



I.C.M.S.C.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
CAMPUS DE SÃO CARLOS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

COBORDISMO NORMAL E  
APLICAÇÕES

*D. Randall e J. Daccach*

n.º 1

Notas Didáticas do ICMSC - USP

**COBORDISMO NORMAL E  
APLICAÇÕES**

*D. Randall e J. Daccach*

n.<sup>o</sup> 1

**SÃO CARLOS/SP/BRASIL  
setembro/1988**

*Estas notas foram baseadas em um mini-curso ministrado pelo Prof. Duane Randall no verão de 1988 no ICMSC-USP, com apoio financeiro da FINEP.*

*Queremos agradecer à FINEP pelo apoio financeiro e ao Sr. Luiz Carlos Franco pelo excelente trabalho de datilografia.*

## I N D I C E

### CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO ..... 1

### CAPÍTULO II

ÁLGEBRA LINEAR DE FIBRADOS ..... 9

### CAPÍTULO III

O TEOREMA PRINCIPAL ..... 29

REFERÊNCIAS ..... 53

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Um dos resultados fenomenais deste século é o teorema Hopf que estabelece condição necessária e suficiente para que uma variedade  $C^\infty$  compacta  $M$  sem bordo admita um campo de vetores não nulos. Precisamente, esta condição necessária e suficiente é o anulamento da característica de Euler da variedade.

De uma forma não tão geral quanto esta existem também condições necessárias e suficientes para a existência de  $k$ -campos L.I. em cada ponto de  $M$ .

A existência de  $k$ -campos L.I. numa variedade estabelece a seguinte equação de fibrados vetoriais:

$$\tau M \cong \theta^{n-k} + \tilde{R}^k \quad \text{onde}$$

$\tilde{R}^k$  é o fibrado trivial vetorial sobre  $M$  de posto  $k$ , ou seja existe um monomorfismo

$$u : \tilde{R}^k \rightarrow \tau(M) .$$

Esta pequena introdução induz naturalmente ao seguinte problema:

Sejam  $\alpha^a$  e  $\beta^b$  fibrados vetoriais sobre uma variedade

dade  $C^\infty$ , compacta sem bordo e conexa onde  $a = \dim \alpha$ ,  $b = \dim \beta$  e suponhamos que  $a \leq b$ .

"Determine obstruções para que exista um monomorfismo  $u : \alpha \rightarrow \beta$ ".

U. Koschorke definiu um único elemento num certo grupo de bordismo normal que representa a obstrução total no caso em que  $2(b-a) > n$ .

Neste sentido a questão da existência de  $k$ -campos L.I. na variedade é equivalente a existência de um monomorfismo.

$$u : \mathbb{R}^k \rightarrow \tau(M)$$

Como outro exemplo podemos citar o Teorema de Hirsch:

Seja  $M \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}^{2n+1}$  uma imersão com fibrado normal  $\nu$ , então:

"Existe uma imersão  $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+a}$  com fibrado normal  $\alpha^a$  se e somente se

$$\nu \equiv \alpha^a + \mathbb{R}^{(n+1)-a} "$$

Nesta nova formulação então a existência de uma imersão com fibrado normal  $\alpha^a$  é equivalente à existência de um monomorfismo

$$u : \alpha^a \hookrightarrow \nu, \text{ cujo complementar é trivial.}$$

Vamos estabelecer agora alguns resultados

Suponhamos  $\dim \beta = n = \dim M$  e  $\dim \alpha = 1$ .

Koschorke em 1974 [2] estabeleceu o seguinte resultado para  $\beta = \tau(M)$ :

Existe um monomorfismo  $u : \alpha \rightarrow \tau(M)$  se e somente se

$$1^\circ) \quad \text{Se } n \equiv 0(2) \quad \chi(M) = 0$$

$$2^\circ) \quad \text{Se } n \equiv 1(2) \quad w_n(\tau M - \alpha) = 0.$$

Como aplicação deste resultado mostremos que o fibrado canônico de linhas  $\lambda \rightarrow \mathbb{R}P^n$  nunca é um sub-fibrado de  $\tau(\mathbb{R}P^n)$ .

$$1) \quad \text{no caso par temos } \chi(\mathbb{R}P^n) \neq 0$$

$$2) \quad \text{no caso ímpar temos}$$

$$w(\tau \mathbb{R}P^{n-\lambda}) = (1+\alpha)^{n+1} (1+\alpha)^{-1} = (1+\alpha)^n.$$

Assim

$$w_n(\tau \mathbb{R}P^{n-\lambda}) = \binom{n}{n} \alpha^n = \alpha^n \neq 0,$$

e portanto a obstrução não se anula.

Uma outra aplicação deste resultado é o seguinte

### *Proposição I.1*

Se  $n \equiv 1(2)$  então o fibrado determinante de  $M$  é um sub-fibrado de  $\tau(M)$ .

*Demonstração*

Neste caso a obstrução total da existência de um mono morfismo  $\mu : \det M \hookrightarrow \tau(M)$  é a classe

$$w_n(\tau(M) - \det M).$$

Uma vez que  $W(\det M) = (1+w_1)$  temos então

$$W(\tau(M) - \det M) = (1+w_1+w_2 + \dots + w_n)(1+w_1)^{-1}$$

e portanto

$$w_n(\tau(M) - \det M) = w_1^n + w_1^{n-1}w_1 + w_1^{n-2}w_2 + \dots + w_1^{n-k}w_k + \dots + w_n$$

Se mostrarmos que  $w_1^{n-k}w_k = 0$   $0 \leq k \leq n$  então a pro posição fica demonstrada. Isto será feito como consequên cia do lema abaixo. C.Q.D.

*Lema I.2*

Seja  $M^n$  uma variedade topológica qualquer, compacta sem bordo e conexa de dimensão  $n$ . Então valem as seguin tes:

1) Para todo  $0 \leq k < n$  e toda classe  $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$  va le a seguinte relação

$$(n-k-1)x^{n-k}w_k = (k+1)x^{n-k-1}w_{k+1}$$

2) Para todo  $0 \leq k \leq n-2$  e toda classe  $x \in H^1(M, \mathbb{Z}/2)$  vale a seguinte relação

$$\begin{aligned} \binom{n-k-2}{2} x^{n-k} w_k + (n-k)(k+1)x^{n-k-1} w_{k+1} + \binom{k-1}{2} x^{n-k-2} w_{k+2} = \\ = (n-k)x^{n-k-1} w_1 w_k + k x^{n-k-2} w_1 w_{k+1} + x^{n-k-2} w_1^2 w_k . \end{aligned}$$

*Demonstração*

1) A seguinte fórmula segue do teorema de Wu

$$\text{Sq}^1(x^{n-k-1} w_k) = w_1 x^{n-k-1} w_k$$

uma vez que a primeira classe de Wu  $v_1 = w_1$ . Desenvolvendo obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Sq}^1(x^{n-k-1} w_k) &= (\text{Sq}^1 x^{n-k-1}) w_k + x^{n-k-1} \text{Sq}^1 w_k \\ &= (n-k-1)x^{n-k} w_k + x^{n-k-1} w_1 w_k + (k-1)w_{k+1} \\ &= (n-k-1)x^{n-k} w_k + w_1 x^{n-k-1} w_k + (k-1)x^{n-k-1} w_{k+1} = w_1 x^{n-k-1} w_k \end{aligned}$$

Portanto

$$(n-k-1)x^{n-k} w_k = (k-1)x^{n-k-1} w_{k+1} .$$

2) Analogamente

$$\text{Sq}^2(x^{n-k-2} w_k) = v_2 x^{n-k-2} w_k = (w_1^2 + w_2) x^{n-k-2} w_k .$$

Por outro lado

$$Sq^2(x^{n-k-2}w_k) = Sq^2(x^{n-k-2})w_k + Sq^1x^{n-k-2}Sq^1w_k + x^{n-k-2}Sq^2w_k$$

e usando a fórmula de Wu

$$Sq^2(w_k) = \binom{k-1}{2} w_{k+2} + kw_1w_{k+1} + w_2w_k$$

e desenvolvendo de uma maneira análoga ao 1º caso obtemos a fórmula desejada. C.Q.D.

Tomando a fórmula 1 no caso  $n$  ímpar e  $k$  ímpar obtemos imediatamente

$$x^{n-k}w_k = 0, \quad \text{em particular}$$

$$w_1^{n-k}w_k = 0, \quad \text{para } n \text{ ímpar e } k \text{ ímpar.}$$

Obtemos  $w_n = 0$  também pela fórmula 1.

Tomando a fórmula 2 no caso  $n$  ímpar e  $k$  ímpar obtemos

$$\binom{n-k-2}{2} w_1^{n-k} w_k = 0 \quad \text{pela fórmula 1}$$

$$(n-k)(k+1)w_1^{n-k-1}w_{k+2} = 0 \quad \text{pois } k+1 \text{ é par}$$

$$\binom{k-1}{2} w_1^{n-k-2} w_{k+2} = 0 \quad \text{pela fórmula 1}$$

e  $w_1^{n-k} w_k = 0$  pela fórmula 1

obtendo assim

$$k w_1^{n-k-1} w_{k+1} = 0 \quad \text{e portanto}$$

$$w_1^{n-(k+1)} w_{k+1} = 0 \quad 0 \leq k < n .$$

E assim fica demonstrada a proposição.

C.Q.D.

Esboçaremos uma demonstração do seguinte resultado de [4] pelo método de singularidades nestas notas.

*Teorema I.3*

Seja  $\alpha^2$  um fibrado de planos sobre  $M^n$  tal que  $n \geq 5$ ,  $n \equiv 1(2)$  e

$$w_1^2(M) + w_1^2(\alpha) + w_1(M)w_1(\alpha) \neq \binom{n}{2} w_2(\alpha) .$$

Então existe  $\mu : \alpha^2 \rightarrow \tau(M)$  se e somente se  $w_{n-1}(\tau(M)-\alpha) = 0$  em  $H^{n-1}(M, \mathbb{Z}/2)$ .

Também demonstraremos um teorema (Teorema III.9) que produz o seguinte resultado essencialmente como corolário.

*Teorema I.4*

Seja  $\alpha^2$  um fibrado não orientável de planos sobre

$M^n$ ,  $n \geq 8$  e  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Então existe  $\mu : \alpha^2 + \tau(M)$   
se e somente se

a)  $0 = w_{n-1}(\tau(M) - \alpha) \in H^{n-1}(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha) + w_1(M)})$

b) Existe  $v \in H_2(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha)})$  que é dual mod 2 a  $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$  em  $H^{n-2}(M, \mathbb{Z}/2)$  e tal que  $e(\alpha) \cap v = \chi(M)$ .

## CAPÍTULO II

### ÁLGEBRA LINEAR DE FIBRADOS

Comecemos este parágrafo com a seguinte pergunta ingênua:

Quando é que uma aplicação linear  $f : R^a \rightarrow R^b$  é um monomorfismo?

Consideremos  $M(b \times a, R)$  o conjunto das matrizes reais  $b \times a$ . Denotemos por  $W^k(b \times a)$  o subconjunto das matrizes em  $M(b \times a)$  de posto  $\geq k$  (que é um aberto em  $M(b \times a)$ ) e  $A^k(b \times a)$  o subconjunto de  $W^k(b \times a)$  constituído das matrizes de posto exatamente igual a  $k$ . Temos assim a seguinte filtração

$$\begin{array}{ccccccc} M(b \times a) & = & W^0(b \times a) & \supset & W^1(b \times a) & \supset & W^2(b \times a) & \supset & \dots & \supset & W^a(b \times a) \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ & & A^0(b \times a) & & A^1(b \times a) & & A^2(b \times a) & & & & A^a(b \times a) \end{array}$$

obviamente a resposta à pergunta formulada é que  $f$  é monomorfismo se e somente se a matriz de  $f$  pertence a  $W^a$ .

Denotando-se por  $\text{cod}(M, N)$  a codimensão de  $M$  em  $N$  temos imediatamente que

$$\text{cod}(A^k, W^k) = (b - k) \cdot (a - k) .$$

Uma versão parametrizada por pontos de uma variedade

M do acima exposto segue da seguinte maneira:

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  fibrados vetoriais sobre M de posto a e b respectivamente com  $a \leq b$  e

$$W^k(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} W^k(\alpha_x, \beta_x)$$

$$\downarrow$$

$$M$$

onde  $W^k(\alpha_x, \beta_x) = \{ h \in \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x) \text{ de posto } \geq k \}$   
e

$$A^k(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} A^k(\alpha_x, \beta_x)$$

$$\downarrow$$

$$M$$

onde  $A^k(\alpha_x, \beta_x) = \{ h \in \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x) \text{ de posto } = k \}$   
e também temos

$$\widetilde{\text{Hom}}(\alpha, \beta) = \bigcup_{x \in M} \text{Hom}(\alpha_x, \beta_x)$$

$$\downarrow$$

$$M$$

e assim a seguinte filtração:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(\alpha, \beta) & = & W^0(\alpha, \beta) & \supset & W^1(\alpha, \beta) & \supset & \dots \supset W^a(\alpha, \beta) \\ & & \underset{u}{\phantom{W^0}} & & \underset{u}{\phantom{W^1}} & & \underset{u}{\phantom{W^a}} \\ & & A^0(\alpha, \beta) & & A^1(\alpha, \beta) & & \dots & A^a(\alpha, \beta) \end{array}$$

Consideremos  $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$  o conjunto das secções do fibrado  $\text{Hom}(\alpha, \beta)$  e é óbvio que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$  e morfismos  $u : \alpha \rightarrow \beta$ . Assim sendo o conjunto dos monomorfismos  $u : \alpha \rightarrow \beta$  corresponde ao conjunto dos elementos em  $\Gamma(\text{Hom}(\alpha, \beta))$  cuja imagem está contida em  $W^a(\alpha, \beta)$ .

*Definição II.1*

Diremos que  $u : \alpha \rightarrow \beta$  é um  $k$ -morfismo,  $0 \leq k \leq a$ , se a secção que a ele corresponde tem imagem em  $W^k(\alpha, \beta)$ , e além disso  $u$  é regular se a correspondente secção  $s_u$  for transversal a  $A^k(\alpha, \beta)$ .

Observemos que  $A^k$  tem codimensão  $(b-k)(a-k)$ , e usando resultados conhecidos de transversalidade a seguinte proposição se verifica imediatamente.

*Proposição II.2*

Sejam  $\alpha^a$  e  $\beta^b$  fibrados vetoriais sobre  $M$  com  $2(b-a) > n-4$ . Então sempre existe um  $(a-1)$ -morfismo regular

$$u : \alpha \rightarrow \beta .$$

Vamos neste ponto estabelecer as idéias gerais do problema a ser estudado:

Comecemos com um  $k$ -morfismo regular

$$u : \alpha^a \rightarrow \beta^b$$

Se for possível evitar  $A^k$  cairemos imediatamente em  $W^{k+1}$ . Para tanto é preciso pois estudar o espaço  $A^k$ .

Consideremos  $s_u$  a secção correspondente ao  $u$ -morfismo regular  $u$ .

Como  $u$  é  $k$ -morfismo regular,  $s_u$  é transversal à subvariedade  $A^k$ . Seja  $S \subset M$  a subvariedade definida por

$$S = s_u^{-1}(A^k).$$

Observemos que fora de  $S$ ,  $s_u$  tem posto maior ou igual a  $k+1$ .

No caso em que  $b = n$  e  $a = 1$ ,  $S$  é um conjunto finito de pontos.

É a subvariedade  $S$  que fornecerá a obstrução, localizada num determinado grupo.

Consideremos os fibrados:

$$\begin{array}{ccc} & A^k(\alpha, \beta) & \\ & \downarrow \bar{p} & \\ \alpha & \longrightarrow M & \longleftarrow \beta \end{array}$$

Considerando-se fibrados sobre  $A^k$  induzidos por  $\tilde{p}$ , temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\text{Ker}} \oplus \widehat{\text{Coim}} \cong \tilde{p}^* \alpha & & \tilde{p}^* \beta \cong \widehat{\text{Coker}} \oplus \widehat{\text{Im}} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & A^k & \\
 & \downarrow \tilde{p} & \\
 \alpha \longrightarrow & M & \longleftarrow \beta
 \end{array}$$

Vamos explicar como esta decomposição é obtida:

Seja  $h \in A^k$ ,  $\tilde{p}(h) = x$  então para cada  $x \in M$  temos

$$h : \alpha_x \rightarrow \beta_x \text{ de posto} = k$$

assim

$$\alpha_x = \text{Ker } h \oplus \text{Coim } h$$

e

$$\beta_x = \text{Im } h \oplus \text{Coker}$$

são respectivamente as decomposições.

Assim se  $h \in A^k$  a fibra de  $\widehat{\text{Ker}}$  sobre  $h$  é  $\text{Ker } h$  e a fibra de  $\widehat{\text{Coim}}$  sobre  $h$  é  $\text{Coim } h$  e assim por diante.

*Proposição II.3*

Os fibrados  $v(A^k(\alpha, \beta), W^k(\alpha, \beta))$  e  $\underline{\text{Hom}}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$  são naturalmente isomorfos sobre  $A^k(\alpha, \beta)$ .

*Demonstração (Esboço):*

Definimos um morfismo de fibrados

$$v(A^k(\alpha, \beta), W^k(\alpha, \beta)) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$$

da seguinte maneira. Seja  $h_0 \in A^k(\alpha, \beta)$  com  $p(h_0) = x_0 \in M$ . Um vetor normal  $[\tilde{h}]$  em

$$T_{h_0}(\underline{\text{Hom}}(\alpha, \beta)) / T_{h_0}(A^k(\alpha, \beta)) \text{ em } h_0$$

pode ser representado por um morfismo  $\tilde{h}_0$  tangente a fibra  $\underline{\text{Hom}}(\alpha, \beta)_{x_0}$ . Isto é,  $\tilde{h}_0$  é um morfismo linear  $\tilde{h}_0 : \alpha_{x_0} \rightarrow \beta_{x_0}$ . Compondo  $\tilde{h}_0$  com a inclusão  $\text{Ker} \alpha \subset \alpha_{x_0}$  e com a projeção  $\beta_{x_0} \rightarrow \text{Coker } h_0$ , obtemos o morfismo desejado em  $\underline{\text{Hom}}(\hat{Ker}, \hat{Coker})$ .

Vamos agora definir a noção de cobordismo normal e mostrar como o esquema estabelecido anteriormente define um elemento neste grupo de cobordismo normal.

Vamos primeiramente definir o grupo  $\Omega_n(X; \phi^+ - \phi^-)$  e posteriormente o grupo relativo  $\Omega_n(X, A; \phi^+ - \phi^-)$  e mostrar que esta definição nos fornece uma teoria de homolo

gia generalizada.

Seja  $X$  um espaço de Hausdorff, paracompacto e  $\phi = (\phi^+, \phi^-)$  um par de fibrados vetoriais sobre  $X$ .

Seja  $(M, g, \bar{g})$  uma tripla formada por:

- 1)  $M^n$  é uma variedade compacta sem bordo  $C^\infty$  de dimensão  $n$ .
- 2)  $g : M \rightarrow X$  uma aplicação contínua
- 3)  $\bar{g} : \nu(M) \oplus g^*(\phi^-) \rightarrow g^*(\phi^+)$  um isomorfismo de fibrados onde  $\nu(M)$  é o fibrado estável normal de  $M$ .

*Definição:*

Duas triplas  $(M_1^n, g_1, \bar{g}_1)$  e  $(M_2^n, g_2, \bar{g}_2)$  são cobordantes caso exista uma tripla  $(W^{n+1}, G, \bar{G})$  satisfazendo

- a)  $W^{n+1}$  é uma variedade  $C^\infty$  compacta com bordo tal que  $\partial W = M_1 \cup M_2$ .
- b)  $G : W \rightarrow X$  é uma extensão contínua de  $g_1 \sqcup g_2$ .
- c)  $\bar{G} : \nu(W) \oplus G^*(\phi^-) \rightarrow G^*(\phi^+)$  é um isomorfismo de fibrados tal que  $\bar{G}|_{\partial W} = \bar{g}_1 \sqcup \bar{g}_2$ .

Técnicas elementares de topologia diferencial mostram que cobordismo entre triplas é uma relação de equivalência. Assim sendo  $\Omega_n(X; \phi)$  é o conjunto das classes de equivalência.

Caso o fibrado virtual  $\phi^+ - \phi^-$  possa ser concretamente realizado então é possível mostrar que

$$\Omega_n(X; \phi) \cong \pi_{n+t}(T(\tilde{\phi})) = \pi_n^S(T(\tilde{\phi}))$$

onde  $\tilde{\phi}$  é o fibrado vetorial de  $\dim t > n$  isomorfo a  $\phi^+ - \phi^-$ . Logo mais esboçaremos uma construção deste isomorfismo.

#### II.4 - CLASSE DE BORDISMO DEFINIDA POR K-MORFISMO REGULAR

Seja  $u : \alpha \rightarrow \beta$  um  $k$ -morfismo regular e  $s_u$  sua respectiva secção em  $\text{Hom}(\alpha, \beta)$ . Assim sendo  $s_u$  é transversal a  $A^k(\alpha, \beta)$  e  $S = s_u^{-1}(A^k(\alpha, \beta))$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $n - (a-k) \times (b-k)$ . O elemento desejado será representado pela tripla  $(S, g, \bar{g})$  que está no grupo

$$\Omega_{n-(a-k) \times (b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$$

onde os ingredientes são definidos como segue:

$$g = s_u|_S : S \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{g} = T(S) \oplus (\underline{Ker} \oplus \underline{Coker}) & \xrightarrow{\cong} & T(S) \oplus \nu(S, M) \\ & & \parallel \\ & & T(M)|_S \end{array}$$

onde  $\alpha|_S = \underline{Ker} \oplus \underline{Coker}$ .

Observando que temos os seguintes isomorfismos  $\underline{\text{Ker}} \otimes \underline{\text{Coker}} \cong g^*(\widehat{\text{Ker}} \otimes \widehat{\text{Coker}})$  e  $\text{TM}|_S = g^*(\tilde{p}^*(\text{TM}))$  então a tripla  $(S, g, \bar{g})$  define um elemento no grupo

$$\Omega_{n-(a-k) \times (b-k)}(A^k(\alpha, \beta), \tilde{\phi})$$

onde  $\tilde{\phi} = \widehat{\text{Ker}} \otimes \widehat{\text{Coker}} - p^*(\text{TM})$ .

Os casos interessantes e as aplicações serão dadas em função do estudo da classe de cobordismo como foi descrita.

## II.5 - BORDISMO NORMAL RELATIVO

Sejam  $X$  um complexo celular,  $A \subset X$  um subconjunto, e  $\xi^N$

$$\downarrow$$

$X$  um fibrado vetorial de posto  $N$ .

Vamos então definir o grupo de bordismo relativo  $\Omega_n(X, A; \xi^N)$  no caso em que  $N \geq n+2$ .

*Definição:*

Uma aplicação normal em  $(X, A)$  consta de uma tripla  $(M^n, g, G)$  satisfazendo:

1)  $(M, \partial M)$  são subvariedades compactas  $C^\infty$  de  $D^{n+N}$  tal que  $M$  intercepta  $\partial D^{n+N} = S^{n+N-1}$  transversalmente, ou seja  $\partial M = S^{n+N-1} \# M$ .

2)  $g : (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$  é uma aplicação contínua.

3)  $G : \nu(M \subset D^{n+N}) \xrightarrow{\cong} g^* \xi^N$

e

$$G : \nu(\partial M \subset S^{n+N-1}) \xrightarrow{\cong} \left. \begin{array}{c} g^* \xi^N \\ | \\ \partial M \end{array} \right.$$

*Definição:*

Um bordismo normal entre as triplas  $(M_0, g_0, G_0)$  e  $(M_1, g_1, G_1)$  é uma tripla  $(W^{n+1}, h, H)$  satisfazendo:

1)  $(W, \partial W)$  são subvariedades compactas de  $(D^{n+N} \times I, \partial(D^{n+N} \times I))$  que interceptam transversalmente  $\partial(D^{n+N} \times I)$  e  $S^{n+N-1} \times \{0, 1\}$  e tal que

$$W \pitchfork (D^{n+N} \times \{0\}) = M_0 \times \{0\}$$

$$W \pitchfork (D^{n+N} \times \{1\}) = M_1 \times \{1\}.$$

Notemos que  $V = \partial W \pitchfork S^{n+N-1} \times I$  é uma variedade compacta tal que  $\partial V = \partial M_0 \sqcup \partial M_1$ .

2)  $h : (W, \partial W) \rightarrow (X, A)$  estende  $g_0 \sqcup g_1$ .

3)  $G : \nu(W \subset D^{n+N} \times I) \xrightarrow{\cong} h^* \xi^N$  estende  $G_0 \sqcup G_1$

e o isomorfismo  $\nu(V \subset S^{n+N-1}) \longrightarrow h^* \xi^N|_V$

estende  $G_0|_{\partial W_0} \sqcup G_1|_{\partial W_1}$ .

Técnicas de topologia diferencial podem ser aplicadas e facilmente prova-se que esta relação é uma relação de equivalência. Assim por definição, o grupo de bordismo normal relativo é o conjunto das classes de equivalência, denotado por

$\Omega_n(X, A; \xi^N)$  onde a soma é definida por

$$\begin{aligned} [M_1, g_1, G_1] + [M_0, g_0, G_0] &= \\ &= [M_0 \sqcup M_1, g_0 \sqcup g_1, G_0 \sqcup G_1] . \end{aligned}$$

*Observação:*

A hipótese  $N \geq n+2$  é utilizada de modo a se obter  $M_0$  e  $M_1$  subvariedades disjuntas de  $D^{n+N}$ .

Poderíamos construir o elemento inverso de um elemento  $[M, g, G]$ , porém o faremos de uma forma mais elegante utilizando o

*Lema II.4*

Seja  $A \in O(n+N)$  um elemento qualquer. Dado um elemento  $[M, g, G]$  em  $\Omega_n(X, A; \xi^N)$  consideremos o elemento  $[A^{-1}(M), g \circ A, G \circ A]$  onde olhemos  $A$  como um difeomorfismo  $A: D^{n+N} \rightarrow D^{n+N}$ . Então temos  $[A^{-1}(M), g \circ A, G \circ A] = \det(A) [(M, g, G)]$  em  $\Omega_n(X, A; \xi)$ .

Daremos uma demonstração deste lema depois de identificar  $\Omega_n(X, A; \xi)$  com um determinado grupo de homotopia estável utilizando-se a construção de Pontryagin - Thom.

## II.6 - HOMOMORFISMO SUSPENSÃO

Seja  $\underline{R}^t$  fibrado trivial de posto  $t$ . Nosso objetivo agora é definir o homomorfismo suspensão

$$\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi^N \otimes \underline{R}) .$$

Por meio da inclusão natural  $D^{n+N} \subset D^{n+N+1}$  que provém da inclusão canônica  $R^{n+N} \subset R^{n+N+1}$  que anula a última coordenada, podemos associar à aplicação normal  $(M, g, G)$  a aplicação normal  $(M, g, G \otimes \underline{1})$  onde  $G \otimes \underline{1} : \nu(M \subset D^{n+N+1}) \xrightarrow{\cong} g^*(\xi^N) \otimes \underline{R}^1$ .

Conseqüentemente obtemos um morfismo natural

$$\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi^N \otimes \underline{R}^1) .$$

Vamos mostrar em breve que sob a hipótese de  $N \geq n+2$ ,  $\Sigma$  é um isomorfismo.

## II.7 - CONSTRUÇÃO DE PONTRYAGIN - THOM

### Teorema II.8

A Construção de Pontryagin-Thom estabelece um isomorfismo entre  $\Omega_n(X, A; \xi^N)$  e  $\pi_{n+N}(T(\xi^N), T(\xi|_A))$ .

*Esboço da demonstração:*

Podemos identificar o espaço total do fibrado normal  $\nu(M \subset D^{n+N})$  com uma vizinhança tubular de  $M$  em  $D^{n+N}$ .

O complexo de Thom  $T(\nu)$  é por definição o espaço quociente do fibrado de discos de  $\nu$  pelo fibrado de esferas.

As aplicações

$$\begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow[\cong]{G} & g^*\xi^N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow[\cong]{G} & g^*(\xi^N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial M & \longrightarrow & \partial M \end{array}$$

induzem a aplicação

$$\bar{G}: (T(\nu), T(\nu|_{\partial M})) \rightarrow (T(\xi), T(\xi|_A))$$

e assim a aplicação normal  $(M, g, G)$  produz uma aplicação de pares  $\bar{G} \circ c: (D^{n+N}, S^{n+N-1}) \rightarrow (T(\xi), T(\xi|_A))$  onde  $c$  colapsa a esfera  $S^{n+m-1}$  no ponto base.

Obviamente aplicações normais bordantes produzem aplicações homotópicas. Esta observação garante um morfismo bem definido

$$\Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \pi_{n+N}(T(\xi^N), T(\xi|_A)).$$

Usando o conceito de transversalidade vamos esboçar uma de

monstração de que o morfismo que acabamos de construir é de fato um isomorfismo.

Dada uma aplicação de pares  $(D^{n+N}, S^{n+N-1}) \rightarrow (T(\xi^N), T(\xi^N|_A))$  podemos aproximá-la por uma aplicação homotópica  $h$  tal que  $h \pitchfork X$  e  $h|_{S^{n+N-1}} \pitchfork A$ . Vemos  $X$  e  $A$  como as secções nulas dos fibrados  $\begin{array}{c} \xi^N \\ \downarrow \\ X \end{array}$  e  $\begin{array}{c} \xi^N \\ \downarrow \\ A \end{array}$ .

Sendo que fibrados vetoriais são localmente triviais podemos projetar  $\tilde{U} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  para  $\tilde{U}$ , um aberto de trivialização de  $\xi^N$ .

Usando o resultado clássico para transversalidade relativa de  $\mathbb{R}^N$ , obtemos  $M^n = h^{-1}(X)$ , uma subvariedade de  $D^{n+N}$  tal que  $\partial M = M \pitchfork S^{n+N-1}$  e isomorfismos do fibrado normal de  $M$  em  $D^{n+N}$  com  $h^*(\xi^N)$  e do fibrado normal de  $M$  em  $S^{n+N-1}$  com  $h^*(\xi^N|_A)$ .

Aplicações homotópicas produzem aplicações normais em  $(X, A)$  que são bordantes. Assim o morfismo construído entre

$$\pi_{n+N}(T(\xi), T(\xi|_A)) \quad \text{e} \quad \Omega_n(X, A; \xi^N) \quad \text{é}$$

bem definido, e é o inverso do homomorfismo inicialmente construído.

*Consequências da Construção de Pontryagin - Thom*

*Proposição II.9*

O homomorfismo suspensão

$$\Sigma : \Omega_n(X, A; \xi) \rightarrow \Omega_n(X, A; \xi \otimes \underline{\mathbb{R}}^1)$$

é um isomorfismo.

*Demonstração:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(X, A; \xi^N) & \longrightarrow & \Omega_n(X, A; \xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \pi_{n+N}(T(\xi), T(\xi|_A)) & \simeq & \pi_{n+N+1}(\Sigma T(\xi), \Sigma T(\xi|_A)) \\ & & \simeq \pi_{n+N+1}(T(\xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1), T((\xi^N \otimes \underline{\mathbb{R}}^1)|_A)) \end{array}$$

C.Q.D.

Técnicas usuais de topologia algébrica garantem as seguintes propriedades:

A) Sequência exata do par  $(X, A)$

Dado um par  $(X, A)$  consideremos as identificações  $A$  com  $(A, \phi)$  e  $X$  com  $(X, \phi)$  e sejam  $i : A \rightarrow X$  e  $j : X \rightarrow (X, A)$  as inclusões naturais de pares.

Definamos  $\partial : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_{n-1}(A; \xi^N)$  da seguinte maneira:

$S^{n+N-1} - \{e_1\}$  é homeomorfo a  $D^{n+N-1}$  com orientação correspondendo a  $\{e_2, \dots, e_{n+N}\}$ . Dado  $[(M, g, \bar{G})]$  em  $\Omega_n(X, A; \xi^N)$  seja  $\partial[(M, g, G)]$  o elemento  $[\partial M, g, G|_{\partial M}] \in \Omega_{n-1}(A; \xi^N|_A)$ . Temos uma seqüência

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \Omega_n(A; \xi^N|_A) & \xrightarrow{i_*} & \Omega_n(X; \xi^N) & \xrightarrow{j_*} & \Omega_n(X, A; \xi^N) & \xrightarrow{\partial} \\ & & & & & & \\ \longrightarrow & \Omega_{n-1}(A; \xi^N|_A) & \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

que facilmente prova-se que é uma seqüência exata.

B) Excisão: Se  $U \subset A$  é um subespaço satisfazendo  $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$  então a inclusão

$i : (X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$  induz isomorfismo entre

$$\Omega_n(X-U, A-U; \xi^N) \quad \text{e} \quad \Omega_n(X, A; \xi^N).$$

C) Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação satisfazendo  $f^*(\eta) = \xi$  então  $f$  induz um morfismo bem definido

$$f_* : \Omega_n(X, A; \xi^N) \rightarrow \Omega_n(Y, B; \eta^N).$$

D) Homotopia: Sejam  $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  aplicações satisfazendo  $f_0^*(\eta) = f_1^*(\eta) = \xi$ . Então se  $f_0$  é homotopi

ca a  $f_1$  teremos  $f_{0*} = f_{1*} : \Omega_n(X, A; \xi) \rightarrow \Omega_n(Y, B; \eta)$ .

E) O grupo de bordismo reduzido  $\tilde{\Omega}_n(X; \xi)$  é por definição o grupo relativo  $\Omega_n(X, *; \xi)$  para todo  $n \geq 0$ .

*Proposição II.10*

Seja  $\xi$  um fibrado trivial sobre  $X$ . Então

$$\Omega_n(X; \xi) \cong \tilde{\Omega}_n(X; \xi) \oplus \pi_n^S$$

*Demonstração:*

Uma vez que  $\xi$  é trivial, a aplicação  $r : X \rightarrow *$  constante, satisfaz  $r^*(\xi|_*) \cong \xi$ . Desta forma temos bem definido o morfismo  $r_* : \Omega_n(X; \xi) \rightarrow \Omega_n(*; \mathbb{R}^N)$  que é um splitting para o morfismo

$$i_* : \Omega_n(*; \mathbb{R}^N) \rightarrow \Omega_n(X; \xi^N).$$

A afirmação segue então da sequência exata

$$\longrightarrow \Omega_n(*; \mathbb{R}^N) \xrightleftharpoons[i_*]{r_*} \Omega_n(X; \xi) \longrightarrow \Omega_n(X, *, \xi) \xrightarrow{\partial}$$

C.Q.D.

Notemos que  $\Omega_n(*; \text{trivial}) \cong \Omega_n(*; \mathbb{R}^N)$  para  $N \geq n+2$ . Assim a construção de Pontryagin-Thom fornece um isomorfismo

entre  $\Omega_n(*; \mathbb{R}^N)$  e  $\pi_{n+N}(S^N)$  pois  $S^N = T(\mathbb{R}^N)$ .

*Proposição II.11*

Seja  $\xi$  um fibrado estável qualquer sobre  $S^m$ .  
Então  $\tilde{\Omega}_n(S^m; \xi) \cong \pi_{n-m}^S$ .

*Demonstração:*

Seja  $\Sigma X$  uma suspensão qualquer, e a decomposição canônica

$$\Sigma X = C_+ X \cup C_- X \quad \text{com} \quad C_+ X \cap C_- X = X.$$

Observando que  $C_+ X$  é contrátil temos:

$$\tilde{\Omega}_n(\Sigma X; \xi) = \Omega_n(\Sigma X, *, \xi) \cong \Omega_n(\Sigma X, C_+ X; \xi)$$

e por excisão temos  $\Omega_n(\Sigma X, C_+ X; \xi) \cong \Omega_n(C_- X, X; \xi)$  e a sequência exata da tripla fornece  $\Omega_n(C_- X, X; \xi) \cong \Omega_{n-1}(X, *, \xi)$  e portanto  $\tilde{\Omega}_n(\Sigma X; \xi) \cong \tilde{\Omega}_{n-1}(X; \xi)$ . Consequentemente temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_n(S^m; \xi) &\cong \tilde{\Omega}_{n-1}(S^{m-1}; \xi) \cong \dots \cong \tilde{\Omega}_{n-m}(S^0; \xi) \cong \\ &\cong \Omega_{n-m}(*, \text{trivial}) = \pi_{n-m}^S \end{aligned}$$

C.Q.D.

*Observação:*

Não é verdadeiro que  $\Omega_n(S^m; \xi) \cong \pi_{n-m}^S \oplus \pi_n^S$ . Obviamente

te isto é verdadeiro caso  $\xi$  seja trivial. Se  $\xi$  não for trivial isto pode não ocorrer. Como exemplo tomemos  $\lambda$  o fibrado de Hopf sobre  $S^1 = \mathbb{R}P^1$ .

Temos:

$$\Omega_0(S^1; \lambda \otimes \mathbb{R}^1) = \pi_2(T(\lambda \otimes \mathbb{R}^1)) = \pi_2(\Sigma \mathbb{R}P^2) = H_2(\Sigma \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2.$$

*Proposição II.12*

Seja  $\xi$  um fibrado sobre  $X, X$  conexo.

$$\Omega_0(X; \xi) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } \xi \text{ for orientável} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{se } \xi \text{ for não orientável} \end{cases}$$

*Demonstração:*

$\Omega_0(X; \xi) = \Omega_0(X; \xi^N) = \pi_N(T(\xi^N)) = H_N(T(\xi^N); \mathbb{Z})$  e o resultado segue pelo Teorema do Isomorfismo de Thom.

C.Q.D.

*Proposição II.13*

Se  $(X, A)$  é um par de complexos celulares então  $\Omega_n(X, A; \xi)$  depende somente do  $(n+1)$  esqueleto.

*Demonstração:*

O  $(n+1)$  esqueleto do par  $(X, A)$  denotado por  $(X, A)^{[n+1]}$  é por definição o par  $(X^{[n+1]} \cup A, A)$ . O  $N+n+1$  esqueleto

de  $T(\xi^N)$  é determinado pelo  $(n+1)$  esqueleto de  $X$ . Os grupos de homotopia em dimensão  $j$  são determinados pelo  $(j+1)$  esqueleto do complexo. Consequentemente a inclusão

$$T(\xi|_{X^{[n+1]} \cup A}) \longrightarrow T(\xi^N)$$

induz isomorfismo nos grupos de homotopia até dimensão  $n+N$ , isto é

$$\Omega_n((X,A)^{[n+1]}; \xi) \cong \Omega_n(X, A; \xi)$$

C.Q.D.

*Definição II.14*

Dois fibrados vetoriais  $\xi^r$  e  $\eta^s$  possuem o mesmo tipo de homotopia estável de esferas, caso exista uma aplicação

$$f : S(\xi^r \oplus \mathbb{R}^{N-r}) \rightarrow S(\eta^s \oplus \mathbb{R}^{N-s})$$

entre os fibrados em esferas tal que a restrição em cada fibra é uma equivalência de homotopia.

Observemos que isto acontece se e somente se  $J(\xi) = J(\eta)$  onde  $J$  denota o  $J$ -morfismo

$$J : [ , BO ] \rightarrow [ , BF ] \quad \text{onde} \quad BF = \Omega^\infty S^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^n S^n .$$

*Proposição II.15*

Sejam  $\xi^r$  e  $\eta^s$  dois fibrados vetoriais que possuem o mesmo tipo de homotopia estável de esferas. Então

$$\Omega_n(X; \xi) = \Omega_n(X; \eta) \quad \text{para todo } n \geq 0 .$$

*Demonstração:*

$$\Omega_n(X; \xi^r) = \pi_{n+N}(T(\xi^r \oplus \underline{R}^{N-r}))$$

e

$$\Omega_n(X; \eta^s) = \pi_{n+N}(T(\eta^s \oplus \underline{R}^{N-s}))$$

uma vez que  $T(\xi^r \oplus \underline{R}^{N-r})$  é o cone da projeção, então uma equivalência de homotopia estável de esferas entre os fibrados fornece uma equivalência de homotopia entre os espaços de Thom, donde portanto segue o resultado.

C.Q.D.

## CAPÍTULO III

### O TEOREMA PRINCIPAL

O nosso objetivo é demonstrar o teorema principal, que identifica a obstrução total à existência de um  $(k+1)$ -morfismo regular, homotópico ao  $k$ -morfismo regular  $u : \alpha + \beta$  dado, como um elemento do bordismo normal do espaço  $A^k(\alpha, \beta)$ . Primeiro, vamos formular condições para que dois  $k$ -morfismos regulares sejam homotópicos por  $k$ -morfismos regulares.

#### Proposição III.1

Sejam  $u_0 : \alpha + \beta$  e  $u_1 : \alpha + \beta$  dois  $k$ -morfismos regulares entre os fibrados vetoriais  $\alpha^a$  e  $\beta^b$  sobre a variedade  $M^n$ . Então eles são homotópicos por  $k$ -morfismos regulares caso  $(a-k+1)(b-k+1) > n+1$ .

#### Demonstração:

Seja  $\pi : M \times I \rightarrow M$  a projeção no primeiro fator. Queremos construir um  $k$ -morfismo regular entre  $\pi^*(\alpha)$  e  $\pi^*(\beta)$  que coincide com  $\pi^*(u_0)$  em  $M \times \{0\}$  e com  $\pi^*(u_1)$  em  $M \times \{1\}$ . Por indução, seja  $U : \pi^*(\alpha) + \pi^*(\beta)$  um  $j$ -morfismo regular que coincide com  $\pi^*(u_0)$  em  $M \times \{0\}$  e com  $\pi^*(u_1)$  em  $M \times \{1\}$ . Aqui  $j$  é um inteiro satisfazendo

$0 \leq j \leq k-1$ . Afirmamos que a secção

$$s_U : M \times I \rightarrow W^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$$

não intercepta  $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$ , pela seguinte razão:

Por hipótese,  $n+1 < (a-k+1)(b-k+1)$ . Mas  $(a-k+1)(b-k+1) \leq (a-j)(b-j)$ , a codimensão de  $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$  em  $W^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$ .

Consequentemente,  $s_U$  não intercepta  $A^j(\pi^*(\alpha), \pi^*(\beta))$ ; isto é,  $s_U$  é um  $(j+1)$ -morfismo. Tomamos um  $(j+1)$ -morfismo regular que é homotópico a  $s_U$  e coincide com  $s_U$  em  $M \times \{0,1\}$ . Repetimos a demonstração acima até conseguirmos um  $k$ -morfismo regular entre  $\pi^*(\alpha)$  e  $\pi^*(\beta)$  que coincide com  $\pi^*(u_0)$  em  $M \times \{0\}$  e com  $\pi^*(u_1)$  em  $M \times \{1\}$ .

C.Q.D.

O nosso objetivo agora é demonstrar o Teorema Principal. Lembremos da situação:  $u : \alpha \rightarrow \beta$  é um  $k$ -morfismo regular entre  $\alpha$  e  $\beta$ , cujas dimensões são  $a$  e  $b$  sobre  $M^n$ . Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\alpha, \beta) = W^0(\alpha, \beta) \supset \dots \supset W^k(\alpha, \beta) & & \cup \\ \tilde{p} \downarrow & \nearrow s_U & \\ M & & A^k(\alpha, \beta) \\ \cup & \nearrow g = s_U|_S & \\ S & & \end{array}$$

$S = s_u^{-1}(A^k(\alpha, \beta))$  é uma subvariedade de codimensão  $(a-k)(b-k)$  em  $M$ , e consta dos pontos onde  $u$  tem posto  $= k$ . Temos também um isomorfismo  $G$  de fibrados estáveis sobre  $S$ .

$$\begin{aligned} G : \nu(S) &= \nu(S \subset M) \otimes \nu(M|_S) = \\ &= g^*(\nu(A^k(\alpha, \beta) \subset W^k(\alpha, \beta)) \otimes \nu(M)|_S = \\ &= g^*(\hat{Ker} \otimes \hat{Coker} - \tilde{p}^*(\tau M)) . \end{aligned}$$

Consequentemente, temos um elemento  $\tilde{w}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = [S, g, G]$  em  $\Omega_{n - (a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$  onde  $\tilde{\phi} = \hat{Ker} \otimes \hat{Coker} - \tilde{p}^*(\tau M)$ .

*Teorema Principal III.2*

Seja  $u : \alpha^a \rightarrow \beta^b$  um  $k$ -morfismo regular entre os fibrados vetoriais sobre  $M$ , tal que  $n+2 < 2(a-k)(b-k)$ . Então existe um  $(k+1)$ -morfismo regular  $v : \alpha \rightarrow \beta$  que é homotópico a  $u$  por  $k$ -morfismos se e somente se  $\tilde{w}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = 0$  em  $\Omega_{n - (a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$ .

*Demonstração:*

Sabemos que dois  $k$ -morfismos regulares que são homotópicos por  $k$ -morfismos produzem o mesmo elemento em bordismo

normal. Suponhamos que  $v : \alpha \rightarrow \beta$  existe.

Sendo que  $v$  é  $(k+1)$ -morfismo, então segue que  $s_v^{-1}(A^k(\alpha, \beta)) = \emptyset$ . Isto é,  $\tilde{\omega}_{k+1}(\alpha, \beta, u)$  tem que ser zero.

Suponhamos agora que  $\tilde{\omega}_{k+1}(\alpha, \beta, u) = 0$ . Queremos construir um  $(k+1)$ -morfismo  $v : \alpha \rightarrow \beta$  homotópico a  $u$ . Temos os seguintes dados:

a) Uma variedade  $W$  tal que  $\partial W = S$ .

b) Uma aplicação  $h : W \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$  que estende  $g : S \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$ .

c) Um isomorfismo  $H : v(W) \cong h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) + h^*(\hat{p}(v(M)))$  que estende o isomorfismo:

$$G : v(S) \cong v(S \subset M) \oplus v(M) \Big|_S \cong g^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) \oplus v(M) \Big|_S$$

Vamos construir um  $k$ -morfismo  $\bar{u} : \pi^*(\alpha) \rightarrow \pi^*(\beta)$  sobre  $M \times I$  tal que  $\bar{u}$  coincide com  $u$  em  $M \times \{0\}$  e  $\bar{u}$  define um  $(k+1)$ -morfismo em  $M \times \{1\}$ .

*Passo I*

Podemos mergulhar  $W$  em  $M \times I$  de forma tal que  $\partial W = W \cap \partial(M \times I) = S \subset M \times \{0\}$ , e além disso  $W$  é da forma  $S \times \{0, \epsilon\}$  numa vizinhança de  $M \times \{0\}$  em  $M \times I$ .

Notemos que a dimensão de  $W$  é  $n+1 - (a-k) - (b-k)$ . Conseqüentemente,

$$2 \dim W + 1 = 2(n+1) - 2(a-k) - 2(b-k) + 1 < 2(n+1) - (n+2) + 1 = n+1.$$

Pelo Teorema clássico de Whitney, existe tal mergulho. Inclusive, quaisquer dois mergulhos são isotópicos, isto é, homotópicos por mergulhos. Portanto, podemos considerar  $W$  como subvariedade de  $M \times I$  com as propriedades desejadas.

*Passo II*

Início da construção de  $\bar{u}$ .

Definamos  $\bar{u} = u$  em  $M \times \{0\}$ . Estendamos  $u$  sobre toda a variedade  $W$  por meio da aplicação  $h : W \rightarrow A^k(\alpha, \beta)$ . Desta maneira  $\bar{u}$  tem posto  $k$  em  $W$ . O isomorfismo  $H$  pode ser escrito da seguinte maneira

$$H : \nu(W \subset M \times I) \oplus \nu(M \times I)|_W \cong h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker}) \oplus h^*(\hat{p}^*(\nu(M))).$$

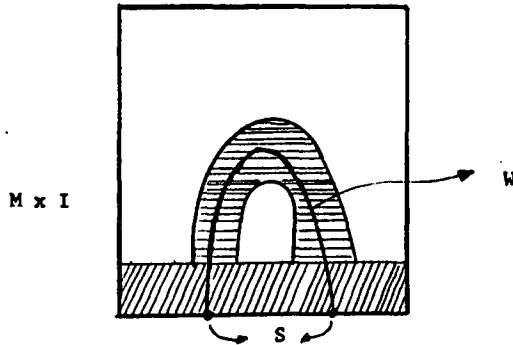
$H : \nu(M \times I)|_W$  é isomorfo a  $h^*(\hat{p}^*(\nu(M)))$ . Sendo que  $n+1 - (a-k)(b-k) < (a-k)(b-k)$ ,  $h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker})$  é um fibrado estável sobre  $W$ . Concluimos que a classe de homotopia do isomorfismo  $H$  se restringe a um isomorfismo

$$\bar{H} : \nu(W \subset M \times I) \cong h^*(\hat{Ker} \oplus \hat{Coker})$$

Notemos que os pontos numa vizinhança tubular de  $A^k(\alpha, \beta)$  em  $W^k(\alpha, \beta)$  correspondem a  $(k+1)$ -morfismos entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Por meio do isomorfismo  $\bar{H}$ , podemos agora estender  $\bar{u}$  a uma vizinhança tubular de  $W$  em  $M \times I$ , tendo o próprio  $W$  como singularidade. Isto é, podemos definir

$\bar{u}$  tal que  $\bar{u}$  tem posto  $k$  somente em  $W$ .

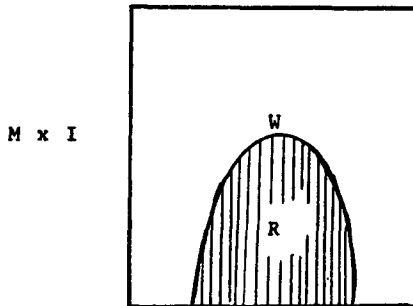
Adicionando um colarinho a  $M \times \{0\}$  se for necessário, podemos também definir  $\bar{u}$  de maneira óbvia em  $M \times [0, \epsilon/2]$ .



*Passo III*

Seja  $i_2 : M \times I \rightarrow I$  a projeção no segundo fator. Seja a região  $R$  "abaixo da singularidade  $w$ " definida por

$$R = \{(\pi(y), t) \in M \times I \mid y \in W \text{ e } 0 \leq t \leq i_2(y)\}$$



A região  $R$  onde  $\bar{u}$  ainda não está definida é localmente homeomorfo ao espaço euclidiano cuja dimensão é  $\dim W + 1 = n + 2 - (a-k)(b-k)$ . Sendo que por hipótese  $n + 2 - (a-k)(b-k) < (a-k)(b-k)$ , podemos estender  $\bar{u}$  sobre  $R$  todo com posto  $\geq k + 1$  fora de  $W$ , pois a codimensão de  $A^k(\alpha, \beta)$  em  $W^k(\alpha, \beta)$  é maior que a dimensão de  $R$ .

Notemos agora que o  $k$ -morfismo  $\bar{u}$ , que tem posto  $\geq k + 1$  fora de  $W$ , está definido numa região de  $M \times I$  suficientemente "gordo" para conter o gráfico de uma aplicação diferenciável  $r : M \rightarrow (0, 1]$ , onde  $r(x) > 0$  para todo  $x \in M$ , tal que a parte que fica abaixo do gráfico de  $r$  é homeomorfa a  $M \times I$  e contém  $W$  no interior. Portanto conseguimos um  $(k+1)$ -morfismo  $v$  em  $M \times \{1\}$  por meio do homeomorfismo.

*Observação:*

Esta demonstração que apresentamos é uma adaptação da demonstração no caso complexo na tese de doutoramento de Mário Olivero Marques da Silva [5].

Acabamos de demonstrar o Teorema Fundamental, que identifica a obstrução à existência de um  $(k+1)$ -morfismo regular  $v : \alpha^a \rightarrow \beta^b$  entre fibrados vetoriais  $\alpha^a$  e  $\beta^b$  sobre  $M^n$  com um único elemento  $\tilde{\omega}_{k+1}(\alpha, \beta) \in \Omega_{n - (a-k)(b-k)}(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$ ,

caso sejam satisfeitas as condições  $n+2 < 2(a-k)(b-k)$  e  $n+1 < (a-k+1)(b-k+1)$ . Mas o espaço  $A^k(\alpha, \beta)$  é complicado. Veremos que sob certas condições podemos substituir o bordismo normal de  $A^k(\alpha, \beta)$  pelo bordismo normal de uma variedade Grassmanniana  $G_{a-k}(\alpha)$ , cuja topologia algébrica pode ser expressa melhor em termos dos fibrados  $\alpha$  e  $\beta$  e da variedade  $M^n$ .

Seja  $G_{a-k}(\alpha) = \bigcup_{x \in M} G_{a-k}(\alpha_x)$  a variedade Grassmanniana de  $\alpha$ . Aqui  $G_{a-k}(\alpha_x)$  é a variedade cujos pontos são os planos de dimensão  $(a-k)$  no espaço euclidiano  $R^a$ .

Seja  $\pi : G_{a-k}(\alpha) \rightarrow M$  a projeção canônica. Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(\alpha, \beta) \supset A^k(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\bar{p}_k} & G_{a-k}(\alpha) \\
 \searrow \bar{p} & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}$$

onde  $\bar{p}_k$  leva o morfismo  $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$  de posto  $k$  a  $\text{Ker } h \in G_{a-k}(\alpha_x)$ .

Existem os fibrados canônicos  $\gamma \subset \pi^*(\alpha)$  e  $\gamma^\perp = \pi^*(\alpha) \setminus \gamma$  sobre  $G_{a-k}(\alpha)$  cujas dimensões são  $a-k$  e  $k$  respectivamente. Dado um plano de dimensão  $a-k$  em  $\alpha_x$ , a fibra de  $\gamma$  sobre este plano consta de todos os vetores contidos neste plano.

*Lema III.3*

O espaço  $A^k(\alpha, \beta)$  é homeomorfo ao espaço  $A^k(\gamma^\perp, \pi^*(\beta)) = \text{Mono}(\gamma^\perp, \pi^*(\beta))$ .

*Demonstração:*

Seja  $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$  um morfismo de posto  $k$ . Escrevemos  $\alpha_x = \text{Ker } h \oplus \text{Coim } h$ . A restrição de  $h$  a  $\text{Coim } h$  é um monomorfismo, portanto, produz um elemento de  $A^k(\gamma^\perp_{\bar{P}_k(h)}, \pi^*(\beta)_{\bar{P}_k(h)})$ .

Por outro lado, seja  $\ell : \gamma^\perp_L \rightarrow \pi^*(\beta)_L$  um monomorfismo onde  $L \in G_{a-k}(\alpha_x)$  para algum  $x \in M$ . Então  $\alpha_x = L \oplus L^\perp$  e definimos  $h : \alpha_x \rightarrow \beta_x$  por  $h|_{L^\perp} = \ell$ ,  $h|_L = 0$ . Isto é,  $h \in A^k(\alpha_x, \beta_x)$  e  $\bar{P}_k(h) = L$ .

C.Q.D.

*Proposição III.4*

A projeção  $\bar{P}_k : A^k(\alpha, \beta) \rightarrow G_{a-k}(\alpha)$  induz um isomorfismo

$$(\bar{P}_k)_* : \Omega_1(A^k(\alpha, \beta); \tilde{\phi}) \rightarrow \Omega_1(G_{a-k}(\alpha); \phi)$$

para  $i < b - k$  e um epimorfismo para  $i = b - k$ , onde  $\phi$  denota o fibrado estável

$$\gamma \otimes \pi^*(\beta) + \gamma \otimes \gamma - \gamma \otimes \pi^*(\alpha) - \pi^*(\tau(M)).$$

*Demonstração:*

Notemos que  $\tilde{p}^*(\beta) - \tilde{p}^*(\alpha) / \hat{Ker}$  é isomorfo a  $\hat{Coker}$  como fibrados estáveis sobre  $A^k(\alpha, \beta)$ . Conseqüentemente

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_k)^*\phi &= \hat{Ker} \otimes \tilde{p}^*(\beta) + \hat{Ker} \otimes \hat{Ker} - \hat{Ker} \otimes \tilde{p}^*(\alpha) - \tilde{p}^*(\tau(M)) \\ &= \hat{Ker} \otimes \hat{Coker} - \tilde{p}^*(\tau(M)) = \tilde{\phi} . \end{aligned}$$

Pelo Lema III.3, deduzimos que  $\tilde{p}_k$  é uma fibração cuja fibra é a variedade de Stiefel  $V_k(\mathbb{R}^b) = \text{Mono}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^b)$ . Sendo que  $V_k(\mathbb{R}^b)$  é  $(b-k-1)$ -conexa, sabemos que  $\tilde{p}_k$  induz isomorfismos em homologia até dimensão  $b-k$  e um epimorfismo em dimensão  $b-k$ . O resultado segue-se deste fato, da identificação de bordismo normal com homotopia estável de complexos de Thom, do isomorfismo de Thom, e do Teorema de Whitehead [6].

C.Q.D.

*Exemplo:*

Seja  $b = \dim \beta = n$ . Existe um  $(a-1)$ -morfismo regular  $u : \alpha \rightarrow \beta$  caso  $n < 2(b-a) + 4$ , isto é, caso  $2a < n + 4$ . A obstrução  $\tilde{\omega}_a(\alpha, \beta)$  detecta a existência de um monomorfismo entre  $\alpha$  e  $\beta$  caso  $n+2 < 2(n-a+1)$ , isto é,  $2a < n$ , pelo Teorema Fundamental.

Seja  $G_1(\alpha) = \text{RP}(\alpha)$  o fibrado projetivo associado a  $\alpha$ . Então  $\tilde{p}_{a-1} : A^{a-1}(\alpha, \beta) \rightarrow \text{RP}(\alpha)$  induz um isomorfismo

entre  $\Omega_{a-1}(A^{a-1}(\alpha, \beta); \tilde{\phi})$  e  $\Omega_{a-1}(RP(\alpha); \phi)$  pela proposição.

Concluimos que  $\omega_a(\alpha, \beta) = (\tilde{p}_{a-1})_*(\tilde{\omega}_a(\alpha, \beta)) = 0$  se e somente se existe um monomorfismo de  $\alpha$  em  $\beta$ , caso  $2a < n$ . Tomemos  $\alpha = \tilde{R}^a$ , o fibrado trivial de dimensão  $a$ . Para  $2a < n = \dim \beta$ , a obstrução  $\omega_a(\tilde{R}^a, \beta)$  e  $\in \Omega_{a-1}(RP^{a-1} \times M; \phi)$  onde  $\phi = \lambda \otimes \beta - \lambda \otimes \alpha - \tau(M)$ .

Consideremos brevemente o problema da existência de um monomorfismo  $u: \alpha^1 \rightarrow \tau(M)$  onde  $\alpha^1$  é um fibrado qualquer de linhas sobre  $M^n$ ,  $n > 2$ . A obstrução  $\tilde{\omega}_1(\alpha^1, \tau(M))$  pertence ao grupo  $\Omega_0(A^0(\alpha, \tau(M)); \tilde{\phi})$  onde  $\tilde{\phi} = \alpha \otimes \tau(M) - \tau(M)$ .

Já vimos que este grupo é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  caso  $w_1(\tilde{\phi}) = 0$  e a  $\mathbb{Z}/2$  caso  $w_1(\tilde{\phi}) \neq 0$  onde  $w_1(\tilde{\phi}) = nw_1(\alpha) + w_1(M) + w_1(M) = nw_1(\alpha)$ .

Além disso, podemos identificar  $A^0(\alpha, \beta)$  com a base  $M$  por meio da secção nula.

Então a singularidade  $S$  é obtida como a intersecção transversal de  $M$  com a secção nula ( $M$  também) em  $\text{Hom}(\alpha, \tau(M))$ .

Este conjunto finito  $S$  representa  $\tilde{\omega}_1(\alpha, \tau(M))$ .

Caso o grupo de bordismo normal seja  $\mathbb{Z}/2$ , a classe representada por  $S$  é apenas o número de pontos de  $S$  contados módulo 2.

Caso o grupo seja o grupo  $\mathbb{Z}$  dos inteiros, é necessário associar  $+1$  ou  $-1$  à cada singularidade, dependendo

das orientações locais e somar estes números.

O seguinte resultado foi obtido por U. Koschorke [2].

*Teorema III.5*

Para  $n$  ímpar  $\alpha^1$  é um subfibrado de  $\tau(M)$  se e somente se a classe de Stiefel-Whitney  $w_n(\tau(M) - \alpha)$  é nula.

Para  $n$  par e  $n > 2$ ,  $\alpha^1$  é um subfibrado de  $\tau(M)$  se e somente se o número de Euler  $\chi(M)$  é nulo.

*Demonstração (Esboço):*

Caso  $n$  seja ímpar,  $w_1(\tilde{\phi}) = w_1(\alpha)$ . A obstrução  $\tilde{w}_1(\alpha, \tau(M))$  portanto pertence ao grupo  $\mathbb{Z}/2$  para  $w_1(\alpha) \neq 0$ . Além disso, sabemos que  $S$  em homologia é o dual de Poincaré da classe de Stiefel-Whitney  $w_n(\tau(M) - \alpha)$ , a obstrução primária em cohomologia. Notemos que  $\alpha^1$  é trivial se e somente se  $w_1(\alpha) = 0$ .

Para  $n$  ímpar e  $\alpha$  trivial, o número de Euler é 0, mas também representa a obstrução para que  $R^1$  seja um subfibrado. Neste caso  $w_n(\tau(M)) = 0$  claramente.

Consideremos  $n$  par. Neste caso, o fibrado  $\tilde{\phi}$  é sempre orientável. Estamos buscando uma condição necessária e suficiente para que o fibrado vetorial  $\text{Hom}(\alpha, \tau(M))$  de dimensão  $n$  possui uma secção não-nula.

Pela teoria clássica de obstruções, sabemos que a clas

se de Euler  $e(\text{Hom}(\alpha, \tau(M)) = e(\alpha \otimes \tau(M))$  representa a obstrução total. Isto é,  $e(\alpha \otimes \tau(M)) \in H^n(M; Z_{w_1(M)})$  é dual no sentido de Poincaré à classe  $[S] \in H_0(M; Z) = Z$ .

Afirmamos que  $e(\alpha \otimes \tau(M)) = e(\tau(M)) = \chi(M)$  gerador.

Esta afirmação segue-se da identificação da classe de Euler do fibrado universal  $\gamma^n \otimes \gamma^1$  sobre  $BO(n) \times BO(1)$  com  $e(\gamma^n)$  para  $n$  par. Aqui  $\gamma^n$  denota o fibrado universal de dimensão  $n$  sobre  $BO(n)$ . Conseqüentemente,  $\tilde{w}_1(\alpha, \tau(M)) = 0$  se e somente se  $\chi(M) = 0$  para  $n$  par.

*Observação:*

A teoria não se aplica ao estudo de subfibrado de linhas nos fibrados tangentes de superfícies, mas neste caso os resultados podem ser obtidos diretamente.

Como vimos o Teorema Principal de Koschorke produz uma única obstrução num grupo de bordismo normal para a existência de um monomorfismo entre fibrados vetoriais  $\alpha^a$  e  $\beta^b$  sobre uma variedade  $M^n$  caso  $b-a > n/2$ . Ulrich Koschorke desenvolveu uma seqüência exata pelo método de singularidades que envolve os grupos de bordismo normal em dimensões baixas. Esta seqüência exata é a ferramenta principal utilizada por Koschorke [3]. Vamos considerar nestas notas uma parte da seqüência exata. O nosso objetivo é explicar como é que esta seqüência exata pode ser aplicada ao seguinte problema:

"Seja  $\alpha^2$  um fibrado vetorial qualquer de planos sobre uma variedade diferenciável, compacta, sem bordo, conexa de dimensão  $n$ . Determinar condições necessárias e suficientes em termos de números característicos para que  $\alpha$  seja um subfibrado do fibrado tangente  $\tau(M)$ ".

### III.6 - A SEQUÊNCIA EXATA EM BORDISMO NORMAL

Sejam  $X$  um complexo celular qualquer e  $\phi$  um fibrado vetorial estável qualquer sobre  $X$ . Koschorke derivou a seguinte sequência exata, descrita na página 94 em [3].

$$\Omega_2(X; \phi) + \bar{\Omega}_2(X; \phi) \xrightarrow{\sigma \circ j_2} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\delta_1} \Omega_1(X; \phi) \xrightarrow{f_1} \bar{\Omega}_1(X; \phi) + 0$$

Os grupos  $\bar{\Omega}_m(X; \phi)$  utilizam menos informação do que os grupos  $\Omega_m(X; \phi)$  de bordismo normal.  $\bar{\Omega}_m(X; \phi)$  consta de classes de equivalência de triplas  $(N^m, g: N^m \rightarrow X, \text{or})$  onde  $\text{or}$  é um isomorfismo entre os fibrados de linhas dados pelo determinante. Isto é, denotemos por  $\xi_\phi$  o fibrado de determinante associado a qualquer fibrado vetorial (inclusive estável)  $\phi$ .

Então  $\xi_\phi$  é um fibrado vetorial de linhas com  $w_1(\xi_\phi) = w_1(\phi)$  or:  $\xi_{\nu(N)} + \xi_{g^*\phi}$  é um isomorfismo. Existe o morfismo de Hurewicz  $\mu: \bar{\Omega}_m(X; \phi) \rightarrow H_m(X; \mathbb{Z}_{w_1(\phi)})$  que leva  $[(N^m, g, \text{or})]$  a  $g_*[N] \in H_m(X; \mathbb{Z}_{w_1(\phi)})$ .

Aqui  $[N]$ , a classe fundamental, gera  $H_m(N; Z_{w_1(N)}) \cong Z$ .  
O morfismo de Hurewicz é um isomorfismo para  $m = 1$ .

Em particular,  $\bar{\Omega}_1(X; \phi)$  coincide com o grupo  $\Omega_1(X)$  de bordismo orientado de  $X$  que é isomorfo a  $H_1(X; Z)$  caso  $w_1(\phi) = 0$ .

Os morfismos  $f_2$  e  $f_1$  na sequência acima provêm de restrição. Isto é, um isomorfismo  $G: v(N) \cong g^*(\phi)$  certamente fornece um isomorfismo  $or: \xi_{v(N)} \rightarrow \xi_{g^*(\phi)}$  entre os fibrados determinantes. O morfismo  $\sigma \circ j_2$  leva uma classe  $[(N^2, g: N \rightarrow X, or: \xi_{v(N)} \rightarrow \xi_{g^*(\phi)})]$  qualquer em  $\bar{\Omega}_2(X; \phi)$  ao elemento em  $Z/2$  dado pelo número  $w_2(g^*(\phi))[N]$  e  $Z/2$ .

Isto é, avaliamos a segunda classe de Stiefel-Whitney do fibrado induzido  $g^*(\phi)$  sobre  $N$  na classe fundamental mod 2 de  $N$ .

A cópia de  $Z/2$  corresponde ao grupo  $\pi_1^S = \pi_{N+1}(S^N)$  para  $N > 2$ . A imagem do gerador por  $\delta_1$  corresponde à classe da tripla  $(S^1, c: S^1 \rightarrow X, \text{trivialização canônica estável de } \tau(S^1))$  onde  $c: S^1 \rightarrow X$  é a aplicação constante. É extremamente difícil detectar a imagem de  $Z/2$  por  $\delta_1$  em geral, como veremos. Conseqüentemente sempre buscamos condições para que  $\sigma \circ j_2$  seja sobrejetora e, equivalentemente, o morfismo  $\delta_1$  seja nulo.

Voltaremos ao problema de mergulhar  $\alpha^2$  em  $\tau(M)$  como subfibrado. O Teorema Fundamental de Koschorke produz um elemento  $\omega_2(\alpha, \tau(M))$  em  $\Omega_1(RP(\alpha); \Psi)$  que representa a

obstrução total. Aqui  $RP(\alpha)$  denota o fibrado projetivo associado ao fibrado vetorial  $\alpha^2$ . O fibrado estável  $\Psi$  sobre  $RP(\alpha)$  é o fibrado  $\lambda \otimes \pi^*(\tau(M)) - \lambda \otimes \pi^*(\alpha) - \pi^*(\tau(M))$  onde  $\lambda$  é o fibrado canônico de linhas sobre o espaço total  $RP(\alpha)$ ,  $\pi : RP(\alpha) \rightarrow M$  é a projeção canônica. Relembramos que a cohomologia  $H^*(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2)$  é um módulo sobre  $H^*(M; \mathbb{Z}/2)$  gerado pela classe  $x = w_1(\alpha)$  módulo a relação

$$x^2 + x \cdot \pi^*(w_1(\alpha)) + \pi^*(w_2(\alpha)) = 0.$$

Conseqüentemente, escreveremos

$$H^*(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2) = H^*(M; \mathbb{Z}/2)[x] / (x^2 + xw_1(\alpha) + w_2(\alpha))$$

e omitiremos o morfismo  $\pi^*$  para classes que provêm da base  $M$ .

Os dois lemas a seguir nos fornecerão expressões para  $w_1(\Psi)$  e  $w_2(\Psi)$ .

*Lema III.7*

$$w_1(\Psi) = nx + w_1(\alpha)$$

*Demonstração:*

Os fibrados  $\Psi + \lambda \otimes \alpha + \tau(M)$  e  $\lambda \otimes \tau(M)$  são isomorfos estavelmente.

Tomando a primeira classe de Stiefel-Whitney de cada fibrado, temos que

$$w_1(\Psi) + w_1(\lambda \otimes \alpha) + w_1(M) = w_1(\lambda \otimes \tau(M))$$

mas  $w_1(\lambda \otimes \alpha) = w_1(\alpha)$  e  $w_1(\lambda \otimes \tau(M)) = w_1(M) + n w_1(\lambda)$ .  
(Ver a fórmula na página 98 [3] para as classes de Stiefel-Whitney do produto tensorial). Segue-se então que  $w_1(\Psi) = nx + w_1(\alpha)$ .

C.Q.D

Seja  $\lambda^1$  o fibrado complementar a  $\lambda$  em  $\pi^*(\alpha)$ . Isto é,  $\lambda \otimes \lambda^1 = \pi^*(\alpha)$  sobre  $RP(\alpha)$ .

Pelo Lema III.7 temos que

$$\pi^*(w_1(\alpha)) = w_1(\lambda) + w_1(\lambda^1). \text{ Isto é } w_1(\lambda^1) = x + w_1(\alpha).$$

Lema III.8

$$w_2(\Psi) = xw_1(M) + \binom{n+1}{2} xw_1(\alpha) + \binom{n}{2} w_2(\alpha) + w_1^2(\alpha).$$

Demonstração:

$\Psi + \lambda \otimes \alpha$  é isomorfo estavelmente ao fibrado virtual  $\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)$ . Pelo cálculo feito na página 98 de [3] sabemos que  $w_2(\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)) = \binom{n}{2} x^2 + xw_1(M)$ . Além disso  $w_2(\lambda \otimes \alpha) = w_1^2(\lambda) + w_1(\lambda)w_1(\alpha) + w_2(\alpha) = x^2 + xw_1(\alpha) + w_2(\alpha) = 0$  em  $H^2(RP(\alpha); \mathbb{Z}/2)$ .

$$\begin{aligned} \text{J\AA sabemos que } w_1(\Psi)w_1(\lambda \otimes \alpha) &= (nx + w_1(\alpha)) \cdot w_1(\alpha) = \\ &= n \times w_1(\alpha) + w_1^2(\alpha) . \end{aligned}$$

Conclu\imos que

$$\begin{aligned} w_2(\Psi) &= w_2(\lambda \otimes \tau(M) - \tau(M)) + w_2(\lambda \otimes \alpha) + w_1(\Psi)w_1(\lambda \otimes \alpha) = \\ &= \binom{n}{2} [xw_1(\alpha) + w_2(\alpha)] + xw_1(M) + nxw_1(\alpha) + w_1^2(\alpha) = \\ &= xw_1(M) + \binom{n+1}{2} xw_1(\alpha) + \binom{n}{2} w_2(\alpha) + w_1^2(\alpha) . \end{aligned}$$

C.Q.D.

Podemos agora reparar a seguinte situa\~ao: Seja  $\alpha^2$  o fibrado trivial  $\underline{R}^2$  de planos sobre uma variedade  $M^n$  orient\avel qualquer. Ent\ao as classes  $w_1(\alpha)$ ,  $w_2(\alpha)$  e  $w_1(M)$  s\ao classes triviais. Segue-se portanto que  $w_2(\Psi) = 0$ , e conseq\uentemente,  $\delta_1 : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}P(\alpha) ; \Psi)$  \u00e9 um monomorfismo.

J\AA sabemos pelo trabalho de Atiyah-Dupont que a obstru\~ao total  $w_2(\underline{R}^2, \tau(M))$  possui uma componente n\ao trivial em geral em  $\delta_1(\mathbb{Z}/2)$  para  $n \equiv 0 \pmod{4}$  e  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . As componentes em  $\delta_1(\mathbb{Z}/2)$  s\ao dadas por

a)  $1/2 (\chi(M) - (-1)^S \sigma(M)) \pmod{2}$  onde  $n = 4s$ ,  $\sigma(M)$  de nota a assinatura de  $M$  e

b)  $R(M) \in \mathbb{Z}/2$  a semi-caracter\istica para  $n \equiv 1 \pmod{4}$ .

A semi-caracter\istica \u00e9 definida por

$$R(M) = [(\sum_{i \geq 0} \text{posto } H_{2i}(M; \mathbb{Z}/2)) \bmod 2 + (w_2(M) \cup w_{n-2}(M))[M]] \bmod 2$$

Já sabemos que  $\bar{\Omega}_1(\mathbb{R}P(\alpha); \Psi)$  é isomorfo a  $H_1(\mathbb{R}P(\alpha); \mathbb{Z}_{w_1(\Psi)})$ . Isto é,  $f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M)))$  é detectado por homologia, enquanto a obstrução  $\omega_2(\alpha, \tau(M))$  de Koschorke pode ser mais complicada. O seguinte teorema fornece muitas situações onde o anulamento da imagem é equivalente ao anulamento da obstrução.

*Teorema III.9*

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável, compacta sem bordo e conexa, que é não-orientável e cuja dimensão  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$ . Seja  $\alpha^2$  um fibrado vetorial qualquer de planos sobre  $M$ . Então existe um monomorfismo de  $\alpha^2$  em  $\tau(M)$  se e somente se

$$f_1(\omega_1(\alpha, \tau(M))) = 0 \text{ e } \bar{\Omega}_1(\mathbb{R}P(\alpha); \Psi)$$

*Demonstração*

Queremos construir explicitamente um elemento em  $\bar{\Omega}_2(\mathbb{R}P(\alpha); \Psi)$  cuja imagem por  $\sigma \circ j_2$  é não nula, portanto  $\delta_1$  será nulo.

Temos 2 casos a considerar:

*Caso I*

$$w_1(\alpha) = w_1(M) \neq 0$$

Tomemos uma aplicação qualquer  $g : S^1 \rightarrow M$  tal que  $g^*(w_1(M)) \neq 0$ . Conseqüentemente,  $g^*(\alpha) = \xi \otimes \underline{R}^1$  onde  $\xi$  denota o fibrado de Hopf de linhas sobre  $S^1$ .

Consideremos o seguinte diagrama entre os fibrados projetivos associados aos fibrados  $\alpha$  e  $g^*(\alpha) = \xi \otimes \underline{R}^1$ .

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \\
 \searrow & & \searrow \\
 \text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1) & \xrightarrow{h} & \text{RP}(\alpha) \\
 \downarrow p & & \downarrow \pi \\
 S^1 & \xrightarrow{g} & M
 \end{array}$$

Notemos que  $\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)$  é a garrafa de Klein. Sabemos que o fibrado tangente  $\tau(\text{RP}(\alpha)) = \pi^*(\tau(M)) \otimes \lambda \otimes \lambda^1$  enquanto que  $\tau(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)) = p^*(\tau(S^1)) \otimes h^*(\lambda \otimes \lambda^1)$ . Sendo que  $w_1(\alpha) = w_1(M) = w_1(\lambda \otimes \lambda^1)$ , concluímos que  $h^*(w_1(\Psi)) = h^*(w_1(\alpha)) = w_1(h^*(\lambda \otimes \lambda^1)) = w_1(\nu(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1)))$ .

Assim obtemos um elemento  $[\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1), h, \text{or}]$  em  $\bar{\Omega}_2(\text{RP}(\alpha); \Psi)$ .

A imagem deste elemento por  $\sigma \circ j_2$  é detectada por  $h^*(w_2(\Psi))$ . Agora  $h^*(w_2(\Psi))$  pelo Lema III.8 é dada por  $h^*(xw_1(M) + w_1^2(M))$  pois  $\binom{n+1}{2} \equiv \binom{n}{2} \equiv 0 \pmod{2}$ . Portanto  $h^*(w_2(\Psi)) = h^*(x \cdot p^*(g^*(w_1(M)))$ , que gera  $H^2(\text{RP}(\xi \otimes \underline{R}^1); \mathbb{Z}/2)$ .

## Caso II

$w_1(\alpha) \neq w_1(M)$  e  $w_1(M) \neq 0$ . Tomemos uma aplicação  $g : S^1 \rightarrow M$  tal que  $g^*(w_1(M)) \neq 0$ , mas  $g^*(w_1(\alpha)) = 0$ . Tal aplicação existe, pois  $H^1(M; \mathbb{Z}/2) = \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}/2), \mathbb{Z}/2)$ .

O fibrado induzido  $g^*(\alpha) = \mathbb{R}^2$ , cujo fibrado projetivo  $\text{RP}(g^*(\alpha))$  sobre  $S^1$  é o toro  $S^1 \times S^1$ . Outra vez, nós consideramos o seguinte diagrama de fibrados projetivos associados a  $\alpha$  e  $g^*(\alpha)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} S^1 \\ \searrow \\ S^1 \times S^1 \end{array} & \xrightarrow{h} & \begin{array}{c} S^1 \\ \searrow \\ \text{RP}(\alpha) \end{array} \\
 P \downarrow & & \downarrow \pi \\
 S^1 & \xrightarrow{g} & M
 \end{array}$$

Notemos que  $h^*(w_1(\Psi)) = h^*(\pi^*(w_1(\alpha))) = p^*(g^*(w_1(\alpha))) = 0 = w_1(S^1 \times S^1)$ . Conseqüentemente, obtemos um elemento

$$[(S^1 \times S^1, h, \text{or})] \in \bar{\Omega}_2(\text{RP}(\alpha), \Psi).$$

A imagem deste elemento  $\sigma \circ j_2$  é detectada por  $h^*(w_2(\Psi))$ . Agora  $h^*(w_2(\Psi))$  pelo Lema III.8 é dada por  $h^*(xw_1(M) + w_1^2(\alpha)) = h^*(x) \cdot p^*(g^*(w_1(M))) + p^*(g^*(w_1^2(\alpha))) = h^*(x) \cdot p^*g^*(w_1(M))$ , que gera  $H^2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}/2)$ . Segue-se que  $f_1$  é um isomorfismo entre  $\Omega_1(\text{RP}(\alpha); \Psi)$  e  $\bar{\Omega}_1(\text{RP}(\alpha); \Psi)$ .

C.Q.D.

Podemos esboçar agora uma demonstração do seguinte resultado.

*Teorema III.10*

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável, compacta sem bordo e conexa, que é não-orientável e cuja dimensão  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \geq 8$ . Seja  $\alpha$  um fibrado vetorial qualquer de planos sobre  $M$ . Então existe um monomorfismo de  $\alpha$  em  $\tau(M)$  se e somente se existe uma classe  $v$  em  $H^{n-2}(M; Z_{w_1(\alpha)+w_1(M)})$  tal que  $v$  reduz módulo 2 à classe de Stiefel-Whitney  $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$  e, além disso,

$$v \cdot e(\alpha) = e(\tau(M)) \quad \text{em} \quad H^n(M; Z_{w_1(M)}) .$$

*Demonstração (esboço):*

Pelo Teorema III.9, basta provar que

$$f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M))) = 0 \quad \text{em} \quad \bar{\Omega}_1(\text{RP}(\alpha); \psi) .$$

Já vimos que  $\bar{\Omega}_1(\text{RP}(\alpha); \psi) \cong H_1(\text{RP}(\alpha); Z_{w_1(\alpha)})$ . Considere primeiro a classe  $\pi_*(f_1(\omega_2(\alpha, \tau(M))))$  em  $H_1(M; Z_{w_1(M)})$  onde  $\pi: \text{RP}(\alpha) \rightarrow M$  é a projeção natural. Esta classe é Poincaré dual à classe de Whitney torcida  $w_{n-1}(\tau(M) - \alpha)$ . Consequentemente, ela é nula se e somente se existe uma classe  $u$  em  $H^{n-2}(M; Z_{w_1(M)+w_1(\alpha)})$  que reduz módulo 2 à

$w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$  .

Façamos agora a seguinte observação. Caso  $\tau(M)$  admita alguma decomposição  $\tau(M) = \alpha \oplus \eta$  , então claramente obtemos a seguinte equação envolvendo classes de Euler

$$e(\tau(M)) = e(\alpha) \cdot e(\eta) .$$

Além disso,  $e(\eta)$  reduz módulo 2 à  $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$  , pois o fibrado  $\eta$  é estavelmente equivalente ao fibrado estável  $\tau(M) - \alpha$  . Esta condição necessária para o anulamento da obstrução  $f_1(w_2(\alpha, \tau(M)))$  é também suficiente. Isto é, a obstrução  $f_1(w_2(\alpha, \tau(M))) = 0$  se e somente se existe uma classe  $v$  que reduz módulo 2 à  $w_{n-2}(\tau(M) - \alpha)$  e satisfaz a equação  $v \cdot e(\alpha) = e(\tau(M))$  . Tal classe  $v$  será a classe de Euler  $e(\eta)$  para algum fibrado  $\eta$  satisfazendo  $\alpha \oplus \eta = \tau(M)$  . (Uma demonstração deste fato por meio de torres de Postnikov foi publicada em [4] ) .

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] J. P. Dax, Etude homotopique des espaces de plongements, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 5 (1972), 303-377.
- [ 2 ] U. Koschorke, Concordance and bordism of line fields, Inventiones Math. 24 (1974), 241-268.
- [ 3 ] U. Koschorke, Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms - A Singularity Approach . Lecture Notes # 847 , Springer-Verlag (1981).
- [ 4 ] M. H. P. L. Mello, Two-plane Sub-bundles of nonorientable real vector bundles , Manuscripta Math. 57 (1987), 263-280.
- [ 5 ] M. Olivero, Morfismos entre fibrados vetoriais complexos, tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (1987).
- [ 6 ] H. A. Salomonsen, Bordism and geometric dimension, Math. Scand. 32 (1973), 87-111.