\square$

Para o próximo resultado precisaremos da:

Definição 5.3.4 Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo em $\mathbb{R}^n$ se para quaisquer $x, y \in A$, o segmento que tem extremidades nestes dois pontos está inteiramente contido em A , ou seja,

$$(1-t)x + ty \in A, \quad \text{para } t \in [0, 1].$$



Como consequência temos o

Corolário 5.3.1 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em E de modo que existe $M > 0$ tal que

$$\|f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)} \leq M, \quad \text{para todo } x \in E. \quad (5.65)$$

Então

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in E. \quad (5.66)$$

Demonstração:

Sejam $x, y \in E$.

Consideremos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a curva parametrizada diferenciável dada por

$$\gamma(t) \doteq (1-t)x + ty, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.67)$$

Observemos que

$$\gamma'(t) = y - x, \quad t \in [0, 1].$$

Como o conjunto E é convexo e $x, y \in E$, segue que $\gamma(t) \in E$ para todo $t \in [0, 1]$.

Definamos a função $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$g(t) \doteq f[\gamma(t)], \quad t \in [0, 1].$$

Notemos que

$$g(1) = f \left[\underbrace{\gamma(1)}_{\stackrel{(5.67)}{=} y}} \right] = f(y), \quad (5.68)$$

$$g(0) = f \left[\underbrace{\gamma(0)}_{\stackrel{(5.67)}{=} x}} \right] = f(x), \quad (5.69)$$

Como as funções f e γ são diferenciáveis em E e $[0, 1]$, respectivamente, segue que a função g será diferenciável em $[0, 1]$, em particular, será contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$.

Da Regra da Cadeia, segue que

$$g'(t) = f'[\gamma(t)] \underbrace{[\gamma'(t)]}_{=y-x} = f'[\gamma(t)](y-x), \quad t \in [0, 1].$$

Logo

$$\begin{aligned} \|g'(t)\| &= \|f'[\gamma(t)](y-x)\| \leq \underbrace{\|f'[\gamma(t)]\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)}}_{\substack{\text{Hipótese} \\ \leq M}} \|y-x\| \\ &\leq M \|y-x\|. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Portanto, aplicando a Desigualdade do Valor Médio (isto é, o Teorema (5.3.2)) à função g , segue que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\|f(y) - f(x)\| \stackrel{(5.68), (5.69)}{=} \|g(1) - g(0)\| \stackrel{\text{Teorema (5.3.2)}}{\leq} \|g'(t_0)\| |1 - 0| = \|g'(t_0)\| \stackrel{(5.70)}{\leq} M \|y-x\|,$$

obtendo (5.66), completando a demonstração do resultado. $\square$

Observação 5.3.5 O resultado acima nos diz que se a função f tem derivada uniformemente limitada em um subconjunto aberto e convexo de $\mathbb{R}^n$ então ela será uma função Lipschitziana em E .

Como consequência deste temos o:

Corolário 5.3.2 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em E tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in E$.

Então a função f será constante em E , ou seja, se $x_0 \in E$ teremos

$$f(x) = f(x_0), \quad x \in E.$$

Demonstração:

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in E$ segue que

$$M \doteq \|f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)} = 0, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Logo, do Corolário (5.3.1), segue que

$$0 \leq \|f(x) - f(x_0)\| \leq M \|x - x_0\| = 0, \quad \text{para todo } x \in E,$$

ou seja, $\|f(x) - f(x_0)\| = 0$, ou ainda, $f(x) = f(x_0)$, $x \in E$, completando a demonstração do resultado. $\square$

Temos a

Definição 5.3.5 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em E .

Diremos que a função f é continuamente diferenciável em E se as funções f e $f' : E \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ forem contínuas em E , ou seja, para cada $x_0 \in E$ fixado, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \text{teremos} \quad \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m}, \|f'(x) - f'(x_0)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)} < \varepsilon. \quad (5.71)$$

O conjunto formado por todas as funções continuamente diferenciável em E tomando valores em $\mathbb{R}^m$ será denotado por $C^1(E; \mathbb{R}^m)$.

Observação 5.3.6 Será deixado como exercício para o leitor mostrar que $(C^1(E; \mathbb{R}^m), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde $+$ e $\cdot$ denotam a soma de funções e a multiplicação de uma função por um número real, respectivamente.

Com isto temos a seguinte caracterização dos elementos de $C^1(E; \mathbb{R}^m)$:

Teorema 5.3.3 Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função.

Então $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$ se, e somente se, a função f for contínua em E e existem e são contínuas todas as derivadas parciais (de 1.ª ordem) da função f em E .

Demonstração:

Suponhamos que $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$ e $x_0 \in E$.

Do Teorema (5.3.1) temos que existem todas as derivadas parciais (de 1.ª ordem) da função f em E .

Além disso, para $x_0 \in E$, se $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ e $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ e $x \in E$, de (5.44), segue que

$$\begin{aligned} [f'(x)\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k &\stackrel{(5.44)}{=} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \vec{u}_i \right] \bullet \vec{u}_k \\ &\stackrel{\text{Prop. produto interno}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) (\underbrace{\vec{u}_i \bullet \vec{u}_k}_{=1}) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x). \\ &= \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0) = [f'(x)\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k - [f'(x_0)\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k = [f'(x)\vec{e}_j - f'(x_0)\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k,$$

assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0) \right| &= | [f'(x)\vec{e}_j - f'(x_0)\vec{e}_j] \bullet \vec{u}_k | \stackrel{\text{Des. Cauchy Schwarz}}{\leq} \|f'(x)\vec{e}_j - f'(x_0)\vec{e}_j\| \underbrace{\|\vec{u}_k\|}_{=1} \\ &\leq \| [f'(x) - f'(x_0)] \vec{e}_j \| \leq \|f'(x) - f'(x_0)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)} \underbrace{\|\vec{e}_j\|}_{=1} \\ &= \|f'(x) - f'(x_0)\|_{L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, a função $f' : E \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é contínua em E segue, da desigualdade acima, que todas as derivadas parciais (de 1.ª ordem) da função f serão contínuas em E .

Notemos que basta mostrar que a recíproca vale para $m = 1$.

De fato, pois se para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ a função $\underline{f}_i$, i -ésima componente da função $\underline{f}$, pertence a $C^1(E; \mathbb{R})$ segue que $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$.

Deixaremos a verificação desta afirmação como exercício para o leitor.

Suponhamos que todas as derivadas parciais (de 1.ª ordem) da função $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ sejam contínuas em E .

Sejam $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$.

Como o conjunto E é aberto em $\mathbb{R}^n$ deverá existir $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0; \delta) \subseteq E.$$

Por hipótese, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, a função $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ é contínua em x_0 .

Logo podemos encontrar $\delta_j \in (0, \delta)$ tal que, se

$$x \in B(x_0; \delta_j), \quad \text{teremos} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Assim, considerando-se

$$\delta_0 \doteq \min\{\delta, \delta_j; j \in \{1, \dots, n\}\},$$

segue que, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, se

$$x \in B(x_0; \delta_0), \quad \text{teremos} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \quad (5.72)$$

Seja $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\| < \delta_0$, com

$$h = \sum_{i=1}^n h_i \tilde{e}_i,$$

onde $\beta_n \doteq \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ é base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Notemos que

$$\|(x_0 + h) - x_0\| = \|h\| < \delta_0,$$

assim $x_0 + h \in B(x_0; \delta_0) \subseteq E$.

Consideremos, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{v}_0 \doteq \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{v}_k \doteq h_1 \tilde{e}_1 + \dots + h_k \tilde{e}_k = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (5.73)$$

Com isto teremos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &\stackrel{\vec{v}_n = h \text{ e } \vec{v}_0 = \vec{0}}{=} f(x_0 + \vec{v}_n) - f(x_0 + \vec{v}_0) \\ &\stackrel{\text{soma telescópica}}{=} [f(x_0 + \vec{v}_1) - f(x_0 + \underbrace{\vec{v}_0}_{=\vec{0}})] + [f(x_0 + \vec{v}_2) - f(x_0 + \vec{v}_1)] \\ &\quad + \dots + [f(x_0 + \vec{v}_{n-1}) - f(x_0 + \vec{v}_{n-2})] + [f(x_0 + \vec{v}_n) - f(x_0 + \vec{v}_{n-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_0 + \vec{v}_j) - f(x_0 + \vec{v}_{j-1})]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, notemos que

$$\|\vec{v}_k\| \stackrel{(5.73)}{=} \sqrt{h_1^2 + \dots + h_k^2} \leq \sqrt{h_1^2 + \dots + h_k^2 + h_{k+1}^2 + \dots + h_n^2} = \|h\| < \delta_0.$$

Como a bola aberta $B(x_o; \delta_o)$ é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, segue que o segmento de reta de extremos $x_o + \vec{v}_{j-1}$ e $x_o + \vec{v}_j$ estará contido em $B(x_o; \delta_o)$.

Observemos que, para cada $j \in \{1, \dots, n-1\}$, segue que

$$\vec{v}_j = (h_1, \dots, h_j, 0, \dots) = (h_1, \dots, h_{j-1}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots) = \vec{v}_{j-1} + h_j \vec{e}_j.$$

Suponhamos que $h_j > 0$ (o caso $h_j \leq 0$ é semelhante e será deixado como exercício para o leitor) e consideremos a função $g_j : [0, h_j] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_j(t) \doteq f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t \vec{e}_j), \quad t \in [0, h_j].$$

Notemos que o traço da curva parametrizada

$$t \mapsto x_o + \vec{v}_{j-1} + t \vec{e}_j, \quad t \in [0, h_j]$$

é o segmento de reta que liga o ponto $x_o + \vec{v}_{j-1} + 0 \cdot \vec{e}_j = x_o + \vec{v}_{j-1}$ ao ponto $x_o + \overbrace{\vec{v}_{j-1} + h_j \cdot \vec{e}_j}^{=\vec{v}_j} = x_o + \vec{v}_j$ e que está contido em $B(x_o; \delta_o)$, deste modo a função $\underline{g}$ será a restrição da função $\underline{f}$ a esse segmento de reta.

Observemos também que se $t_o \in (0, h_j)$, teremos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t + t_o) - g(t_o)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[x_o + \vec{v}_{j-1} + (t + t_o)\vec{e}_j] - f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \vec{e}_j)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f[(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \vec{e}_j) + t \vec{e}_j] - f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \vec{e}_j)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \vec{e}_j), \end{aligned} \quad (5.75)$$

ou seja, a função $\underline{g}$ será diferenciável em $t_o \in [0, h_j]$ e

$$g'_j(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + t_o \vec{e}_j). \quad (5.76)$$

Como, por hipótese, as derivadas parciais são contínuas em E segue que a função $\underline{g}$ será continuamente diferenciável em $[0, h_j]$.

Assim podemos aplicar o Teorema do Valor Médio à função $\underline{g}$ no intervalo $[0, h_j]$ e assim obter $\theta_j \in [0, h_j]$ tal que

$$\begin{aligned} \overbrace{f(x_o + \vec{v}_{j-1} + h_j \vec{e}_j)}^{=\vec{v}_j} - \overbrace{f(x_o + \vec{v}_{j-1} + 0 \cdot \vec{e}_j)}^{=\vec{v}_{j-1}} &= \overbrace{g_j(h_j)}^{g_j(h_j)} - \overbrace{g_j(0)}^{g_j(0)} = g'_j(\theta_j) h_j \stackrel{(5.76)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j) h_j, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x_o + \vec{v}_j) - f(x_o + \vec{v}_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j) h_j. \quad (5.77)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right| &\stackrel{(5.74)}{=} \left| \sum_{j=1}^n [f(x_0 + \vec{v}_j) - f(x_0 + \vec{v}_{j-1})] - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j \right| \\
 &\stackrel{(5.77)}{=} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j) h_j - \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right|}_{\| (x_0 + \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j) - x_0 \| = \| \vec{v}_{j-1} + \theta_j \vec{e}_j \| \leq \| h \| < \delta_0, \text{ logo } (5.72)} \underbrace{|h_j|}_{\leq \| h \|} \stackrel{\frac{\varepsilon}{n}}{\leq} \frac{\varepsilon}{n} \| h \| \\
 &< \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{n} \| h \| = \frac{\varepsilon}{n} \| h \| n < \varepsilon \| h \|, \tag{5.78}
 \end{aligned}$$

ou seja, se considerarmos a transformação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(h) \doteq \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j,$$

onde $h \doteq \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$, segue, de (5.78), que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)|}{\|h\|} = 0,$$

mostrando que a função f é diferenciável em $x_0 \in E$.

Portanto a função f será diferenciável em E e além disso

$$f'(x)h = A(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j, \tag{5.79}$$

onde $h = \sum_{i=1}^n h_i \vec{e}_i$.

Se $t_0 = 0$ ou $t_0 = h_j$ teremos algo semelhante trocando-se o limite (5.75) pelos respectivos limites laterais.

Deixaremos os detalhes destes dois casos como exercício para o leitor.

Como, por hipótese, as derivadas parciais da função f são contínuas em E segue, de (5.79), que a função f' será contínua em E , ou seja, $f \in C^1(E; \mathbb{R})$, completando a demonstração. $\square$

5.4 Ponto fixo de uma função

Nosso objetivo nesta seção é exibirmos um resultado que garante a existência de um, único, ponto fixo de uma função "especial" definida em um espaço métrico "especial".

Para isto começaremos pela

Definição 5.4.1 *Sejam X um conjunto não vazio, $x_0 \in X$ e $f : X \rightarrow X$ uma função.*

Diremos que x_0 é um ponto fixo da função f se

$$f(x_0) = x_0.$$

Para exibir um resultado importante para a existência e unicidade de ponto fixo de uma aplicação precisaremos da

Definição 5.4.2 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma função.*

Diremos que a função f é uma contração em X se existir $c \in [0, 1)$ tal que

$$d[f(x), f(y)] \leq c d(x, y), \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Observação 5.4.1 *Toda contração é uma função contínua.*

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos o Teorema do ponto fixo de Banach:

Teorema 5.4.1 *Sejam (X, d) é um espaço métrico completo e a função $f : X \rightarrow X$ é um contração em X .*

Então existe um, e somente um, ponto fixo da função f .

Demonstração:

Começaremos provando a unicidade:

Para isto suponhamos que $x_1, x_2 \in X$ são pontos fixos da função f , ou seja

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = x_2.$$

Então

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\stackrel{f(x_1)=x_1, f(x_2)=x_2}{=} d[f(x_1), f(x_2)] \stackrel{f \text{ é contração}}{\leq} c d(x_1, x_2) \Rightarrow 0 \leq \underbrace{(1-c)}_{>0} d(x_1, x_2) \leq 0 \\ &\Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

mostrando a unicidade do ponto fixo da função f .

Mostremos agora a existência do ponto fixo da função f .

Seja $x_0 \in X$ qualquer.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$x_n = f(x_{n-1}). \tag{5.80}$$

Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$d(x_{n+1}, x_n) \stackrel{(5.80)}{=} d[f(x_n), f(x_{n-1})] \stackrel{f \text{ é contração}}{\leq} c d(x_n, x_{n-1}),$$

com isto, por indução, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.81}$$

Logo, se $m > n$ segue que

$$\begin{aligned}
 d(x_m, x_n) &\stackrel{\text{Des. triangular}}{\leq} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) = \sum_{i=n+1}^m d(x_i, x_{i-1}) \\
 &\stackrel{(5.81)}{\leq} (c^n + c^{n-1} + \cdots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) = c^n (1 + c + \cdots + c^{m-n-1}) d(x_1, x_0) \\
 &= c^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-c}.
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Como $c \in [0, 1)$, segue que a sequência numérica $(c^n)_{n \in \mathbb{N}}$ será convergente para zero, ou seja, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uma sequência de Cauchy em X .

Mas (X, d) é um espaço métrico completo, logo existe o limite

$$x \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X.$$

Como a função f é uma contração em X , segue que ela será uma função contínua em X , assim

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \stackrel{f \text{ é contínua}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x, \tag{5.83}$$

ou seja, $f(x) = x$, portanto a função f tem um único ponto fixo em X , completando a demonstração do resultado. □

Observação 5.4.2 A demonstração acima nos fornece um modo de encontrar o ponto fixo da função f .

Basta escolher $x_0 \in X$ qualquer e encontrar o limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X , onde

$$x_n \doteq f^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

notando que:

$$f^n \doteq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-fatores}}.$$

5.5 O Teorema da função inversa

Nesta seção utilizaremos o Teorema do ponto fixo de Banach para provar um resultado sobre a contínua diferenciabilidade da função inversa (local) associada a uma função continuamente diferenciável e "bem comportada", mais precisamente:

Teorema 5.5.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ e $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ tal que $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ seja um operador linear inversível e $y_0 \doteq f(x_0)$.*

Então

1. *existem subconjuntos $U = U(x_0) \subseteq E$ e $V = V(y_0)$ abertos em $\mathbb{R}^n$, contendo x_0 e y_0 , respectivamente, tais que $f : U \rightarrow V$ é bijetora (ou seja, a função f admite uma função inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$, localmente em x_0).*
2. *Além disso temos que $f^{-1} \in C^1(V; \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração:De 1.:

Seja

$$A \doteq f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n).$$

Como $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear inversível, segue que $\|A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \neq 0$.

Assim podemos considerar

$$\lambda \doteq \frac{1}{2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}} > 0. \quad (5.84)$$

Como a função f é contínua em x_0 e o conjunto E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, podemos encontrar $r > 0$ tal que $\overline{B(x_0; r)} \subseteq E$ e se

$$x \in \overline{B(x_0; r)}, \quad \text{teremos} \quad \|f'(x) - \underbrace{f'(x_0)}_{=A}\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \lambda. \quad (5.85)$$

Afirmamos que a função f é injetora em $U \doteq B(x_0; r)$.

De fato, para cada $y \in E$ fixado, consideremos a função $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi_y(x) \doteq x + A^{-1}[y - f(x)], \quad x \in E. \quad (5.86)$$

Notemos que:

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{tal que} \quad y = f(x)$$

se, e somente se,

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{tal que} \quad y - f(x) = \vec{0},$$

ou, é equivalente, a

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{tal que} \quad A^{-1}[y - f(x)] = \vec{0},$$

ou ainda,

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{tal que} \quad x + A^{-1}[y - f(x)] = x$$

ou, equivalentemente,

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{tal que} \quad \varphi_y(x) = x,$$

ou ainda,

$$\text{existe único } x \in U \quad \text{ponto fixo da função } \varphi_y. \quad (5.87)$$

Portanto a função f é injetora em U se, e somente se, (5.87) ocorre.

Mostremos que (5.87) ocorre.

Para isto, observemos que $\varphi_y \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ (pois $f, A \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$) e além disso (verifique!)

$$\varphi'_y(x) = I_n - A^{-1} \circ f'(x), \quad x \in E,$$

onde $I_n \in L(\mathbb{R}^n)$ denota o operador identidade em $\mathbb{R}^n$.

Logo, da Proposição (5.1.1) item 3. (isto é (5.3)), se $x \in \overline{B(x_0; r)}$, segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi'_y(x)\|_{L(\mathbb{R}^n)} &= \|I - A^{-1} \circ [f'(x)]\|_{L(\mathbb{R}^n)} = \|A^{-1} \circ [A - f'(x)]\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\ &\stackrel{(5.3)}{\leq} \underbrace{\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\stackrel{(5.84)}{=} \frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|A - f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\stackrel{(5.85)}{<} \lambda} = \frac{1}{2\lambda} \lambda = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Logo se $x_1, x_2 \in \overline{B(x_0; r)}$, do Corolário (5.3.1), podemos concluir que

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \quad (5.88)$$

Assim, se $y_1 \in B(f(x_0); r\lambda)$, teremos:

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x_0) - x_0\| &= \|(x_0 + A^{-1}[y_1 - f(x_0)]) - x_0\| = \|A^{-1}[y_1 - f(x_0)]\| \\ &\leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{(5.84) \frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|y_1 - f(x_0)\|}_{y_1 \in B(f(x_0); r\lambda) < r\lambda} < \frac{1}{2\lambda} r\lambda = \frac{1}{2} r. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Portanto, se $x \in \overline{B(x_0; r)}$, segue que:

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x) - x_0\| &= \|[\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)] + [\varphi_y(x_0) - x_0]\| \\ &\leq \underbrace{\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\|}_{(5.88) \leq \frac{1}{2} \|x - x_0\| < \frac{1}{2} r} + \underbrace{\|\varphi_y(x_0) - x_0\|}_{(5.89) < \frac{1}{2} r} < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r, \end{aligned} \quad (5.90)$$

ou seja, (5.90) mostra que $\varphi_y : \overline{B(x_0; r)} \rightarrow \overline{B(x_0; r)}$ e (5.88) que esta função será uma contração em $\overline{B(x_0; r)}$, que é um espaço métrico completo (pois um subconjunto fechado de um espaço métrico completo será um espaço métrico completo - verifique!).

Portanto o Teorema de ponto fixo de Banach (isto é, o Teorema (5.4.1)) garante que existe um único ponto fixo da função φ_y em $\overline{B(x_0; r)}$, isto é, existe um único $\bar{x} \in \overline{B(x_0; r)}$ tal que $\varphi_y(\bar{x}) = \bar{x}$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $\bar{x} \in B(x_0; r)$ (basta aplicar o procedimento acima para $r' \in (0, r)$, se necessário).

Assim, de (5.87), segue que a função f será injetora em U .

Com isto temos que $f : U \rightarrow V$ será um função bijetora, onde

$$V \doteq f(U). \quad (5.91)$$

Logo, para cada $y \in V$, existe um único $x \in U$ tal que $f(x) = y$.

Para completar a demonstração do item 1., precisamos mostrar que o conjunto V é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Para isto, dado $y_1 \in V$ sejam $x_1 \in U$ e $r_0 \in (0, r)$ tal que $\overline{B(x_1; r_0)} \subseteq U = B(x_0; r)$.

Afirmamos que se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\|y - y_1\| < \lambda r_0, \quad \text{então deveremos ter } y \in V. \quad (5.92)$$

Em particular, teremos que V será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ (pois se $y_1 \in V$, da desigualdade acima, teremos que $B(y_1; r_0\lambda) \subseteq V$).

Mostremos a afirmação (5.92).

Para isto, suponhamos que $y \in E$ satisfaz $\|y - y_1\| < \lambda r_0$, ou seja, $y \in B(y_1; r_0\lambda)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x_1) - x_1\| &= \|(x_1 + A^{-1}[y - f(x_1)]) - x_1\| = \|A^{-1}\left[y - \underbrace{f(x_1)}_{=y_1}\right]\| \\ &\leq \|A^{-1}(z)\| \leq \|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)} \|z\| \\ &\stackrel{(5.84)}{=} \frac{1}{2\lambda} \underbrace{\|y - y_1\|}_{y \in B(y_1; r_0\lambda) < r_0\lambda} < \frac{1}{2\lambda} r_0\lambda = \frac{1}{2} r_0. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Assim, se $x \in \overline{B(x_1; r_0)}$, teremos:

$$\begin{aligned} \|\varphi_y(x) - x_1\| &= \|[\varphi_y(x) - \varphi_y(x_1)] + [\varphi_y(x_1) - x_1]\| \\ &\leq \underbrace{\|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_1)\|}_{\substack{(5.88) \text{ em } B(x_1; r_0) \\ \leq \frac{1}{2}\|x - x_1\| < \frac{1}{2}r_0}} + \underbrace{\|\varphi_y(x_1) - x_1\|}_{(5.93) \frac{1}{2}r_0} < \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_0 = r_0, \end{aligned} \quad (5.94)$$

ou seja, de (5.94), podemos concluir que $\varphi_y : \overline{B(x_1; r_0)} \rightarrow \overline{B(x_1; r_0)}$.

Assim a função acima será uma contração em $\overline{B(x_1; r_0)}$, que é um espaço métrico completo.

Logo, do Teorema de Banach, existe um único $x \in \overline{B(x_1; r_0)} \subseteq B(x_0; r)$ tal que $f(x) = y$, mostrando que $y \in f(U) = V$, completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Como V é aberto em $\mathbb{R}^n$, dado $y \in V$ existirá $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $y + k \in V$.

Do item 1., segue que existem $x, x_k \in U$ tais que

$$f(x) = y \quad \text{e} \quad f(x_k) = y + k.$$

Se considerarmos

$$h \doteq x_k - x,$$

da identidade acima segue que

$$f(x) = y \quad \text{e} \quad f(x + h) = y + k. \quad (5.95)$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi_y(x + h) - \varphi_y(x) &= \left\{ (x + h) + \overbrace{A^{-1}[y - f(x + h)]}^{=A^{-1}(y) + A^{-1}\{f(x+h)\}} \right\} - \left\{ x + \overbrace{A^{-1}[y - f(x)]}^{=A^{-1}(y) + A^{-1}\{f(x)\}} \right\} \\ &= h + A^{-1} \left[\underbrace{\underbrace{f(x)}_{=y} - \underbrace{f(x+h)}_{=y+k}}_{=-k} \right] = h - A^{-1}(k), \end{aligned}$$

o que implicará que

$$\|\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)\| = \|h - A^{-1}(k)\| \geq \|h\| - \|A^{-1}(k)\|. \quad (5.96)$$

Por outro lado, de (5.88), segue que

$$\|\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)\| \stackrel{x, x+h \in U, \text{ logo } (5.88)}{\leq} \frac{1}{2} \|(x + h) - x\| = \frac{1}{2} \|h\|. \quad (5.97)$$

Logo, de (5.96) e (5.97), teremos:

$$\|h\| - \|A^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2} \|h\| \quad \Rightarrow \quad \|h\| \leq 2\|A^{-1}(k)\| \leq \underbrace{2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{(5.84) \frac{1}{\lambda}} \|k\| = \frac{1}{\lambda} \|k\|,$$

$$\|h\| \leq \frac{1}{\lambda} \|k\|, \quad \text{ou ainda,} \quad (5.98)$$

$$\frac{1}{\|k\|} \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\|h\|}. \quad (5.99)$$

Notemos que

$$1 \stackrel{(5.85)}{>} \frac{1}{\lambda} \|f'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \stackrel{(5.84)}{=} 2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)} \|f'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)} \|f'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, para cada $x \in U$, do Teorema (5.1.1) item 1., segue que, o operador linear $f'(x)$ admite inversa (ou seja, será um operador linear inversível) que, por simplicidade, denotaremos de T (ou sejam $T \doteq [f'(x)]^{-1}$).

Denotemos a função inversa associada a função $f: U \rightarrow V$ por g (isto é, $g \doteq f^{-1}$).

Como isto teremos:

$$g(y+k) - g(y) - T(k) \stackrel{(5.95)}{=} (x+h) - x - T(k) = \underbrace{h}_{=T[f'(x)(h)]} - T(\underbrace{k}_{\stackrel{(5.95)}{=} f(x+h)-f(x)})$$

$$T \text{ é op. linear } T[f'(x)(h) - f(x+h) + f(x)]$$

$$= -T[f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)]. \quad (5.100)$$

Logo,

$$\frac{\|g(y+k) - g(y) - T(k)\|}{\|k\|} \stackrel{(5.100)}{\leq} \underbrace{\frac{1}{\|k\|}}_{\stackrel{(5.99)}{\leq} \frac{1}{\lambda \|k\|}} \| -T[f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)] \|$$

$$\stackrel{\|T(z)\| \leq \|T\|_{L(\mathbb{R}^n)} \|z\|}{\leq} \|T\|_{L(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\lambda} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|}. \quad (5.101)$$

Portanto quando $k \rightarrow \vec{0}$, de (5.98), segue que $h \rightarrow \vec{0}$.

Assim, quando $k \rightarrow \vec{0}$, o lado direito de (5.101) vai para zero, pois a função f é diferenciável em x , implicando que a função $g = f^{-1}$ será diferenciável em $y = f(x) \in V$.

Além disso, de (5.101), segue que

$$(f^{-1})'(y) = g'(y) = T = [f'(x)]^{-1}, \quad y = f(x) \in V.$$

Notemos que a função g é contínua em V , pois é uma função diferenciável em V .

Como, por hipótese, a função $f': U \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ é contínua em U e a aplicação que leva um operador linear inversível no seu operador linear inverso é uma aplicação contínua na norma de $L(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorema (5.1.1) item 3.), segue que a função g' será contínua em V , mostrando que $f^{-1} = g \in C^1(V; U)$, completando a demonstração do resultado. □

Como consequência temos o

Corolário 5.5.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, Ω como no Teorema (5.1.1), $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ tal que $f'(x) \in \Omega$, para $x \in E$.*

Se $W \subseteq E$ é aberto em E então $f(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, ou seja, a aplicação f é uma aplicação aberta.

Demonstração:

Se $y \in f(W)$, existe $x \in W$ tal que $f(x) = y$.

Pelo item 1. do resultado acima existirá $U = U(x)$ subconjunto aberto contido em W tal que $y \in V \doteq f(U) \subseteq f(W)$ com $f(U)$ sendo um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Logo existe $\delta > 0$ tal que $B(y; \delta) \subseteq f(U) \subseteq f(W)$, em particular, $B(y; \delta) \subseteq f(W)$, mostrando que $f(W)$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, completando a demonstração do resultado. $\square$

5.6 Teorema da função implícita

Para finalizar enunciaremos e provaremos o Teorema da função implícita.

Antes porém faremos algumas observações e introduziremos algumas notações:

Observação 5.6.1

1. Sejam E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em E .

Suponhamos que $(x_0, y_0) \in E$ é tal que

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, no curso de Cálculo II, mostrou-se que existem vizinhanças de x_0 e y_0 , que denotemos por $U = U(x_0)$, $V = V(y_0)$, respectivamente, tal que $U \times V \subseteq E$ e uma função $y: U \rightarrow V$, diferenciável em U , de modo que

$$f[x, y(x)] = 0, \quad x \in U,$$

ou seja, podemos obter na equação

$$f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in E,$$

y como função de x , em um vizinhança de (x_0, y_0) , ou ainda, o gráfico da equação acima pode ser obtido como o gráfico de uma função de x , em um vizinhança de (x_0, y_0) , contida em E .

2. Se a hipótese $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ falhar a conclusão pode ser falsa, como mostra o seguinte exemplo:

Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

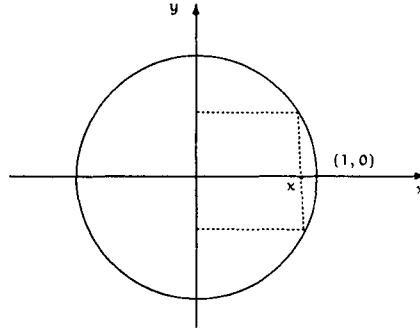
$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que a função $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e

$$f(1, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 \cdot 0 = 0$$

e não existe nenhuma vizinhança de $(x_0, y_0) \doteq (1, 0)$ de modo que possamos escrever $y = y(x)$ em uma vizinhança do ponto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ (veja figura abaixo)

$$f[x, y(x)] = 0.$$



3. Na situação do item 1., se $(x_0, y_0) \in E$ é tal que

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, no curso de Cálculo II, mostrou-se que existem vizinhanças de x_0 e y_0 , que denotaremos por $U = U(x_0)$, $V = V(y_0)$, respectivamente, tal que $U \times V \subseteq E$ e uma função $x : V \rightarrow U$, diferenciável em V de modo que

$$f[x(y), y] = 0, \quad y \in V,$$

ou seja, podemos obter na equação

$$f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in E,$$

x como função de y , em um vizinhança de (x_0, y_0) contida em E .

4. A seguir exibiremos uma versão mais geral do resultado acima, apresentado no curso de Cálculo II,, bem como sua demonstração.

5. No enunciado e na demonstração deste resultado que virá a seguir, utilizaremos a seguinte notação:

Se $x \doteq (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \doteq (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ então

$$(x, y) \doteq (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Se $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ então podemos decompor a transformação linear A em duas transformações lineares, que denotaremos por: $A_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$A_x(h) \doteq A(h, O_m), \quad h \in \mathbb{R}^n, \quad (5.102)$$

$$A_y(k) \doteq A(O_n, k), \quad k \in \mathbb{R}^m, \quad (5.103)$$

onde

$$O_n \doteq (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad O_m \doteq (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

De fato, para $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$, teremos:

$$\begin{aligned} A(h, k) &= A[(h, O_m) + (O_n, k)] \stackrel{A \text{ é transf. linear}}{=} A(h, O_m) + A(O_n, k) \\ &= A_x(h) + A_y(k). \end{aligned} \quad (5.104)$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $A_x \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $A_y \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$.

6. Notemos também que

$$\|A_x(h)\| = \|A(h, O_m)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \overbrace{\|(h, O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}^{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \|h\|_{\mathbb{R}^n}.$$

7. De modo semelhante temos

$$\|A_y(k)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n}; \mathbb{R}^n)} \|k\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Com isto podemos enunciar e demonstrar um Teorema da função implícita para transformações lineares, mais precisamente:

Proposição 5.6.1 *Seja $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ tal que $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear inversível. Então para cada $k \in \mathbb{R}^m$, existe um único $h \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$A(h, k) = O_n. \quad (5.105)$$

Além disso

$$h = -A_x^{-1} [A_y(k)]. \quad (5.106)$$

Demonstração:

Observemos que para cada $k \in \mathbb{R}^m$ temos que

$$A(h, k) = O_n \stackrel{(5.104)}{\Leftrightarrow} A_x(h) + A_y(k) = O_n \stackrel{\text{existe } A_x^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)}{\Leftrightarrow} h = -A_x^{-1} [A_y(k)],$$

completando a demonstração. □

Observação 5.6.2 *O resultado acima nos diz que, para cada $k \in \mathbb{R}^m$, na equação*

$$A(h, k) = O_n$$

podemos obter $h \in \mathbb{R}^n$, de modo único, em função de k , ou seja, $h = h(k)$.

Além disso, essa função será linear em k , como descrita em (5.106).

Podemos agora enunciar e demonstrar um Teorema da função implícita que estende o que foi exibido nos cursos de Cálculo II, mais precisamente:

Teorema 5.6.1 *Sejam E um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$, $(x_0, y_0) \in E$, $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ e $A \doteq f'(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$.*

Suponhamos que

$$f(x_0, y_0) = O_n$$

e que $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$, dada por (5.102), seja um operador linear inversível.

Então existe subconjunto aberto $U \doteq U(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^{n+m}$, contendo (x_0, y_0) , um subconjunto aberto $W = W(y_0) \subseteq \mathbb{R}^m$, contendo y_0 , tal que para todo $y \in W$ existe um, único, $x \in \mathbb{R}^n$ de modo que

$$(x, y) \in U \quad \text{e} \quad f(x, y) = O_n, \quad (5.107)$$

ou seja, existe uma função $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

1. $g(y_0) = x_0$;

2. para $y \in W$, temos $(g(y), y) \in U$;

3. para $y \in W$ temos que

$$f(g(y), y) = O_n.$$

Além disso, $g \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$ e

$$g'(y_0) = -A_x^{-1} \circ A_y. \quad (5.108)$$

Demonstração:

Definamos a função $F: E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$F(x, y) \doteq (f(x, y), y), \quad (x, y) \in E. \quad (5.109)$$

Notemos que

$$F(x_0, y_0) = (\overbrace{f(x_0, y_0)}^{=O_n}, y_0) = (O_n, y_0).$$

Como $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ segue que $F \in C^1(E; \mathbb{R}^{n+m})$ (pois suas funções componentes são funções continuamente diferenciáveis em E).

Além disso temos que

$$F'(x_0, y_0)(h, k) = (A(h, k), k). \quad (5.110)$$

De fato, notemos que como a função f é diferenciável em (x_0, y_0) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - \overbrace{f(x_0, y_0)}^{=O_n} - A(h, k)}{\|(h, k)\|} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - A(h, k)}{\|(h, k)\|}, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - \overbrace{f(x_0, y_0)}^{=O_n} = A(h, k) + r(h, k), \quad (5.111)$$

onde

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (5.112)$$

Logo

$$\begin{aligned} F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) &= (f(x_0 + h, y_0 + k), y_0 + k) - \left(\overbrace{f(x_0, y_0)}^{=O_n}, y_0 \right) \\ &= (f(x_0 + h, y_0 + k), k) \stackrel{(5.111)}{=} (A(h, k) + r(h, k), k) \\ &= (A(h, k), k) + (r(h, k), O_m). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\|F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) - (A(h, k), k)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h, k)\|} &\stackrel{(5.113)}{=} \frac{\|(r(h, k), O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h, k)\|} \\ &= \frac{\|r(h, k)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|(h, k)\|} \stackrel{(5.112)}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Portanto vale (5.110).

Notemos que

$$\begin{aligned} \overbrace{F'(x_0, y_0)}^{=(O_n, O_m)}(h, k) &= F'(x_0, y_0)(h, k) = (A(h, k), k) \Rightarrow \begin{cases} k = O_m \\ O_n = A(h, O_m) = A_x(h) \end{cases} \quad A_x \text{ é inversível} \Rightarrow h = O_n \\ \Rightarrow (h, k) &= (O_n, O_m) = O, \end{aligned}$$

ou seja, o operador linear $F'(x_0, y_0)$ é injetor e portanto bijetor (pois é um operador linear), logo $F'(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ será um operador linear inversível.

Logo podemos aplicar o Teorema da função inversa à função F (ver Teorema (5.5.1)) e com isto poderemos obter um subconjunto aberto $U = U(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ e um subconjunto aberto $V = V(F(x_0, y_0)) = V(O_n, y_0) \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, de modo que a função $F: U \rightarrow V$ será bijetora e $F^{-1} \in C^1(U; V)$.

Seja

$$W \doteq \{y \in \mathbb{R}^m; (O_n, y) \in V\}.$$

Observemos que $y_0 \in W$, pois $(O_n, y_0) \in V$.

Além disso W é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ pois a função $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$i(y) \doteq (O_n, y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ e como V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$ segue que $W = i^{-1}(V)$ será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ (onde i^{-1} denota a imagem inversa associada a função i).

Notemos que se $y \in W$ segue que existe $(x, y) \in U$ tal que

$$F(x, y) = (O_n, y),$$

pois a função $F: U \rightarrow V$ é bijetora.

Mas

$$(O_n, y) = F(x, y) = (f(x, y), y) \Rightarrow f(x, y) = O_n,$$

ou seja, para cada $y \in W$ existe, pelo menos um, x tal que $(x, y) \in W$ e $f(x, y) = O_n$.

Afirmamos que tal x é único.

De fato, suponhamos que $(x', y) \in U$ é tal que

$$f(x, y) = O_n = f(x', y).$$

Logo

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y) \quad F \text{ é injetora em } U \Rightarrow x' = x.$$

Com isto podemos concluir que para $y \in W$ existe um único $x = x(y)$ tal que

$$f(x(y), y) = O_n,$$

completando a demonstração da 1.a parte do resultado.

Para a 2.a parte, consideremos a função $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(y) \doteq x, \quad \text{para } y \in W, \quad (5.114)$$

onde x é o único elemento em W tal que $(x, y) \in U$ e $f(x, y) = O_n$ (obtido na 1.a parte).

Com isto teremos

$$F(g(y), y) = F(x, y) = \underbrace{(f(x, y), y)}_{=O_n} = (O_n, y), \quad y \in W.$$

Se $G \doteq F^{-1} : V \rightarrow U$ então, do Teorema da função inversa (ver Teorema (5.5.1)), segue que $G \in C^1(V; U)$.

Mas

$$F(g(y), y) = (O_n, y) \stackrel{G=F^{-1}}{=} F(G(O_n, y)), \quad y \in W$$

e como a função F é injetora em U , segue que

$$(g(y), y) = G(O_n, y), \quad y \in W.$$

Logo se considerarmos as funções $\Pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por (é uma transformação linear, logo pertence a $C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$)

$$\Pi_1(x, y) \doteq x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

e $H : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por (é uma transformação linear, logo pertence a $C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^{n+m})$)

$$H(x, y) \doteq (O_n, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

segue que

$$g(y) = [\Pi_1 \circ G \circ H](x, y), \quad (x, y) \in V.$$

Como $G \in C^1(V; W)$, $\Pi_1 \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ e $H \in C^1(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^{n+m})$ segue que $g \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$.

Para finalizar, precisamos mostrar (5.108).

Para isto, observemos que se considerarmos a função $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$\varphi(y) \doteq (g(y), y), \quad y \in W,$$

segue que $\varphi \in C^1(W; \mathbb{R}^{n+m})$ e para $y \in W$ teremos (como em (5.110))

$$\varphi'(y)(k) = (g'(y)(k), k), \quad k \in \mathbb{R}^m.$$

Notemos que, para $y = y_0$, teremos

$$\varphi(y_0) = \underbrace{(g(y_0), y_0)}_{=x_0} = (x_0, y_0). \quad (5.115)$$

Como

$$f[\varphi(y)] = f(g(y), y) = O_n, \quad y \in W$$

segue, da Regra da cadeia, que

$$[f'[\varphi(y)] \circ \varphi'(y)](k) = O_n \quad k \in \mathbb{R}^m. \quad (5.116)$$

Mas

$$f'[\varphi(y_0)] \stackrel{(5.115)}{=} f'(x_0, y_0) = A,$$

e assim, de (5.116), teremos

$$[A \circ \varphi'(y_0)](k) = O_n, \quad k \in \mathbb{R}^m,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 O_n &= A[\underbrace{\varphi'(y_0)k}_{=(g'(y_0)(k), k) = (g'(y_0)(k), O_m) + (O_n, k)}] \\
 A \text{ é oper. linear} \quad A[g'(y_0)(k), O_m] + A[(O_n, k)] &= A[g'(y_0)(k), O_m] + A[(O_n, k)] \\
 &= A_x[g'(y_0)k] + A_y(k) \Rightarrow [A_x \circ g'(y_0) + A_y](k) = O_n \\
 \stackrel{\text{existe } A_x^{-1}}{\Rightarrow} g'(y_0)(k) &= -[A_x^{-1} \circ A_y](k),
 \end{aligned}$$

mostrando (5.108) e completando a demonstração do resultado. □

Observação 5.6.3 Em termos das componentes da função f e da função g a expressão (5.108) tornar-se-á a seguinte:

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k \in \{1, \dots, m\}$ teremos:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, y_0) \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y_0) = -\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_0, y_0),$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Para ver isto, basta notar que

$$\begin{aligned}
 [A_x] &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0, y_0) \right)_{n \times n}, \\
 [g'(x_0, y_0)] &= \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) \right)_{n \times m} \\
 [A_y] &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_0, y_0) \right)_{n \times m},
 \end{aligned}$$

e assim $[A_x][g'(y_0)] = -[A_y]$, que nos fornecerá a expressão acima.

Para finalizar consideremos o seguinte exercício:

Exercício 5.6.1 Seja $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$f = (f_1, f_2),$$

onde $f_1, f_2: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &\doteq 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3, \\
 f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &\doteq x_2 \cos(x_1) - 6x_1 + 2y_1 - y_3, \quad (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^5.
 \end{aligned}$$

Observemos que se

$$X_0 \doteq (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad Y_0 \doteq (3, 2, 7) \in \mathbb{R}^3$$

então

$$\begin{aligned}
 f_1(X_0, Y_0) &= f_1(0, 1, 3, 2, 7) = 2e^0 + 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 3 = 0, \\
 f_2(X_0, Y_0) &= f_2(0, 1, 3, 2, 7) = 1 \cdot \cos(0) - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 7 = 0,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(X_0, Y_0) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Notemos também que

$$[f'(X_0, Y_0)] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[A_x] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad [A_y] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, a matriz $[A_x]$ é inversível (pois $\det[A_x] = 2+18 = 20 \neq 0$) logo, pelo Teorema da função implícita, existem vizinhanças de X_0 e Y_0 , que denotaremos por $U = U(X_0)$ e $V = V(Y_0)$, respectivamente, e uma função $g: V \rightarrow U$ de pertence a $C^1(V; U)$, que satisfaz:

$$g(Y_0) = X_0, \quad \text{isto é,} \quad g(3, 2, 7) = (0, 1),$$

$$f(g(y), y) = (0, 0), \quad y \in U$$

e

$$[g'(Y_0)] = -A_x^{-1} A_y \stackrel{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

5.7 Exercícios

5.8 Bibliografia

Rudin, W. - *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, (1976).

Lima, E. L. - *Curso de Análise - Vol.1 e 2*, Projeto Euclides, IMPA, (1987).