UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Programação linear
e
Programação não linear

MÁRCIO ZENI PROSDOCIMO
ROSELI A. FRANCELIN ROMERO

No. 20

NOTAS DIDÁTICAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2585

Programação linear
e
Programação não linear

MÁRCIO ZENI PROSDOCIMO
ROSELI A. FRANCELIN ROMERO

No. 20

NOTAS DIDÁTICAS DO ICMSC

São Carlos
Dez./1995

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

PROGRAMAÇÃO LINEAR

E

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

MÁRCIO ZENI PROSDOCIMO

ROSELI A. FRANCELIN ROMERO

DEZEMBRO - 1995

Este trabalho foi realizado com o apoio do
PROGRAMA DE APERFEIÇOAMENTO EM ENSINO - PAE.

PARTE 1

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

Os modelos de otimização podem ser colocados na seguinte forma geral:

Caso Geral (Problema Restrito)

$$\begin{array}{ll} \text{min (max)} & f(\underline{x}) \\ \text{sujeito a} & g(x) = 0 \\ & h(x) \leq 0 \\ & x \in \Omega \end{array}$$

Linear

$$\begin{array}{ll} \text{min (max□)} & c^T x \\ \text{sujeito a} & [A]\, x = b \\ & x^{min} \leq x \leq x^{max} \end{array}$$

Problema Irrestrito

$$\begin{array}{ll} \text{min (max)} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

I. REVISÃO

FUNÇÕES

$f: R^n \rightarrow R$ é contínua em $x = x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad x \rightarrow f(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R$

TEOREMA DE WEIERSTRAS

Uma função f contínua num <u>compacto</u> S <u>tem</u> um ponto de mínimo em S, isto é, $\exists\, x^* \in S \,/\, \forall\, x \in S,\ f(x) \geq f(x^*)$.

Um conjunto de funções a valores reais $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sobre R^n pode ser olhado como um vetor função único: $\quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$

$$f: R^n \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$$

Esta função é <u>contínua</u> sEcada uma de suas componentes for contínua.

Se isto acontecer, $f \in C$. Se cada função componente tem derivada primeira contínua $\Rightarrow f \in C^1$ e assim por diante.

<u>Definição 1</u>: **(Vetor Gradiente)**

Seja $\qquad f: R^n \rightarrow R$

$\qquad x \rightarrow f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad$ de classe C^1,

então, define-se o gradiente de f como sendo o vetor:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

<u>Definição 2</u>: **(Matriz Hessiana)**

Se $f \in C^2$, então define-se a <u>matriz Hessiana</u> de f em x, denotando por $\nabla^2 f(x)$ ou $H(x)$

$$\nabla^2 f(x) = H(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

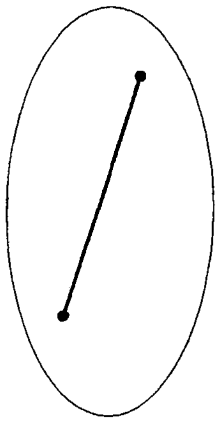
Desde que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a matriz Hessiana é simétrica.

CONJUNTOS E FUNÇÕES CONVEXAS

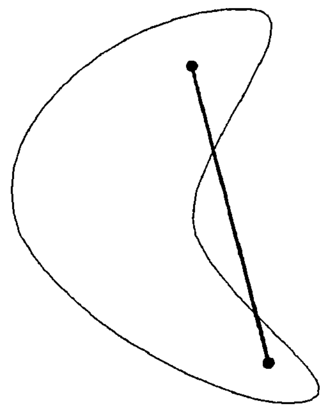
Definição 3: Um conjunto $\Omega \subset R^n$ é convexo se para qualquer

$$x_1, x_2 \in \Omega \text{ e } \forall \lambda \in \Omega, 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ então } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega$$

Então, pode-se dizer que Ω é convexo, se qualquer segmento de reta que liga quaisquer 2 de seus pontos, pertence ao conjunto Ω.



Conjunto CONVEXO



Conjunto NÃO-CONVEXO

Proposição 1: Um conjunto $\Omega \subset R^n$ satisfaz as seguintes propriedades:

I) Se Ω é convexo e $\beta \in R$,

então $\beta\Omega = \{y \mid y = \beta x,\ x \in \Omega\}$ é convexo.

II) Se Ω_1 e Ω_2 são convexos,

então $\Omega_1 + \Omega_2 = \{y \mid y = x + z,\ x \in \Omega_1 \text{ e } z \in \Omega_2\}$ é convexo.

III) A intersecção de quaisquer conjuntos convexos é convexa.

Se Ω_1 e Ω_2 são convexos, então $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{y \mid y \in \Omega_1 \text{ e } y \in \Omega_2\}$ é convexo.

Definição 4: Dizemos que uma função $f: R^n \to R$ definida sobre um conjunto convexo Ω, é convexa (fig. 1) se, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$, $\lambda \in [0,1]$ tivermos:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Obs.: Se para $\forall \lambda \in (0,1)$ e $x_1 \neq x_2$ tivermos:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

então f é dita estritamente convexa.

Definição 5: A função g definida no conjunto convexo Ω é dita ser concava (fig. 2 e 3), se a função f = -g é convexa. A função g é dita estritamente concava se f = -g é estritamente convexa.

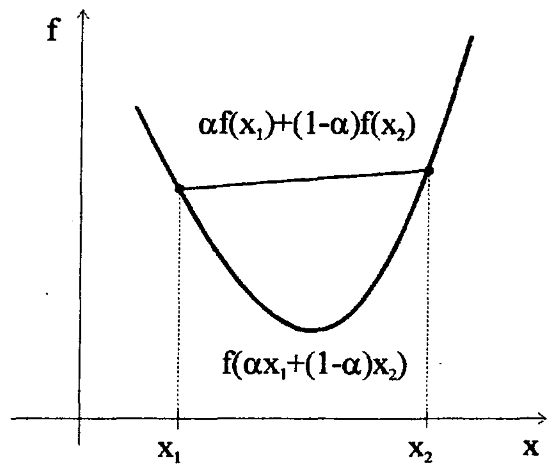


Figura 1. Função CONVEXA

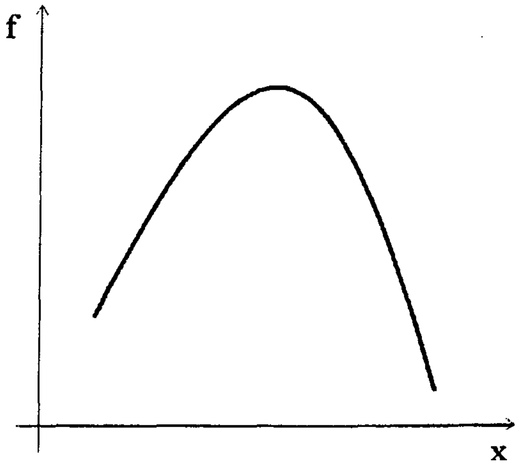


Figura 2. Função NÃO-CONVEXA

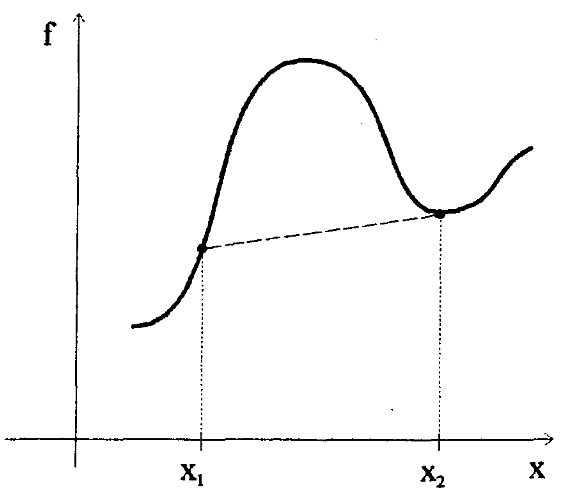


Figura 3. Função CONCAVA

MATRIZ

Definição 6: Uma matriz D é dita semi-definida positiva, se o elemento $d_{1,1} > 0$ e os seguintes determinantes são todos não negativos:

$$\begin{vmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \ldots \quad |D| \geq 0$$

Se valer a desigualdade estrita, então D é dita <u>definida positiva</u>.

Podemos, também, dizer que D é semi-definida positiva, se para

$$\forall\, y \in R^n,\ y^T D y \geq 0$$

e que D é definida positiva, se para

$$\forall\, y \neq 0 \in R^n,\ y^T D y > 0$$

<u>Obs</u>.: Se D é definida (semi-definida) positiva, -D é <u>definida (semi-definida) negativa</u>.

<u>Exemplo:</u> (a) Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 9x_2^2$. Verificar que a matriz Hessiana é definida positiva.

Solução:

A matriz Hessiana: $\nabla^2 f(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 8x_2$; $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 18x_2 - 8x_1$ $\therefore$ $\nabla^2 f(x) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 18 \end{vmatrix}$

$\Delta_1 = 4 > 0$ e $\Delta_2 = 136 > 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x)$ é uma matriz definida positiva.

(b) Pode-se verificar de outro modo, isto é, através de:

$x^T \nabla^2 f(x) x > 0$ para $x \neq 0 \in R^2$

$$[x_1 \quad x_2] \cdot \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = g(x_1, x_2)$$

$g(x_1, x_2) = 4(x_1 - 2x_2)^2 + 2x_2^2$

Observe que $g(x_1, x_2) > 0$ para $\forall\, x_1, x_2 \in R$. Então, $\nabla^2 f(x)$ é definida positiva.

Observe, também, que $f(x) = \dfrac{1}{2} x^T \cdot \nabla^2 f(x) \cdot x$, isto é, se dividirmos $g(x_1, x_2)$ por 2 obtemos $f(x_1, x_2)$.

A função que pode ser obtida através da fórmula

$$Q(x) = x^T \cdot D \cdot x,$$

onde D é uma matriz simétrica, é chamada de FORMA QUADRÁTICA. A forma quadrática difere da função quadrática pelo fato da forma quadrática não possuir nenhum termo linear ou escalar. Então

$$Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 2x_1x \quad -4x_2^2$$

é uma <u>forma</u> quadrática, enquanto que

$$f(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 2x_1x \quad -4x_2^2 - 6x_1 + x_2 + 7$$

é uma <u>função</u> quadrática.

A matriz simétrica da forma quadrática é única e

$$D = \frac{1}{2}\nabla^2 f(x)$$

<u>Proposição 2</u>: Seja $f \in C^2$. Então f é convexa sobre Ω convexo contendo 1 ponto interior, onde a matriz Hessiana de f é semi-definida positiva em todo ponto de Ω. A função f é <u>estritamente convexa</u> se a sua matriz Hessiana é <u>definida positiva</u> numa região.

II. CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

Estamos interessados em resolver o seguinte problema:

$$\begin{array}{lll} & \min \quad f(x) & \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega, \qquad \Omega \subset R^n, \qquad f: \Omega \subset R^n \to R & \end{array} \tag{1}$$

Obs.: $\Omega = R^n$, completamente irrestrito (na maioria dos casos).

Quais são as condições que devem ser satisfeitas num ponto solução?

Na verdade, essas condições são extensões para o R^n da caso para função de uma só variável, no que diz respeito a máximo e mínimo.

II.1. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE 1ª ORDEM

Dado o problema (1). Existe uma solução para o problema?

Esta pergunta pode ser respondida através do Teorema de Weierstras:

"Se f é contínua e Ω é compacto, então existe uma solução."

Contudo, nós estamos preocupados em caracterizar pontos solução e designar métodos efetivos para encontrá-los.

Existem 2 tipos de pontos soluções: Mínimo Local e Mínimo Global, cujas definições são apresentadas a seguir.

Definição 1: **(Ponto de Mínimo Local)**

Um ponto $x^* \in \Omega$ é um ponto de mínimo local (relativo) de f sobre Ω se $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall\, x$, $|x-x^*| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x^*)$.

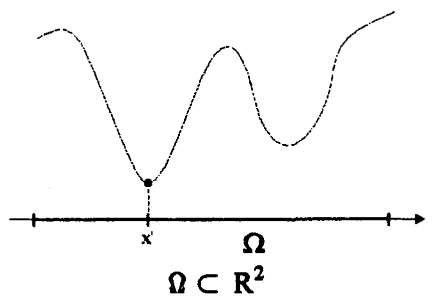
Se $f(x) > f(x^*)$, $x \neq x^* \Rightarrow x^*$ é chamado ponto de mínimo local estrito.

Definição 2: **(Ponto de Mínimo Global)**

Um ponto $x^* \in \Omega$ é um ponto de mínimo global de f sobre Ω se: $\forall\, x \in \Omega$, $f(x) \geq f(x^*)$

Se $f(x) > f(x^*)$, $\forall\, x \in \Omega$ é chamado ponto de mínimo global estrito.

Exemplo:



Nós estamos procurando um Ponto de Mínimo Global.

Na prática, entretanto, nós devemos nos contentar com um mínimo local. Algoritmos computacionais garantem Condição Necessária de Mínimo.

Condições Globais e soluções globais podem, somente ser encontrados, se o problema possuir certas propriedades de convexidade, as quais garantem que qualquer ponto mínimo é um ponto mínimo global.

Portanto, procuremos pontos de mínimo local. Antes, porém, precisamos da definição de direções factíveis.

Definição 3: (**Direções Factíveis**)

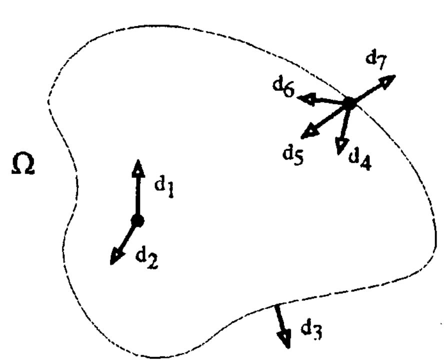
Dado $x \in \Omega$, dizemos que um vetor d é uma direção factível se dado $\alpha > 0$,

$$x+\alpha d \in \Omega \qquad \forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq d$$

Ao longo da direção d, f(x) pode ser escrita como uma função de uma única variável α.

$$f(x) = f(x^0+\alpha d) = g(\alpha)$$

então resultados do cálculo I podem ser aplicados.



Na figura 4 observamos que:

direções factíveis: d_1, d_2, d_4, d_5, d_6

direções não factíveis: d_3, d_7

Figura 4.

Proposição 1: **(Condição Necessária de 1ª ordem)**

Seja $f: \Omega \subset R^n \to R$, $f \in C^1$. Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre Ω, então para qualquer $d \in R^n$, direção factível em x^*, nós temos

$$\nabla f(x^*)d \geq 0.$$

Dem.: Seja x^* um ponto de mínimo local e d direção factível.
Então $\exists\, \alpha \geq 0 \,/\, x = x^* + \alpha d \in \Omega$ para $\forall\, 0 \leq \alpha \leq \alpha$
Desenvolvendo f em série de Taylor, em torno do ponto x^*:

$$f(x^*+\alpha d) = f(x^*) + \alpha \nabla f(x^*)d + r(\alpha) \qquad \text{onde } \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(\alpha)}{|\alpha|} \to 0$$

Vamos supor que:
$\alpha \nabla f(x^*)d < 0 \Rightarrow f(x^*+\alpha d) < f(x^*) \qquad \forall\, 0 \leq \alpha \leq \alpha$ (absurdo!)
$\therefore\ \nabla f(x^*)d \geq 0$

Corolário: **(Irrestrito)**

Se x^* no interior de Ω (como certamente seria o caso se $\Omega \subset R^n$). Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre Ω então

$\nabla f(x^*) = 0$ (condição de estacionaridade)

Dem.: Como x^* é interior $\Rightarrow$ todas as direções são factíveis $\Rightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$

Obs.: Deste corolário, obtemos um sistema de n equações $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ em n incógnitas (x_i^*) que, em muitos casos pode ser resolvido para determinar a solução. Na prática, um problema de otimização é resolvido diretamente.

Exemplo 1) min $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2$

Solução:
Este problema é irrestrito $\therefore\ \Omega = R^2$. Logo, calculando $\nabla f(x) = 0$, obtém-se
$2x_1 - x_2 = 0$
$-x_1 + 2x_2 = 3$
Resolvendo este sistema, conclui-se que o ponto $(x_1,x_2) = (1,2)$ é um candidato a mínimo local de f.

Exercicio 2) Verifique que o ponto $x^* = (0{,}5\ ;\ 0)$ é mínimo global de:

$$\min\ f(x_1,x_2)=x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1 x_2$$
$$x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0$$

e no entanto $\nabla f(x^*) \neq 0$

II.2. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE 2ª ORDEM

A Condição Necessária de 1ª ordem foi obtida fazendo-se uma aproximação de 1ª ordem da função f na vizinhança do ponto de mínimo local.

As condições adicionais podem ser obtidas fazendo aproximações de ordem maior.

As Condição Necessária de 2ª ordem, que são definidas em termos da matriz Hessiana $\nabla^2 f$ são de extrema importância.

Proposição 2: **(Condição Necessária 2ª ordem)**

Seja $\Omega \subset R^n$, $f \subset C^2$ e $f\colon \Omega \to R$

Se x^* é um ponto de mínimo local de f sobre Ω, então para qualquer direção factível d em Ω valem as relações:

I) $\nabla f(x^*)d \geq 0$

II) Se $\nabla f(x^*)d = 0$ então $d^T\nabla^2 f(x^*)d \geq 0$

Dem.: a) Se $f \in C^2$ então, pela Condição Necessária de 1ª ordem, vale (I)

b) Se x^* é um ponto de mínimo e $\nabla f(x^*)d = 0$, então, expandindo f em torno de x^*, até 2ª ordem:

$$f(x^* + \alpha d) = f + \nabla f(x^*)\cdot(\alpha d) + \frac{1}{2}(\alpha d)^T \nabla^2 f(x^*)\cdot(\alpha d) + r(\alpha)$$

onde $r(\alpha) \to 0$ mais rápidamente que α^2

Supor que $d^T\nabla^2 f(x^*)d < 0$, então $f(x^* + \alpha d) < f(x^*)$ para $\forall\ \alpha$ (absurdo!)

Exemplo Consideremos: $\min\ f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2 + x_1 x_2$

$x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1/2 \quad 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 + x_1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(1/2 \quad 0) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \; \nabla f(x^*) = (0 \quad 3/2) \Rightarrow \nabla f(x^*)d = (0 \quad 3/2)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}d_2$$

Se $d_2 \geq 0 \Rightarrow$ é válida condição (I) da proposição 2

A condição (II) da proposição 2 só se aplica se $d_2 = 0$ então $d = (d_1 \quad 0)^T$

$$\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 f(x^*)d = \begin{pmatrix} 2d_1 + d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$d^T \nabla^2 f(x^*)d = 2d_1^2 \geq 0$$

$\therefore$ condição (II) satisfeita.

<u>Proposição 3</u>: (**Caso Irrestrito**)

Se x^* está no interior de Ω e x^* é um mínimo local sobre Ω, então:

I) $\nabla f(x^*)d = 0$

II) $d^T \nabla^2 f(x^*)d \geq 0 \quad \forall\, d$

Obs.: A condição (II) é equivalente a dizer que a matriz Hessiana é semi-definida positiva

Essa matriz é muito importante na análise de métodos iterativos para resolver problemas de otimização irrestrita.

II.3. CONDIÇÕES SUFICIENTES

Quais são as condições suficientes que indicam que x^* é um mínimo local?

As condições que colocaremos só se aplicam a <u>problemas irrestritos</u> ou para problemas onde o ponto de mínimo está no interior da região factível, desde que as condições correspondentes a problema onde o mínimo é obtido sobre o contorno do conjunto factível não estão dentro do escopo deste trabalho.

Proposição 4: **(Condição Suficiente de 2ª ordem - Caso Irrestrito)**

Seja $f \in C^2$ e x^* um ponto interior, suponha:

I) $\nabla f(x^*) = 0$

II) $\nabla^2 f(x^*)$ definida positiva

Então x^* é um ponto de mínimo local estrito da função f.

Prova: Desde que $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, existe $\beta > 0$ tal que $\forall$ d;

$d^T \nabla^2 f(x^*) d > \beta \|d\|^2 = \beta d^T d$

Então pelo teorema de Taylor:

$$f(x^* + d) - f(x^*) = \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x^*) d + r(d) > \frac{1}{2} \beta |d|^2 + r(d) > 0$$

para valores pequenos de $|d|$

$\therefore$ $f(x^* + d) > f(x^*)$ concluindo x^* é ponto de mínimo local estrito.

Queremos observar que a condição (II) da proposição 4 , significa supor que a função f é estritamente convexa na vizinhança de x^*.

Proposição 5:

Se f é uma função convexa continuamente diferenciável, uma condição necessária e suficiente para que x^* seja um ótimo local de f sobre R^n é que:

$\nabla f(x^*) = 0$

Isto quer dizer que no caso de funções convexas, a estacionaridade sozinha constitui uma Condição Necessária e Suficiente de otimalidade local.

III. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Seja a função f contínua e com derivadas 1ª contínuas.

Vimos que em todos os casos, a estacionaridade de f é uma condição necessária de otimalidade. Por este motivo, praticamente, todos os métodos de otimização sem restrição no R^n procuram encontrar um ponto x^* onde $\nabla f(x^*) = 0$.

A idéia básica destes métodos é a seguinte:

A partir de um ponto inicial $x^0 = \left(x_1^0 \quad x_2^0 \quad \ldots \quad x_n^0\right)^T$ gera-se uma sequência de pontos: $x^1, x^2, \ldots, x^k$, que converge para o ótimo local de f.

A cada etapa k, x^{k+1} é calculado por:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

onde α_k é o tamanho do passo e $d^k = \left(d_1^k \quad d_2^k \quad \ldots \quad d_n^k\right)^T$ é um direção de deslocamento que pode ser: o gradiente de f em x^k : $d_k = -\nabla f(x^k)$ ou calculada a partir do gradiente $\nabla f(x^k)$.

III.1. MÉTODOS DE GRADIENTE

Trata-se de uma família de métodos que procede da seguinte maneira:

A partir de um ponto $x^0 = \left(x_1^0 \quad x_2^0 \quad \ldots \quad x_n^0\right)^T$, calcula-se o gradiente $\nabla f(x^k)$ em x^0.

Como o gradiente indica a direção de maior crescimento de f, desloca-se de uma quantidade na direção oposta ao grdiente, e assim define-se o ponto:

$$x^1 = x^0 - \alpha_0 \frac{\nabla f(x^0)}{\left\|\nabla f(x^0)\right\|}$$

O procedimento é repetido e gerando os pontos: $x^2, x^3, \ldots, x^n$, de acordo com a relação:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \frac{\nabla f(x^k)}{\left\|\nabla f(x^k)\right\|} \qquad \text{onde } \alpha_0 > 0$$

Dentro desta família de métodos nós descrevemos os métodos de gradiente a passo pré-determinado e da Descida Rápida (Steepest Descent).

III.1.1. MÉTODO DO GRADIENTE A PASSO PRÉ-DETERMINADO

O método do gradiente a passo pré-determinado consiste em escolher a priori os valores dos deslocamentos α_k.

Por exemplo nós podemos escolher $\alpha_k = \frac{1}{k}$

Em 1969, Poljak mostrou que este esquema iterativo converge para x^* se:

(a) $\alpha_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$

O inconveniente do método a passo pré-determinado é que a convergência pode ser muito lenta.

ALGORITMO DO MÉTODO DE GRADIENTE A PASSO PRÉ-DETERMINADO
1) ler um ponto de partida $x^1 = \left(x_1^1 \;\; x_2^1 \;\; \ldots \;\; x_n^1\right)^T$
2) $k = 1$ calcular $f(x^k)$
3) calcular $d_k = \frac{\nabla f(x^k)}{\lVert \nabla f(x^k) \rVert}$
4) Enquanto o critério de parada não for satisfeito faça   calcular $\alpha_k = \frac{1}{k}$ calcular $x^{k+1} = x^k - \alpha_k d_k$ calcular $f(x^{k+1})$ $k = k+1$ Fim enquanto
5) imprimir x^k

CRITÉRIOS DE PARADA

São apresentados, alguns dos critérios de parada mais utilizados nos métodos de gradiente:

Critério 1: $\max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\right) < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado e onde $i = 1, 2, \ldots, n$

Critério 2: $\|\nabla f\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado

Critério 3: $\frac{|f(x^{k+1}) - f(x^k)|}{|f(x^{k+1})|} < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado

Para cada um destes critérios, uma boa precaução seria a de exigir que o teste se verifique sobre p iterações sucessivas (onde p é um número fixado a priori).

III.1.2 MÉTODO DA DESCIDA RÁPIDA (STEEPEST DESCENT)

Neste método, de utilização muito frequente, α_k é escolhido de maneira a minimizar a função de α:

$$g(\alpha) = f(x^k - \alpha\nabla f(x^k)) \tag{2}$$

sobre o conjunto dos $\alpha \geq 0$.

A minimização de $g(\alpha)$ é chamada de minimização unidimensional ou busca unidimensional e será apresentada mais a frente.

O algoritmo de descida rápida é o seguinte:

ALGORITMO STEEPEST DESCENT

1) ler um ponto de partida $x^0 = (x_1^0 \quad x_2^0 \quad \ldots \quad x_n^0)^T$
2) $k = 0$
3) Repita
   - calcular $d_k = -\nabla f(x^k)$
   - Busca Unidimensional:
   - calcular α_k tal que $f(x^k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0}\{f(x^k + \alpha d_k)\}$
   - calcular $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$
   - $k = k + 1$

   Até que o critério de parada seja satisfeito
4) imprimir x^k

III.1.3. MÉTODO DE BUSCA UNIDIMENSIONAL

Após, nós apresentarmos alguns métodos de busca unidimensional.

Busca Unidimensional é um procedimento iterativo para a solução do problema (2).

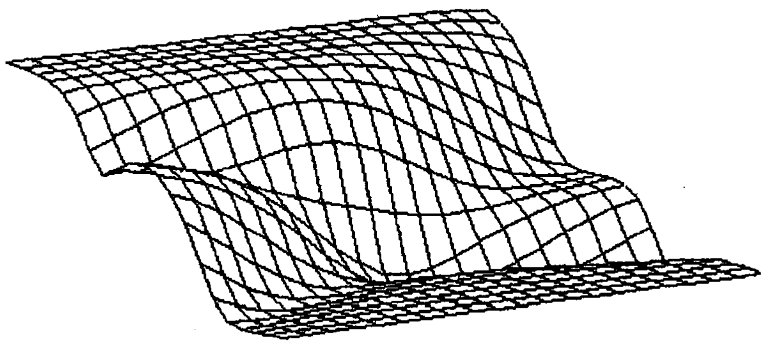
O objetivo é obter

$$g'(\alpha^*) = 0$$

isto é, $\nabla f(x-\alpha^* d)d = 0$, ou ainda,

$$\min f(x+\alpha d)$$
$$\text{sujeito a} \quad \alpha \geq 0$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ são conhecidos.



Os métodos de busca unidimensional são sub-divididos em métodos que necessitam da informação da derivada da função f(x) e naqueles que não necessitam dessa informação.

III.1.3.1. MÉTODOS DE BUSCA UNIDIMENSIONAL QUE UTILIZAM DERIVADAS

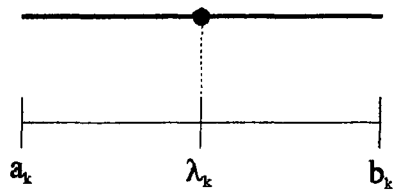
A seguir são apresentados três métodos de busca unidimensional que utilizam derivadas.

1) MÉTODO DA BISSECÇÃO

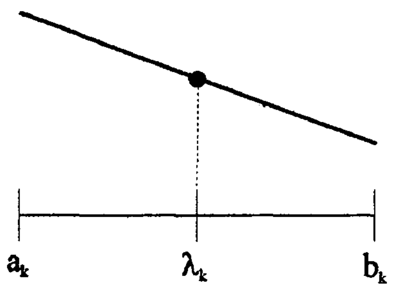
Seja $g \in C^1$ e $\lambda_k \in [a_k, b_k]$.

Esse método toma como base o resultado da derivada da função g no ponto λ_k e em função do mesmo faz uma redução do intervalo $[a_k, b_k]$.

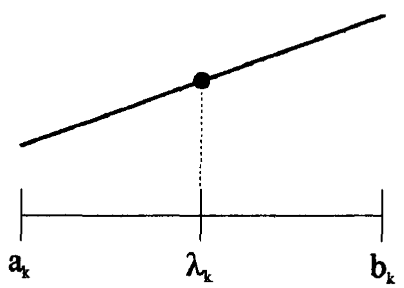
Escolha de λ_k: $\lambda_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$



$g'(\lambda_k) = 0 \Rightarrow \lambda_k$ é a solução



$g'(\lambda_k) < 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [\lambda_k, b_k]$



$g'(\lambda_k) > 0 \Rightarrow [a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \lambda_k]$

ALGORITMO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO

1) dado: $[a, b]$ com $f(a).f(b) < 0$
   $\varepsilon > 0$ (pequeno)
   $f'(x)$

2) $k = 1$; $a_k = a$; $b_k = b$

3) $\lambda_k = (a_k + b_k) / 2$

4) <u>Enquanto</u> $|b_k - a_k| > \varepsilon$ e $f'(\lambda_k) \neq 0$ <u>faça</u>
   - Se $f'(\lambda_k) < 0$
   - Então $a_{k+1} = \lambda_k$
     - $b_{k+1} = b_k$
   - Senão $a_{k+1} = a_k$
     - $b_{k+1} = \lambda_k$
   - $k = k + 1$
   - $\lambda_k = (a_k + b_k) / 2$

   <u>Fim enquanto</u>

5) <u>Se</u> $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$
   <u>Então</u> $\lambda_k = a_{k-1}$ ou $\lambda_k = b_{k-1}$

6) imprimir λ_k

Obs.: (a) Depois de n passos a redução do intervalo é: $\left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1)$

(b) Uma estimativa do número de passos: $\left(\frac{1}{2}\right)^n (b_1 - a_1) \leq 1$

Exemplo: Encontrar o ponto de mínimo de f(x) sabendo-se que sua derivada, dada por:

$$f'(x) = x \log(x) - 1$$

tem 1 zero em [2,0 3,0]

Solução:

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5 \quad f'(2) = -0{,}3979 < 0 \text{ e } f'(3) = 0{,}4314 > 0$$

$$f'(2{,}5) = -5{,}15 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = x_0 = 2{,}5 \\ b_1 = b_0 = 3{,}0 \end{cases} \quad \therefore \lambda \in [2{,}5 \quad 3{,}0]$$

$$x_1 = \frac{2{,}5+3}{2} = 2{,}75 \qquad f'(2{,}5) < 0 \text{ e } f'(3) > 0$$

$$f'(2{,}75) = 0{,}2082 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 = 2{,}5 \\ b_2 = x_1 = 2{,}75 \end{cases} \quad \therefore \lambda \in [2{,}5 \quad 2{,}75]$$

...

2) MÉTODO DE NEWTON

Seja $f \in C^2$ e supondo que num determinado ponto x_k se conhece: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ e $f''(x_k)$. Então é possível construir uma função q, que coincide com a f até 2ª ordem, da seguinte maneira:

$$f(x) \cong q(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + f''(x_k) \cdot (x - x_k)^2$$

$$q'(x_{k+1}) = f'(x_k) + f''(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$$

$\therefore$ uma estimativa x_{k+1} do ponto de mínimo de f é: $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

Obs.: (a) O método de Newton pode ser visto como uma técnica iterativa para resolver equações da forma $g(x)=0$, onde, para a minimização, $g(x) = f'(x)$. Nesta notação: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{g(x_k)}{g'(x_k)}$.

(b) O método de Newton tem ordem de convergência igual a 2.

Proposição 1: Seja a função $g \in C^2$ e seja x^* tal que $g(x^*) = 0$ e $g'(x^*) \neq 0$. Seja x_0 suficientemente próximo de x^*, então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton converge para x^* com ordem de convergência no mínimo igual a 2.

Prova:

Existem k_1 tal que $|g''(\zeta)| < k_1$ e k_2 tal que $|g'(\zeta)| > k_2$

Como $g(x^*) = 0$, portanto $x_{k+1} - x^* = x_k - x^* \dfrac{g(x_k) - g(x^*)}{g'(x_k)}$, expandindo em torno de x_k obtém-se: $x_{k+1} - x^* = \dfrac{\left[g'(x_k)\cdot(x^* - x_k) + g(x_k) - g(x^*)\right]}{g'(x_k)}$

$$\text{Logo } x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}\cdot\frac{g''(\zeta)\cdot(x^* - x_k)^2}{g'(x_k)} \quad \text{onde } x_k \leq \zeta \leq x^*$$

Sendo $g(x^*) = g(x_k) + g'(x_k)\cdot(x^* - x_k)$

$$\left|x_{k+1} - x^*\right| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{k_1}{k_2}\cdot\left|x_k - x^*\right|^2$$

$$\text{Se } \frac{k_1}{2k_2}\left|x_k - x^*\right| < 1 \Rightarrow \left|x_{k+1} - x^*\right| < \left|x_k - x^*\right|$$

O método de Newton para busca unidimensional também pode ser obtido através da forma de diferenciabilidade de $f(x)$ no ponto $\bar{x}$.

Ou seja:

Uma função $f(x)$ é dita ser 2 vezes diferenciável em $\bar{x}$ se existe um vetor $\nabla f(\bar{x})$ e uma matriz $\nabla^2 f(\bar{x})$ e uma função $\lambda: E_n \to E_1$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})\cdot(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})\cdot(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \lambda(\bar{x}; x - \bar{x})$$

para cada $x \in S$ onde $\lim_{x \to \bar{x}} \lambda(x; x - \bar{x}) = 0$

Então da diferenciabilidade da $f(x)$ em $\bar{x}$ e de $x = \bar{x} + \alpha d$ nós temos

$$f(\bar{x} + \alpha d) = f(\bar{x}) + \alpha \nabla f(\bar{x}) d + \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d \qquad (1)$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha) = f(\bar{x} + \alpha d) \Rightarrow g(0) = f(\bar{x}) \\ g'(\alpha) = \nabla f(\bar{x} + \alpha d)d \Rightarrow g'(0) = \nabla f(\bar{x})d \\ g''(\alpha) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + \alpha d)d \Rightarrow g''(0) = d^T \nabla^2 f(\bar{x})d \end{array}\right\} \quad (2)$$

Então, substituindo (2) em (1) nós temos:

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2} g''(0) \qquad (3)$$

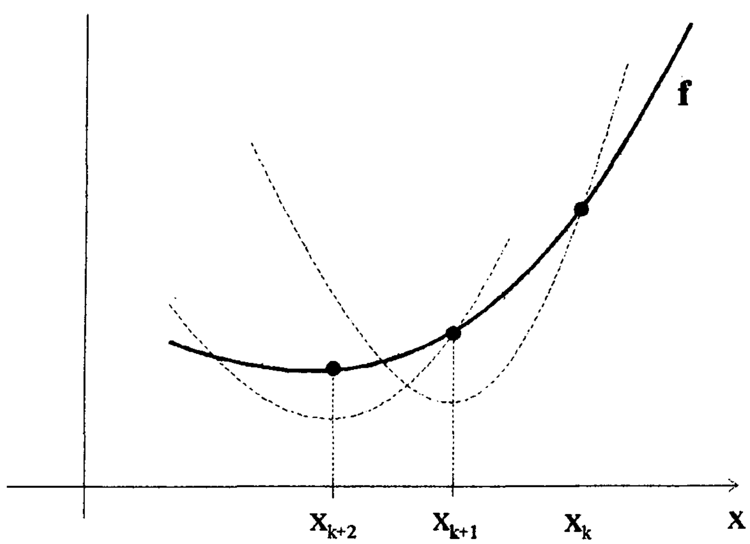
Como nós queremos obter $g'(\alpha^*) = 0$, basta derivarmos (3). Logo:

$$\alpha^* = \frac{g'(0)}{g''(0)} = \frac{\nabla f(\bar{x})d}{d^T \nabla^2 f(\bar{x})d}$$

A forma geral é

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k \quad \frac{\nabla f(x_k)d}{d^T \nabla^2 f(x_k)d}$$

onde $x_k = x + \alpha_k d_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$



Esta forma é mais fácil de programar, pois não é necessário montar (construir) a função $g(\alpha)$.
O método de Newton para busca pode ser escrito como a seguir:

ALGORITMO DO MÉTODO DE NEWTON

Para os valores de x, d e epsilon dados

1) $k = 1$

   $\alpha_0 = 0$

   calcular grad = $\nabla f(x)$

   calcular digrad = $\nabla f(x^T)d$

   calcular hess = $\nabla^2 f(x)$

   calcular dihessdi = $d^T \nabla^2 f(x) d$

2) <u>Enquanto</u> abs(digrad > epsilon) <u>faça</u>

   calcular $\alpha_1 = \alpha 0 - \dfrac{\text{digrad}}{\text{dihessdi}}$

   calcular $x_1 = x + \alpha_1 d$

   $k = k + 1$

   $\alpha_0 = \alpha_1$

   calcular grad = $\nabla f(x)$

   calcular digrad = $\nabla f(x^T)d$

   calcular hess = $\nabla^2 f(x)$

   calcular dihessdi = $d^T \nabla^2 f(x) d$

   <u>Fim enquanto</u>

3) saída de resultados

   $\alpha_{otimo} = \alpha_0$

<u>Exemplo</u>: Consideremos a função:

$$\min \ f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

Solução:

$f'(x) = x^2 + x - 6 \qquad x_0 = 1{,}5$

$f''(x) = 2x + 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1} = \dots = \frac{x_k^2 + 6}{2x_k + 1}$$

Temos pois:

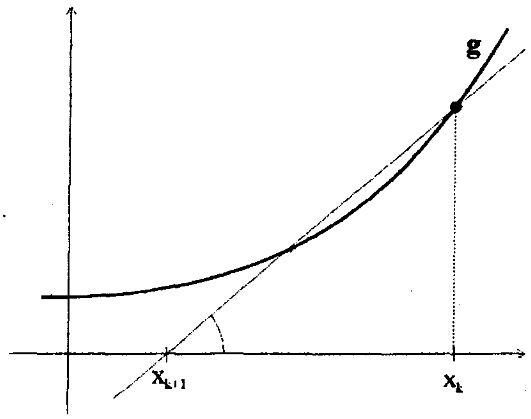
$$x_0 = 1{,}5 \qquad x_1 = \frac{1{,}5^2 + 6}{2 \cdot 1{,}5 + 1} = 2{,}0625$$

$$x_2 = \frac{2{,}0625^2 + 6}{2 \cdot 2{,}0625 + 1} = 2{,}00076 \qquad x_3 = \frac{2{,}00076^2 + 6}{2 \cdot 2{,}00076 + 1} = 2{,}00000$$

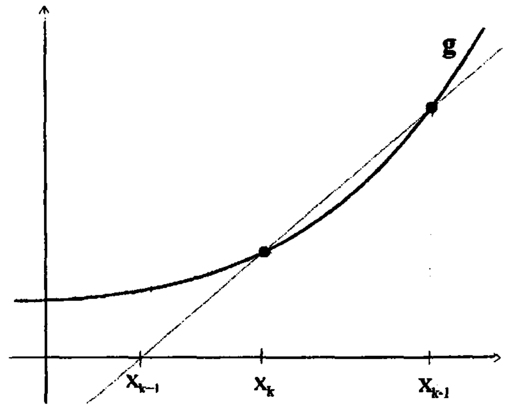
Assim trabalhando com 5 casas decimais obtemos que: $x_{k+1} = \bar{x} = 2$ é ponto de mínimo da função dada.

3) MÉTODO DAS SECANTES

Utilizando mais pontos, é requerida menos informação da função f. Este método utiliza apenas a primeira derivada, porém considera não apenas o ponto determinado, mas também seu antecesor.



Método de NEWTON



Médoto das SECANTES

É possível obter q, que aproxima-se de f até a ordem 2.

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(x - x_k) + \frac{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}{x_{k-1} - x_k}\cdot\frac{(x - x_k)^2}{2}$$

Então: $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)\left[\dfrac{x_{k-1} - x_k}{f'(x_{k-1}) - f'(x_k)}\right]$

<u>Obs.</u>: $g(x) = f'(x) = 0$, assim $x_{k+1} = x_k - g(x_k)\left[\dfrac{x_{k-1} - x_k}{g(x_{k-1}) - g(x_k)}\right]$

<u>Exemplo</u>: Seja $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9x^2}{2} + 3x$ $\qquad x_0 = 0;\ x_1 = 1 \qquad \varepsilon = 0{,}0005$

minimizar esta função no intervalo [-1, 1]

Solução:

$f'(x) = x^3 - 9x + 3$

$$x_{k+1} = x_k - (x_k^3 - 9x_k + 3)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k^3 - 9x_k + 3 - (x_{k-1}^3 - 9x_{k-1} + 3)}\right)$$

$$x_2 = 1 - (1^3 - 9\cdot 1 + 3)\left(\frac{1 - 0}{1^3 - 9\cdot 1 + 3 - (0^3 - 9\cdot 0 + 3)}\right)$$

Continuando com o mesmo processo, obtemos:

$x_2 = 0{,}375;$ $f(x_2) = -0{,}322266$

$x_3 = 0{,}3319416;$ $f(x_3) = 0{,}0491$

$x_4 = 0{,}3376346;$ $f(x_4) = -0{,}000222$

Calculando o erro relativo, verifica-se que:

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_3|} = \frac{|0{,}3376346 - 0{,}3319416|}{|0{,}3319416|} < \varepsilon$$

$\therefore$ min f(x) é dado por

$\bar{x} = 0{,}3376346$ com 3 iterações

III.1.3.2. MÉTODOS QUE NÃO UTILIZAM DERIVADAS

1) MÉTODO DE FIBONACCI

Seja $g: R \to R$ uma função real.

Este método é utilizado quando não temos informações sobre a derivada da função g ou a função não é diferenciável. Para se utilizar este método é necessário que a função g seja unimodal, isto é, ela tenha um único mínimo (máximo).

Uma função unimodal é uma função do tipo:

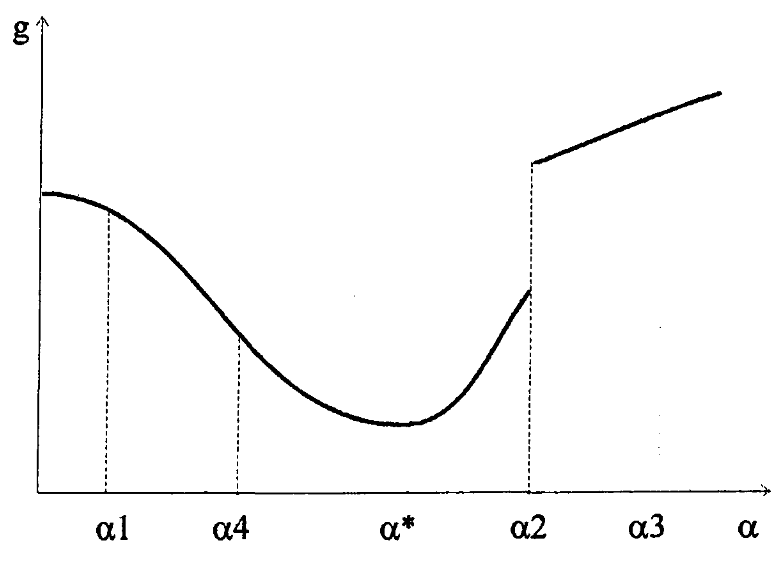


Fig. 1. Função unimodal sobre o intervalo $[\alpha_1, \alpha_3]$

Como resultado da definição de funções unimodais nós temos que:

"Se nós calcularmos o valor da função g em quatro pontos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 num intervalo $[\alpha_1, \alpha_3]$, vai existir um subintervalo que não contém o ótimo e que pode ser eliminado (Fig 2). Obtemos assim um intervalo reduzido, sobre o qual nós podemos recomeçar a operação."

A Fig. 2 exemplifica a redução de um intervalo pela utilização da propriedade das funções unimodais.

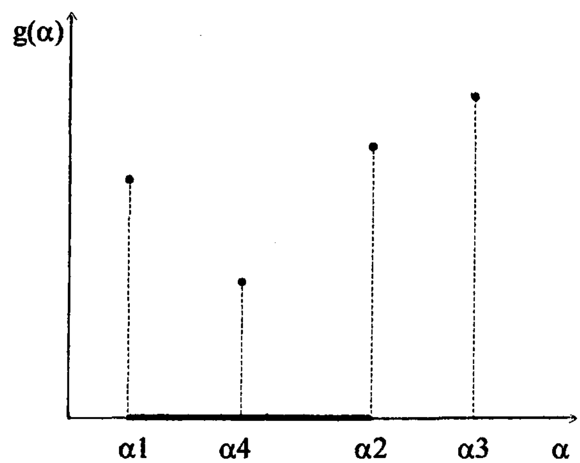
A idéia do método de Fibonacci consiste em calcular o valor de g em N pontos escolhidos de maneira que o resultado obtido para cada novo ponto permita eliminar um subintervalo (o maior possível) do intervalo inicial.

<u>caso 1</u>

$\alpha_4 < \alpha_2$

$g(\alpha_4) < g(\alpha_2)$

novo intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$

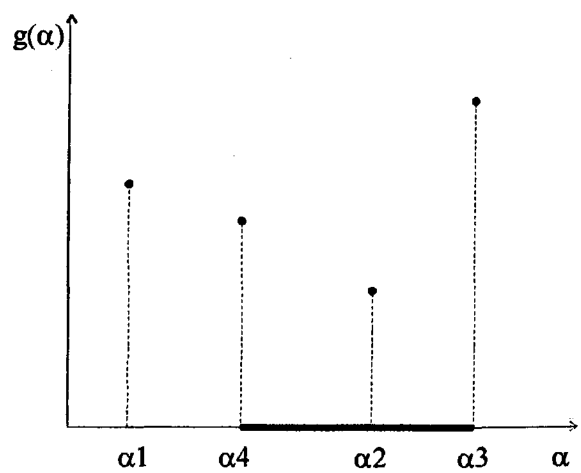


<u>caso 2</u>

$\alpha_4 < \alpha_2$

$g(\alpha_4) > g(\alpha_2)$

novo intervalo $[\alpha_4, \alpha_3]$

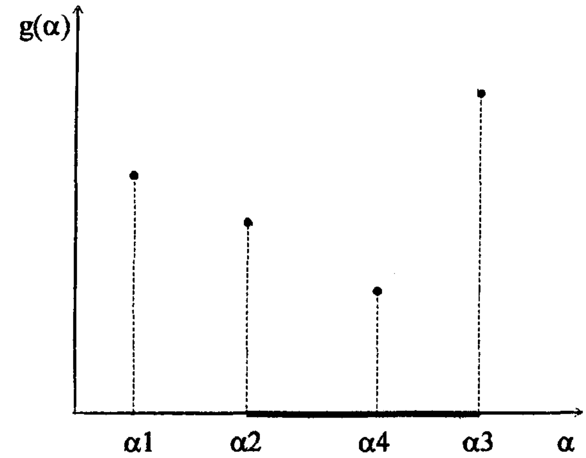


caso 3

$\alpha_4 > \alpha_2$

$g(\alpha_4) < g(\alpha_2)$

novo intervalo $[\alpha_2, \alpha_3]$



caso 4

$\alpha_4 > \alpha_2$

$g(\alpha_4) > g(\alpha_2)$

novo intervalo $[\alpha_1, \alpha_4]$

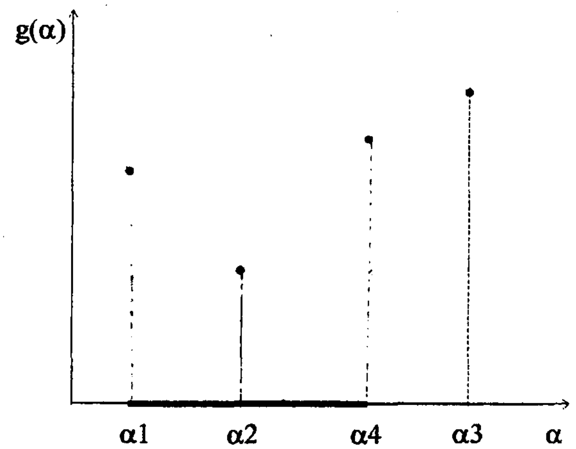


Fig. 2. Propriedade da unimodalidade.

Suponha como na Fig. 3 que o intervalo inicial seja $[\alpha_1, \alpha_3]$ e que nós dispomos de valores de g(α) nos pontos α_1, α_2 e α_3. Coloca-se o seguinte problema:

"Se nós desejarmos efetuar mais um experimento no ponto α_4, onde nós devemos colocar α_4 de modo a eliminar o maior subintervalo possível?"

Isto é obtido fazendo $\alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_2 - \alpha_1$, isto é, colocando α_4 simétricamente no intervalo com relação a α_2.

Uma vez eliminado um subintervalo, por exemplo $[\alpha_2, \alpha_3]$, um novo ponto é colocado simétricamente no novo intervalo. E a estratégia se repete para este novo intervalo. Na n-ésima iteração nós colocamos o n-ésimo ponto simetricamente com respeito no (n-1)-ésimo ponto.

Seja a Fig. 4 com L_1 como intervalo inicial e os pontos α_1 e α_2 dispostos simetricamente em relação ao intervalo L_1.

No estágio seguinte α_2 e α_3 devem estar simétricos com relação a L_2 e a seguir a simetria deve ser feita com relação a L_3 e assim sucessivamente.

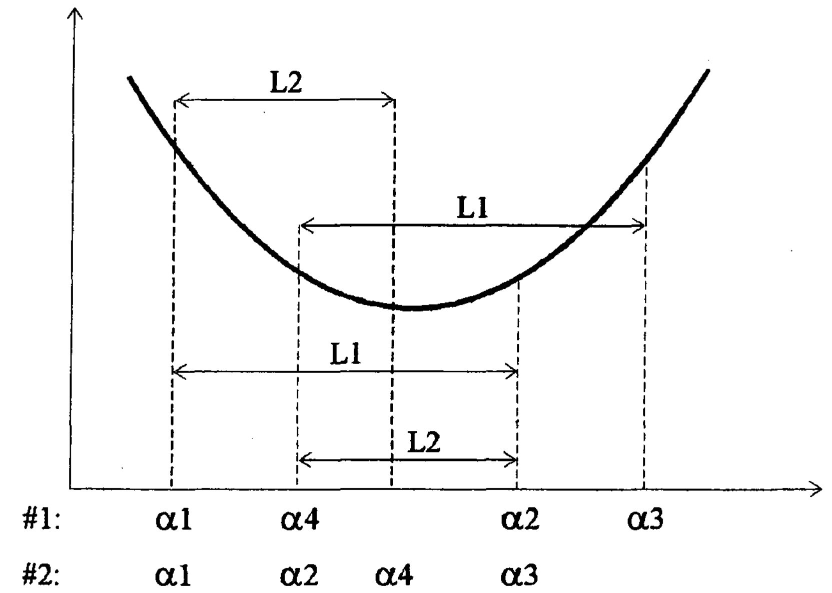


Fig. 3. Posicionamento de α_4.

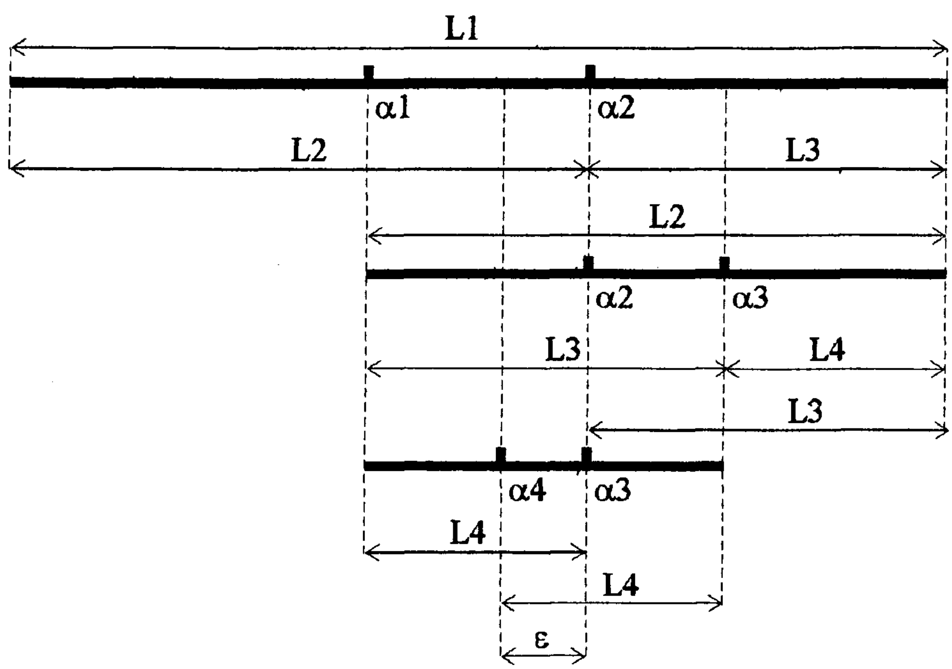


Fig. 4.

Da Fig 4 temos que:

$$\begin{cases} L_3 = 2L_4 - \varepsilon \\ L_2 = L_3 + L_4 \\ L_1 = L_2 + L_3 \end{cases}$$ onde ε é a distância entre α_3 e α_4

Se considerarmos só 4 medidas, isto é, n=4 podemos escrever estas equações do seguinte modo:

$$\begin{cases} L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon \\ L_{n-2} = L_{n-1} + L_n \\ L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} \end{cases}$$ generalizando $L_{j-1} = L_j + L_{j+1}$ para $1 < j < n$

Então

$$\begin{cases} L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon \\ L_{n-2} = (2L_n - \varepsilon) + L_n = 3L_n - \varepsilon \\ L_{n-3} = (3L_n - \varepsilon) + (2L_n - \varepsilon) = 5L_n - 2\varepsilon \end{cases} \qquad (1)$$

A série de Fibonacci é dada por:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 0, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ para } k = 2, 3, \ldots$$

Então os termos da série são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Observe nas equações (1) que o número 2 é o termo F_2 da série de Fibonacci, 3 é o termo F_3 e 5 o termo F_4. Então podemos generalizar as equações (1) para:

$$L_{n-1} = F_{j+1} \cdot L_n - F_{j-1} \cdot \varepsilon \qquad j = 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \qquad (2)$$

Da equação (2) temos que o intervalo original L_1 é:

$$L_1 = F_n \cdot L_n - F_{n-2} \cdot \varepsilon \quad \text{onde } L_n = \frac{L_1}{F_n} + \frac{F_{n-2}}{F_n} \cdot \varepsilon$$

Então com n avaliações da função g reduzimos o intervalo para uma fração de $\frac{1}{F_n}$.

Uma vez começado o processo de busca é fácil continuar usando a regra de simetria. Então nós precisamos encontrar a posição do 1° ponto que é colocado L_2 unidades a partir de um dos lados do intervalo original. Este ponto (λ_1 ou μ_1) deve satisfazer a equação (3) dada por:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) \\ \mu_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) \end{cases} \tag{3}$$

Se escolhermos λ_1 e μ_1 de acordo com (3) tem-se garantidamente que: $b_1 - \lambda_1 = \mu_1 - a_1$

Em seguida, determina-se um novo ponto λ_2 ou μ_2 (respeitando a propriedade de g ser unimodal) calculado por:

$$\begin{cases} \lambda_2 = a_2 + \dfrac{F_{n-3}}{F_{n-1}}(b_2 - a_2) \\ \mu_2 = a_2 + \dfrac{F_{n-2}}{F_{n-1}}(b_2 - a_2) \end{cases}$$

De um modo geral:

$$\begin{cases} \lambda_k = a_k + \dfrac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \\ \mu_k = a_k + \dfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \end{cases}$$

Exemplo:

$$a_1 = 3 \quad b_1 = 8 \quad \lambda_1 = 5 \quad \mu_1 = 6$$
$$N = 4 \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 2 \quad F_3 = 3 \quad F_4 = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = a_1 + \dfrac{F_2}{F_4}(b_1 - a_1) = 3 + \dfrac{2}{5}\cdot 5 = 5 \\ \mu_1 = a_1 + \dfrac{F_3}{F_4}(b_1 - a_1) = 3 + \dfrac{3}{5}\cdot 5 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 - \lambda_1 = \mu_1 - a_1 \quad 8 - 5 = 6 - 3$$

Existem duas possibilidades do novo intervalo: $[a_1, \mu_1]$ e $[\lambda_1, b_1]$. Apenas uma é escolhida dependendo dos sinais de $f(\lambda_1)$ e $f(\mu_1)$.

Caso o novo intervalo seja[5, 8] teremos:

$$\begin{array}{l} \lambda_2 = a_2 + \dfrac{F_1}{F_3}(b_2 - a_2) = 5 + \dfrac{1}{3}\cdot 3 = 6 \\ \mu_2 = a_2 + \dfrac{F_2}{F_3}(b_2 - a_2) = 5 + \dfrac{2}{3}\cdot 3 = 7 \end{array}$$

Ou, caso o novo intervalo seja [3, 6]:

$$\begin{array}{l} \lambda_2 = a_2 + \dfrac{F_1}{F_3}(b_2 - a_2) = 3 + \dfrac{1}{3}\cdot 3 = 4 \\ \mu_2 = a_2 + \dfrac{F_2}{F_3}(b_2 - a_2) = 3 + \dfrac{2}{3}\cdot 3 = 5 \end{array}$$

Obs: A cada novo intervalo, somente um ponto é marcado e portanto, somente um cálculo da função g é necessário.

III.2. MÉTODO DE NEWTON

Nós supomos que a função f é duas vezes continuamente diferenciável e que nós sabemos calcular as derivadas segundas de f.

A idéia deste método é substituir, na vizinhança do ponto x_k, a função f, pela sua aproximação quadrática

$$q(x) = f(x_k) + \nabla f^T(x_k)(x - x_k) + 1/2(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$$

O ponto x_{k+1} é escolhido como o mínimo de q(x).

A condição necessária para o mínimo da função quadrática q(x) é que $\nabla q(x)=0$, ou seja

$$\nabla q(x) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$$

$$\nabla q(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} - x_k = -\left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Observe que aqui tanto a direção como o tamanho do passo estão fixos.

O método de Newton converge numa única iteração quando é aplicado a uma função quadrática estritamente convexa ($\nabla^2 f(x)$ definida positiva). Entretanto para uma função qualquer o método só converge se o ponto de partida x_0 não estiver longe da solução. Pode-se remediar esta situação introduzindo uma modificação no método, ou seja

$$x_{k-1} = x_k - \alpha_k \left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k)$$

onde α_k é o mínimo de $g(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ com $d_k = -\left[\nabla^2 f(x_k)\right]^{-1} \nabla f(x_k)$

<u>Exemplo</u>: Resolver o problema: min $f(x) = (x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$

pelo método de Newton com $x_0 = [2 \quad 0]^T$

Solução:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6x_2 \\ -6x_1 + 20x_2 - 2 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 20 \end{vmatrix} \qquad \left[\nabla^2 f(x)\right]^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - \left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1} \nabla f(x^0) \qquad x^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ solução ótima}$$

EXERCÍCIOS I

1. (Exercício Resolvido) Considere o seguinte problema:

$$\min \quad f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 + 42$$

Fazer 2 iterações do Método de Steepest Descent, usando o Método de Newton como busca unidimensional e $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 14 \\ 4x_2 + 2x_1 - 16 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} -14 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad d^0 = -\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad x^1 = x^0 + \alpha d^0 = \begin{bmatrix} 14\alpha \\ 16\alpha \end{bmatrix}$$

$f(14\alpha, 16\alpha) = g(\alpha)$, desenvolvendo:

$$g(\alpha) = 1352\alpha^2 - 452\alpha + 42$$
$$g'(\alpha) = 2704\alpha^2 - 452$$
$$g''(\alpha) = 2704$$

Busca unidimensional:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{g'(\alpha_0)}{g''(\alpha_0)} \qquad \alpha_0 = 0 \qquad \alpha_1 = 0 - \frac{-452}{2704} = 0{,}1672$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 14 \cdot 0{,}1672 \\ 16 \cdot 0{,}1672 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}3408 \\ 2{,}6752 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$d^1 = -\nabla f(2{,}3408; 2{,}6752) = \begin{bmatrix} -0{,}7136 \\ 0{,}6184 \end{bmatrix} \qquad x^2 = x^1 + \alpha d^1 = \begin{bmatrix} 2{,}3408 - 0{,}7136\alpha \\ 2{,}6752 + 0{,}6184\alpha \end{bmatrix}$$

$f(2{,}3408 - 0{,}7136\alpha;\ 2{,}6752 + 0{,}6184\alpha) = g(\alpha)$, desenvolvendo:

$$g(\alpha) = 0{,}9006\alpha^2 - 0{,}8911\alpha - 37{,}7782$$
$$g'(\alpha) = 1{,}8012\alpha^2 - 0{,}8911$$
$$g''(\alpha) = 1{,}8012$$

Busca unidimensional:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{g'(\alpha_0)}{g''(\alpha_0)} \qquad \alpha_0 = 0 \qquad \alpha_1 = 0 - \frac{-0,8911}{1,8012} = 0,4947$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 2,3408 - 0,7136 \cdot 0,4947 \\ 2,6752 + 0,6184 \cdot 0,4947 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9878 \\ 2,9811 \end{bmatrix}$$

Resposta: $x = \begin{bmatrix} 1,9878 \\ 2,9811 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. (Exercício Resolvido) Considere o problema do exercício 1, com o mesmo x^0, resolva utilizando o Método de Newton. A solução encontrada é ótima?

Solução:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -14 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x^0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \left[\nabla^2 f(x^0)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,333 & -0,166 \\ -0,166 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,333 & -0,166 \\ -0,166 & 0,333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -14 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,996 \\ 3,000 \end{bmatrix}$$

Resposta: $x = \begin{bmatrix} 1,996 \\ 3,000 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A solução é ótima porque o método de Newton converge numa iteração, quando aplicado a uma função quadrática (verifique!) e x^0 está próximo a ela.

3. a) min $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2 + x_2x_3 + 5x_3^2 - 11x_1 - 11x_2 - x_3$

com $x^0 = (0 \quad 0 \quad 0)^T$

Utilizar o método Gradiente de "Steepest Descent" usando algum método de busca unidimensional. Solução: $x = (1 \quad 1 \quad 0)^T$

b) min $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(31x_1^2 + 58x_1x_2 + 31x_2^2) - 33x_1 - 27x_2$

com $x^0 = (1 \quad 1)^T$ Solução: $x = (2 \quad -1)^T$

4. Seja o problema abaixo

$$\min\ f(x_1,x_2) = 2(x_1 - 2x_2)^2 + x_1^2 - 2x_2$$

Fazer 2 iterações do método do gradiente a passo pré-determinado com k = 50 começando pelo ponto $x^0 = \left(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\right)^T$

obs.: trabalhar com 4 casas decimais.

5. Resolver o problema abaixo

$$\min\ f(x_1,x_2) = (x_1 - 3x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

a) Fazer 2 iterações do gradiente Steepest Descent com Newton na busca unidimensional, começando com $x^0 = (2\ \ 0)^T$.

b) Fazer do método de Newton.

6. Dada a função: $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y$

a) Usando a C.N. de 1ª ordem, encontre um candidato a ponto ótimo da função;

b) Verifique se é um ponto de mínimo ou máximo analisando as condições de 2ª ordem.

7. Encontre a reta que melhor se ajusta aos pontos: (2, 4), (4, 5) e (6, 8) por mínimos desvios quadráticos.

8. Considere o seguinte problema:

$$\min\ f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(9x_1^2 - 2x_1x_2 + 9x_2^2\right) - 7x_1 - 17x_2$$

Encontrar a solução deste problema resolvendo os itens:

a) Fazer 2 iterações da método de Steepest Descent usando o método de Newton como busca unidimensional e $x^0 = (0.5\ \ 1.0)^T$

b) Utilizar o método de Newton. Neste caso, a solução é ótima? Por que?

9. Considere a função $g(\alpha) = \frac{10}{\alpha} + \alpha^2$ e o intervalo de incerteza [0, 10]. Utilizando o Método da Bissecção localize o mínimo de $g(\alpha)$ em um intervalo de comprimento 10% do inicial.

PARTE 2

PROGRAMAÇÃO LINEAR

PROGRAMAÇÃO LINEAR

1. INTRODUÇÃO

A PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL) resolve problemas que consistem na maximização ou minimização (por exemplo: lucros e perdas) de uma função linear chamada FUNÇÃO OBJETIVO, respeitando um sistema linear chamado de RESTRIÇÕES DO MODELO.

2. MODELOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

FORMULAÇÃO: Nesta seção apresentaremos alguns problemas típicos que podem ser formulados como um PL.

Exemplo 1) PROBLEMA DA DIETA

Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta contendo pelo menos, 10 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 18 unidades de vitamina C. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em cinco alimentos como mostrado no quadro abaixo:

NECESSIDADE DE VITAMINAS:

ALIMENTOS

	I	II	III	IV	V
A	0	1	5	4	3
B	2	1	0	3	2
C	3	1	0	9	0
CUSTO	4	2	1	10	5

Calcular as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídas na dieta diária, a fim de obtermos o menor custo.

x_i: quantidade do alimento i presente na dieta

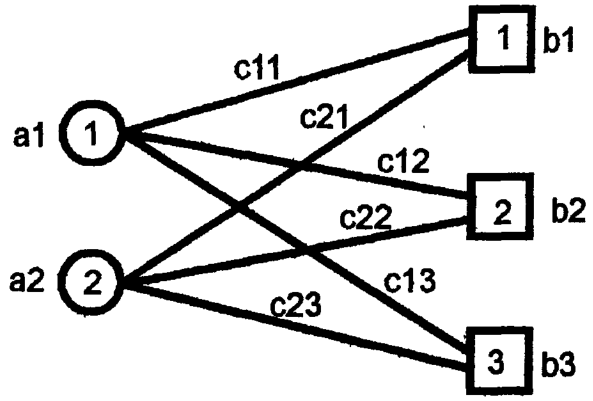
Modelo Matemático

$$\min \quad Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

$$s/a \begin{cases} x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 \geq 30 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_4 \geq 18 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Exemplo 2) PROBLEMA DE TRANSPORTE

Uma empresa fabrica latas de conservas em 2 fábricas e as vende através de 3 depósitos



FÁBRICAS DEPÓSITOS

a_i - capacidade de produção da fábrica i

b_j - demanda de produtos no depósito j

c_{ij} - custo por produto transportado da fábrica i ao depósito j.

A empresa deseja saber como distribuir a produção pela rede de modo a:

1) respeitar as capacidades produtivas de cada fábrica

2) respeitar as demandas de cada depósito

3) minimizar o custo total de transporte.

Modelo Matemático

Definindo x_{ij} a quantidade de produto transportado da fábrica i para o depósito j

$$\min \quad z = c_{11} + x_{11} + c_{12} + x_{12} + c_{13} + x_{13} + c_{21} + x_{21} + c_{22} + x_{22} + c_{23} + x_{23}$$

$$\text{s/a:} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} & \leq a_2 \end{cases}$$

$$\text{e} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} & \geq b_1 \\ x_{12} + x_{22} & \geq b_2 \\ x_{13} + x_{23} & \geq b_3 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$$

Exercício 3) PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

Suponha que dispomos dos seguintes dados:

Matéria prima	Produtos		Disponibilidade
	SAPATOS	BOTINAS	
COURO	2	1	8
BORRACHA	1	2	7
COLA	0	1	3
Lucro por unidade	1	1	

e que: x_1 = quantidade de sapatos fabricados

x_2 = quantidade de botinas fabricadas

Deseja-se maximizar o lucro. Assim, este problema pode ser formulado como um PL

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ & \\ s/a & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1 + 2x_2 \le 7 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{PL}$$

Exemplo 4)

A Direção de Marketing de uma empresa de móveis metálicos para escritório sugere o lançamento de um novo modelo de mesa de secretária e estante em substituição aos modelos atuais.

A Direção não vê dificuldades de colocação no mercado para as estantes enquanto que aconselha que a produção mensal de mesas de secretárias não ultrapasse a 160 unidades.

Após estudos levados a cabo pela Direção de Produção, conclui-se que:

- a disponibilidade mensal do Departamento de Estampagem é de 720 horas-máquina.
- a disponibilidade mensal do Departamento de Montagem e Acabamento é de 880 horas-homem.
- cada mesa de secretária necessita de 2 H-M de Estampagem e 4 H-H de Acabamento.

- cada estante necessita de 4 H-M de Estampagem e 4 H-H de Montagem e Acabamento.

Os lucros unitários estimados são de R$ 6.000 para as mesas de secretárias e R$ 3.000 para as estantes.

A empresa deseja determinar o plano de produção mensal para estes novos modelos de modo a maximizar os lucros.

Formulação:

x_1 = quantidade de mesas de secretárias produzidas por mês

x_2 = quantidade de estantes produzidas por mês.

Departamentos	Produtos		Disponibilidade total
	mesas de secretárias	estantes	
Estampagem	2 H-M	4 H-M	720 H-M
Montagem	4 H-H	4 H-H	880 H-H
Lucros em R$	6.000,00	3.000,00	

Modelo Matemático pode ser colocado como:

$$\max \quad z = 6000x_1 + 3000x_2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 6x_1 + 3x_2$$

$$s/a \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 720 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 880 \\ x_1 \qquad\quad \leq 160 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

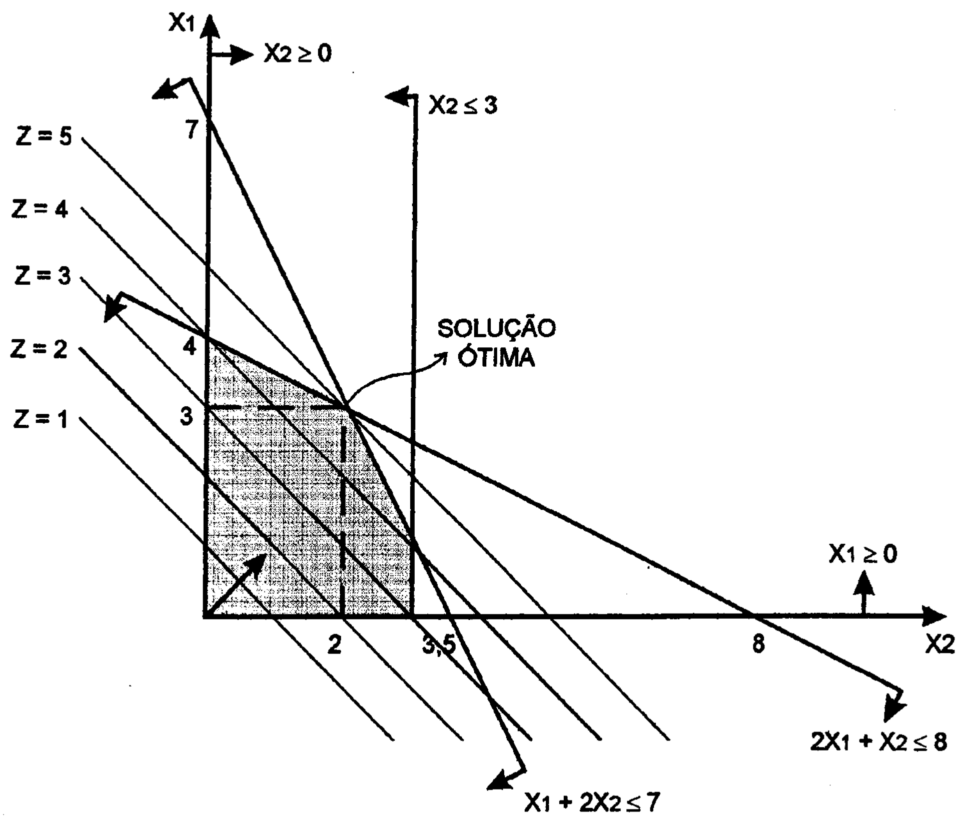
3. SOLUÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

3.1 SOLUÇÃO ÚNICA

Considere o modelo de planejamento da produção, já apresentado

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{s/a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Como esse modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente:



$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 1 \\ x_1 = 1, & x_2 = 0 \end{cases}$$

Solução Ótima: z = 5, x 3, x 2

Observe que:

- Cada restrição está desenhada como uma reta.

- Cada desigualdade está indicada por uma seta ao lado da linha representando os valores permissíveis de x_1 e x_2.

- Como as duas variáveis devem ser não negativas, a região de valores permissíveis é também limitada pelos dois eixos coordenados.

- O polígono hachurado representa a região de valores de x_1 e x_2 que satisfazem todas as restrições **(região factível)**.

- As linhas paralelas da figura representam vários valores da função objetivo.

- A solução ótima está num ponto externo do polígono.

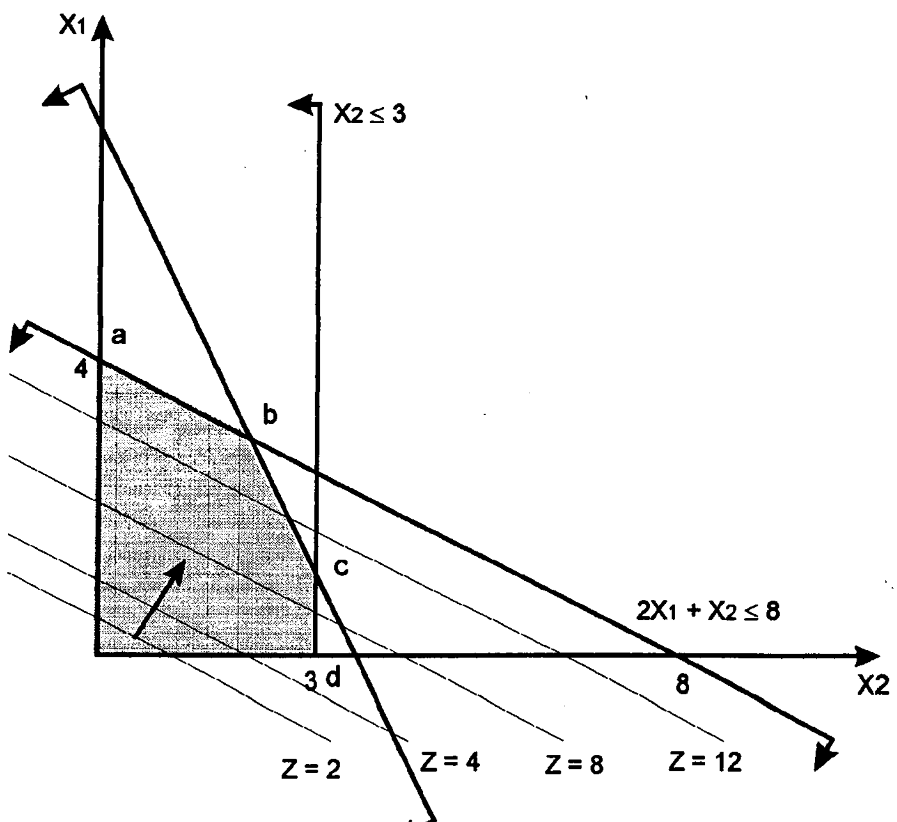
- A seta perpendicular às setas paralelas indica o sentido de crescimento da F.O. e ela é encontrada através do gradiante da F.O., isto é, $\left(\dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_2}\right)$

3.2 SOLUÇÕES ÓTIMAS ALTERNATIVAS

Se mudarmos a função objetivo do problema anterior para:

$$\max \quad z = 4x_1 + 2x_2$$

O que acontecerá ?



$4x_1 + 2x_2 = 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 1, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_1 = 1/2 \end{cases}$ $\qquad 4x_1 + 2x_2 = 4 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 2, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_1 = 1 \end{cases}$

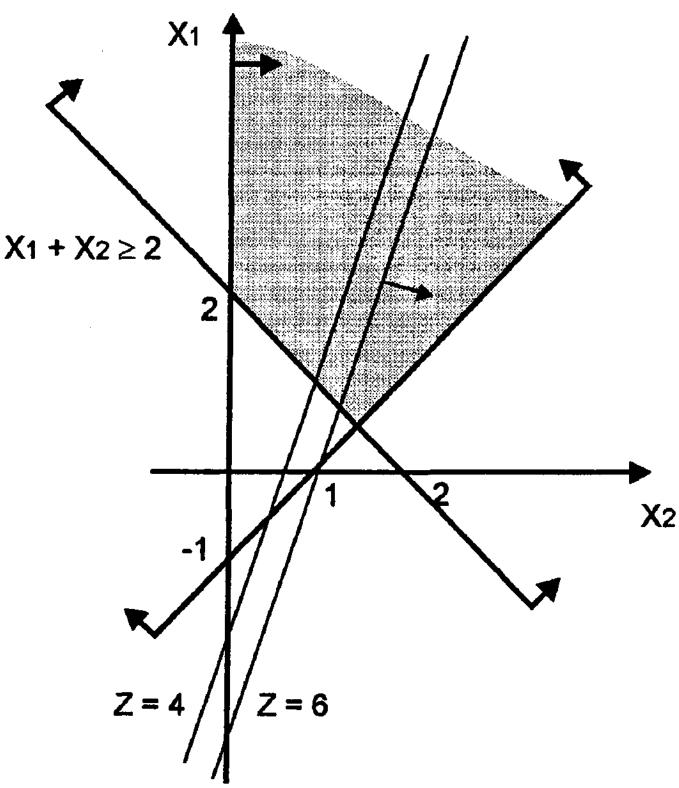
$4x_1 + 2x_2 = 8 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 0, & x_1 = 2 \\ x_2 = 2, & x_1 = 1 \end{cases}$ $\qquad 4x_1 + 2x_2 = 12 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 0, & x_1 = 3 \\ x_2 = 2, & x_1 = 2 \end{cases}$

Agora todos os pontos (um ponto infinito) sobre o segmento $\overline{ab}$ são ótimos. Assim $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$ ainda são ótimos e $z = 16$

3.3 SOLUÇÃO ILIMITADAS

Seja o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -2x_1 + 6x_2 \\ s/a \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$-2x_1 + 6x_2 = 4$$
$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 2/3 \\ x_2 = 0, & x_1 = -2 \end{cases}$$

$$-2x_1 + 6x_2 = 6$$
$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 1 \\ x_2 = 0, & x_1 = -3 \end{cases}$$

3.4 APRESENTAÇÃO DE UM PROBLEMA LINEAR

Um PL genérico pode ser: $\begin{cases} \max & z = cx \\ s/a & A_i x \le b_i \\ & A_j x \ge b_j \\ & A_l x = b_l \\ & x \ge 0 \end{cases}$

Para resolver o PL acima através do método SIMPLEX é necessário colocar o PL na FORMA PADRÃO definida abaixo:

$$\begin{cases} \max & z = cx \\ s/a & A_i x + v_i \le b_i \\ & A_j x - v_j \ge b_j \\ & A_l x \quad = b_l \\ & x \ge 0, \quad v_i \ge 0, \quad v_j \ge 0 \end{cases}$$

v_i = variável de FOLGA $\quad v_j$ = variável de EXCESSO

Matricialmente, o modelo na forma padrão é: $\begin{cases} \max & z = cx \\ s/a & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{cases}$

3.4.1. COLOCAÇÃO DE UM PL QUALQUER NA FORMA PADRÃO

1) Ocorrência de desigualdade

a) Seja a inequação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \le b$$

Introduzindo uma variável de folga positiva esta inequação é equivalente a:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + x_i = b \quad \text{com } x_i \ge 0$$

b) Seja

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \ge b$$

Introduz-se a variável de folga negativa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - x_j = b \quad \text{com } x_j \ge 0$$

2) Ocorrência de $b_i < 0$

Multiplicar a restrição i por (-1)

3) Ocorrência de variáveis livres

Variáveis livres são variáveis que não tem restrição de sinal, isto é, podem ser positivas, negativas ou nulas.

Se x_k é uma variável livre, ela deve ser substituída por x_k' e x_k'' de maneira que

$$x_k = x_k' - x_k'' \quad \text{com} \quad x_k' \geq 0 \ \text{e} \ x_k'' \geq 0$$

pois se $\begin{matrix} x_k > 0 & \rightarrow & x_k' > x_k'' \\ x_k < 0 & \rightarrow & x_k' < x_k'' \end{matrix}$ e se $x_k = 0 \rightarrow x_k' = x_k''$

4) Ocorrência de variável não positiva

Se tivermos na formulação $x_k \leq 0$, basta substituí-la por $x_k' = -x_k$ com $x_k' \geq 0$

Exemplo: Colocar os PLs abaixo na FORMA PADRÃO

1) $$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 \\ s/a & x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \text{ livre} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 \\ s/a & x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 4 \\ & 2x_1 + x_2 + \ x_4 = 5 \\ & x_1 \leq 0, \quad x_2 \text{ livre}, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

fazendo $x_2 = x_2' - x_2''$ e $x_1 = -x_1'$ temos

$$\begin{cases} \max & z = -3x_1' + 4x_2' - 4x_2'' \\ s/a & -x_1' + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 \qquad = 4 \\ & -2x_1' + x_2' - x_2'' \qquad + x_4 = 5 \\ & x_1' \geq 0, \quad x_2' \geq 0, \quad x_2'' \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \\ s/a & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 5 \\ & \quad x_2 - x_3 + x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 \quad + x_3 - 2x_4 \geq -5 \\ & x_1 \quad + 3x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ livre}, \quad x_3 \leq 0, \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \\ s/a & 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ & \quad x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 7 \\ & -2x_1 \quad - x_3 + 2x_4 + x_7 = 5 \\ & x_1 \quad + 3x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ livre}, \quad x_3 \leq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

fazendo $x_2 = x_2' - x_2''$ e $x_3 = -x_3'$ com $x_2', x_2'', x_3' \geq 0$ temos

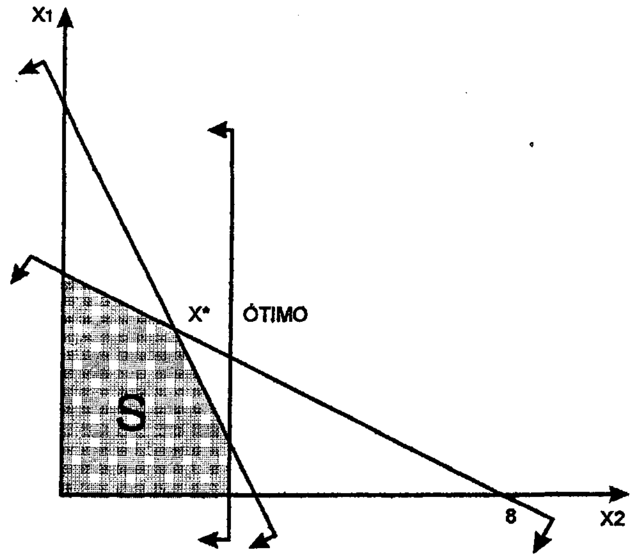
$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 - x_2' + x_2'' - 3x_3' - x_4 \\ s/a & 3x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - x_3' - x_4 - x_5 = 5 \\ & \quad x_2' - x_2'' + x_3' + x_4 + x_6 = 7 \\ & -2x_1 \quad + x_3' + 2x_4 + x_7 = 5 \\ & x_1 \quad + 3x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2' \geq 0, \quad x_2'' \geq 0, \quad x_3' \geq 0, \\ & x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0 \end{cases}$$

3.4.2. ALGUMAS NOÇÕES NECESSÁRIAS À PL

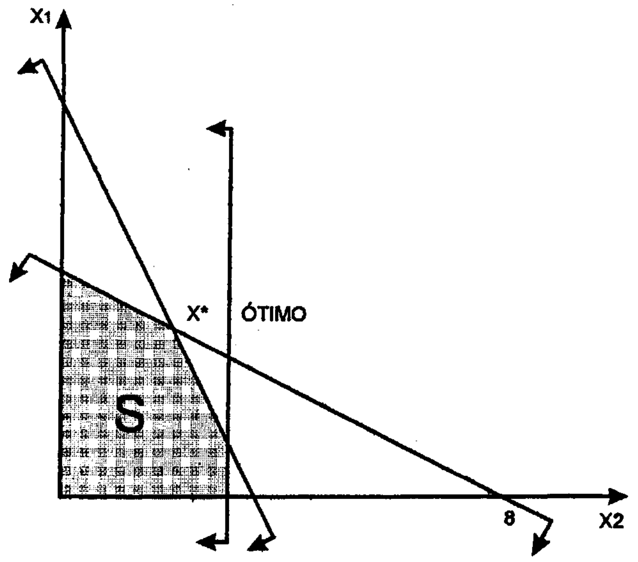
1) O conjunto de soluções factíveis do PL

$$\begin{cases} \max & z = cx \\ s/a & A_i x \leq b_i \\ & A_j x \geq b_j \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

é um poliedro (polígono) convexo



2) A solução ótima do PL é um Ponto Extremo (vértice) do polígono de restrições factíveis



<u>Consequência</u>: O conjunto das soluções candidatas à ótimo fica restrito a um número finito de pontos (os vértices do polígono S).

3) Definição de solução básica de um PL

Seja o PL (já colocado na forma padrão)

$$\max \quad z = cx$$

$$s/a \quad \left.\begin{array}{c} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} S$$

Com A (m x n), n > m. Seja A^I a matriz composta por m colunas L.I. (ou seja, uma base) de A e A^J as colunas restantes. Nós podemos escrever:

$A^I x_I + A^J x_J = b \qquad x_I = (A^I)^{-1} b - (A^I)^{-1} A^J x_J$

A solução é dita <u>básica</u> se:

$x_J = 0$ e $x_I = (A^I)^{-1} b$

Se além disso, $x_I \geq 0$, temos uma solução básica factível do PL.

Exemplo:

$$\begin{cases} \min & z = 1/2\,x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ s/a & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 6 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Seja I = {1, 4} o conjunto LI (base I) formado pelas colunas 1 e 4 de A. Então:

$$A^I = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad e \quad A^J = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A^I x_I + A^J x_J = b$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 6$$

$$(A^I)^{-1} = \begin{bmatrix} -2/14 & 4/14 \\ 4/14 & -1/14 \end{bmatrix}$$

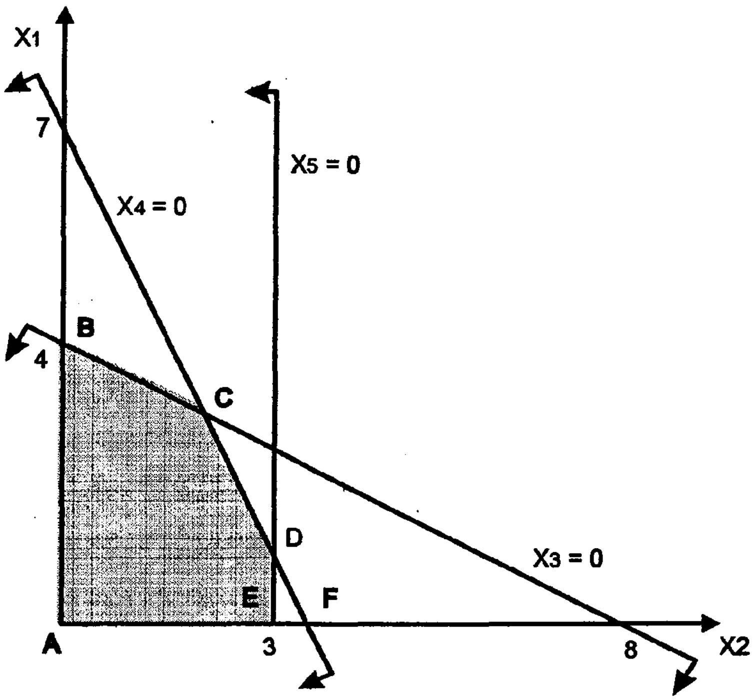
Solução Básica: $\begin{array}{l} x_J = 0 \;\therefore\; x_2 = 0 \\ \qquad\qquad\;\; x_3 = 0 \end{array}$

$$x_I = (A^I)^{-1} b \;\therefore\; \begin{vmatrix} x_1 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/14 & 4/14 \\ 4/14 & -1/14 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 \\ 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

4) Uma solução básica factível de um PL é um ponto extremo do conjunto (polígono) de soluções factíveis de (S) e vice-versa.

Exemplo: Para o PL abaixo, ache para cada ponto extremo do polígono das regiões factíveis a solução básica factível

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ s/a & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ s/a & 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} IA = \{3,4,5\} \\ JA = \{1,2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_3 = 8 \\ x_4 = 7 \\ x_5 = 3 \end{array}\right\} \text{ ponto extremo A}$$

$$\left.\begin{array}{l} IB = \{1,4,5\} \\ JB = \{2,3\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_4 = 3 \\ x_5 = 3 \end{array}\right\} \text{ ponto extremo B}$$

$$\left.\begin{array}{l} IC = \{1,2,5\} \\ JC = \{3,4\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_5 = 1 \end{array}\right\} \text{ ponto C}$$

$$\left.\begin{array}{l} ID = \{1,2,3\} \\ JD = \{4,5\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{array}\right\} \text{ ponto D}$$

$$\left.\begin{array}{l} IE = \{2,3,4\} \\ JE = \{1,5\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 1 \end{array}\right\} \text{ ponto E}$$

$$\left.\begin{array}{l} IA = \{2,3,5\} \\ JA = \{1,4\} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_2 = 7/2 \\ x_3 = 7/2 \\ x_5 = -1/2 \end{array}\right\} \text{ ponto F}$$

Solução básica infactível pois $x_5 < 0$

3.4.3 RESOLUÇÃO DO PL ATRAVÉS DO MÉTODO SIMPLEX

Para se resolver o PL através do método simplex é necessário que o problema esteja na forma canônica. Um PL está canônica quando ele tem uma solução básica inicial e esta forma uma base canônica.

Exemplo: Seja o PL:

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ s/a & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 \leq 3 \end{array}$$

colocando este PL na forma padrão nós temos:

$$\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & & & = z \quad (\max) \quad (\text{linha da F.O.}) \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 8 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 7 \\ & x_2 & & & +x_5 & = 3 \end{array}$$

Se considerarmos a base $I = \{3, 4, 5\}$ nós teremos uma solução básica factível inicial

$$\begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \\ x_3 = 8, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 3 \end{cases}$$

colocando este PL na tabela (tableau)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	1	1	0	0	0	z - 0	linha da F.O.
x_3	2	1	1	0	0	8	
x_4	1	2	0	1	0	7	
x_5	0	1	0	0	1	3	

Observe na tabela (tableau) que:

* As variáveis de base $I = \{3, 4, 5\}$, (x_3, x_4, x_5) formam uma matriz identidade (base canônica)

* Os coeficientes c_j da função objetivo (linha da F.O.) para as variáveis da base (c_3, c_4, c_5) são iguais a zero.

Esta é uma forma canônica do PL para esta base.

PROCEDIMENTO DO MÉTODO SIMPLEX (maximização)

Passar de uma solução básica factível a outra, tentando melhorar a função objetivo:

1) Escolher uma variável não básica que melhore a função objetivo $\hat{c}_j > 0$ e colocá-la na base.

2) Escolher uma variável básica para sair da base de modo a manter a factibilidade $(x_i \geq 0)$.

Exemplo: Resolvendo o PL do exemplo anterior

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & +x_2 & & & & = z - 0 \quad \text{(linha da F.O.)} \\
2x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 8 \\
x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 7 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = 3 \\
x_i \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

Este PL já tem solução inicial igual $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$, $x_5 = 3$.

Escolho x_2 para aumentar de valor (entrar na base I) e conservo x_1 no nível zero (fora da base).

Para manter a factibilidade

$$\begin{array}{lllll}
x_3 = 8 - x_2 & \Rightarrow & 8 - x_2 \geq 0 & \Rightarrow & x_2 \leq 8 \\
x_4 = 7 - 2x_2 & & 7 - 2x_2 \geq 0 & & x_2 \leq 7/2 \\
x_5 = 3 - x_2 & & 3 - x_2 \geq 0 & & x_2 \leq 3 \rightarrow \text{linha de bloqueio}
\end{array}$$

Conclusão: * x_2 entra na base (assume valor positivo)

* x_5 sai da base (assume valor zero)

$I = \{3, 4, 5\} \Rightarrow I' = \{3, 4, 2\}$

Para colocar o PL na forma canônica relativa a base I', basta pivotear em torno do elemento

A_3^2 $\begin{array}{l} \rightarrow \text{coluna} \\ \rightarrow \text{linha} \end{array}$

Isto pode ser visto melhor através da tabela (tableau)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	1	0	0	0	z - 0
x_3	2	1	1	0	0	8
x_4	1	2	0	1	0	7
x_5	0	1	0	0	1	3
	1	0	0	0	-1	z - 3
x_3	2	0	1	0	-1	5
x_4	1	0	0	1	-2	1
x_5	0	1	0	0	1	3

$\hat{c}_2 > 0$

nova solução básica factível relativa a base

I' = {3, 4, 2}

Observe agora que $\hat{c}_1 = 1 > 0$. Então se aumentarmos o valor de x_1 a função z vai crescer. Então faço x_1 crescer (entrar na base) e mantenho $x_5 = 0$ (fora da base)

$x_3 = 5 - 2x_1$
$x_4 = 1 - x_1$
$x_2 = 3$
para manter a factibilidade:

$5 - 2x_1 \geq 0 \qquad x_1 \leq 5/2$
$1 - x_1 \geq 0 \qquad x_1 \leq 1 \rightarrow$ linha de bloqueio
x_1 irrestrito

Conclusão: * x_1 entra na base
* x_4 sai da base
I' = {3, 4, 2} ⇒ I" = {3, 1, 2}

Pivotear em torno de A_2^1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	-1	1	z - 4
x_3	0	0	1	-2	3	3
x_4	1	0	0	1	-2	1
x_5	0	1	0	0	1	3

nova solução básica factível relativa a base I"

Como $\hat{c}_5 = 1 > 0$ se aumentarmos x_5, o valor de z aumenta.

$x_3 = 3 - 3x_5$
$x_1 = 1 + 2x_5$
$x_2 = 3 - x_5$

para manter a factibilidade:

$3 - 3x_5 \geq 0 \qquad x_5 \leq 1 \rightarrow$ linha de bloqueio

$1 + 2x_5 \geq 0 \qquad x_1 \leq -1/2$

$3 - x_5 \geq 0 \qquad x_5 \leq 3$

O bloqueio é em x_3 (linha l), logo: * x_5 entra na base,
* x_3 sai da base.

$I'' = \{3, 1, 2\} \Rightarrow I''' = \{5, 1, 2\}$

Pivotear em A_1^5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	-1/3	-1/3	0	z - 5
x_3	0	0	1/3	-2/3	1	1
x_4	1	0	2/3	-1/3	0	3
x_5	0	1	-1/3	2/3	0	2

solução básica ótima

$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_5 = 1$

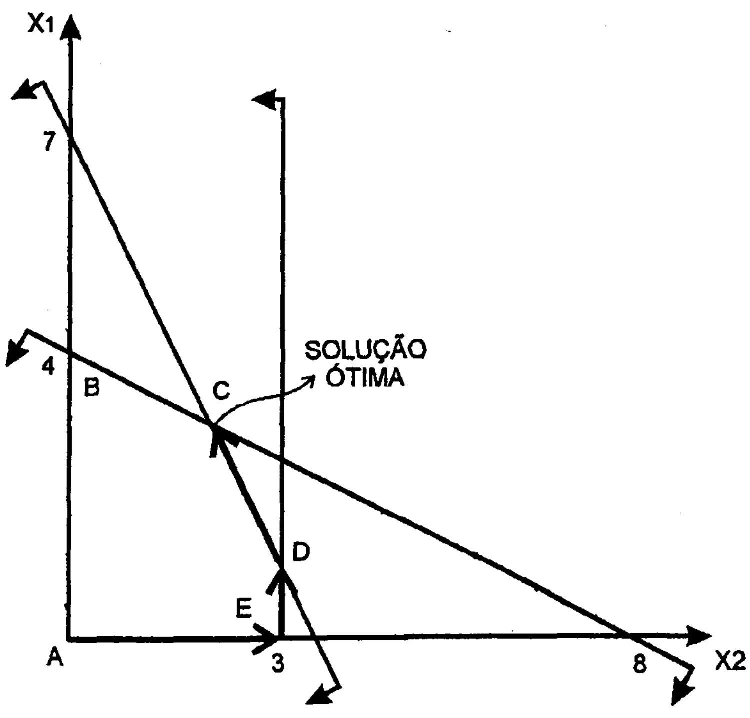
$x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \quad$ e $\quad z = 5$

$\Rightarrow$ Todos os coeficientes da função objetivo ($\hat{c}_j$) são negativos $\Rightarrow$ z não pode mais aumentar.

3.4.4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO SIMPLEX

Caminha de modo extremo em ponto extremo adjacente através da aresta que os liga no sentido de crescer z.

<u>Obs</u>: o que aconteceria se na primeira iteração ao invés de x_2 fizéssemos x_1 entrar na base?



PROCEDIMENTO SIMPLEX (resumido)

A partir de uma BASE INICIAL FACTÍVEL

1) verificar se a base factível atual é ótima.
   Se for terminar.
   Senão vá para 2.
2) determine a variável não-básica a entrar na base.
3) determine a variável básica a sair da base.
4) achar a nova solução básica factível (por pivoteamento) e voltar a 1.

3.4.5 CASOS ESPECIAIS

Serão mostrados a seguir alguns casos especiais que podem ocorrer nos modelos de programação linear.

1) **Problema de Minimização (função objetivo de min)**
   Pode-se fazer uma das duas coisas a saber:

   a) transformar o problema de minimização num problema de maximização, isto é
   $\min \; z(x) = -(\max \; z(x))$

   b) mudar o teste para saber se a solução é ótima e o critério de entrada na base; isto é a solução é ótima se todos $\hat{c}_j \geq 0$ e entra na base o $\hat{c}_j$ mais negativo.

2) **Empate na Entrada**
   Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente.

3) **Empate na Saída - Degeneração**
   Como no caso anterior a decisão deve ser arbitrária. Só que agora teremos uma solução básica degenerada, isto é, uma variável vai estar na base com um valor igual a zero.

4) **Soluções Múltiplas**
   Eventualmente um modelo de PL pode apresentar mais de uma solução ótima.
   Quando o $\hat{c}_j$ de uma variável que estiver fora da base for igual a zero, teremos solução múltipla. A variável pode entrar na base que não altera o valor de z.

Exemplo (SOLUÇÃO DEGENERADA):

$$\max \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$s/a \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

colocando na forma padrão:

$$\max \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$s/a \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	5	2	0	0	0	z - 0
x_3	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	4	3	0	0	1	12
	pivoteando					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	2	-5	0	0	z - 15
x_1	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	0	3	-4	0	1	0

$\hat{c}_1 = 5 > 0 \;\therefore\;$ deve crescer

linha 1 $\Rightarrow 3 - x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 3$

linha 2 x

linha 3 $\Rightarrow 12 - 4x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 3$

Nos dois lados tem-se $x_1 \leq 3$

escolhi x_3 para sair da base

Note que a variável básica $x_5 = 0$. Isto sempre ocorrerá quando houver empate na saída. Neste caso diz-se que a solução é básica degenerada.

Agora x_2 deve crescer (entrar na base) pois $\hat{c}_2 > 0$, x_5 deve decrescer (sair da base).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	-7/3	0	-2/3	z - 15
x_1^*	1	0	1	0	0	3
x_4^*	0	0	4/3	1	-1/3	4
x_2^*	0	1	-4/3	0	1/3	0

Solução ótima pois todos $\hat{c}_j \leq 0$

Se na ocasião do empate fosse escolhido x_5, em vez de x_3 para sair da base, obter-se-ia:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	-7/4	0	0	-5/4	z - 15
x_3^*	0	-3/4	1	0	-1/4	0
x_4^*	0	1	0	1	0	4
x_1^*	1	3/4	0	0	1/4	3

Deve-se ressaltar que no segundo caso conseguiu-se chegar à solução ótima com uma iteração a menos.

Exemplo (SOLUÇÃO MÚLTIPLA)

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s/a \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Colocando o problema na forma padrão, obtemos

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$s/a \begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	2	0	0	0	z - 0
x_3	1	0	1	0	0	3
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	1	2	0	0	1	9

como $\hat{c}_2 = 2 > 0 \;\therefore\; x_2$ é candidata a entrar na base

$x_3 = 3 - 0x_2 \geq 0$

$x_4 = 4 - x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 4$ bloqueio linha 2

$x_5 = 9 - 2x_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 9/4$

$\therefore\; x_4$ sai da base

Pivotear em torno do elemento A_2^2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	-2	0	z - 8
x_3	1	0	1	0	0	3
x_2	0	1	0	1	0	4
x_5	1	0	0	-2	1	1

como $\hat{c}_1 > 0 \;\therefore\; x_1$ é candidata a entrar na base

bloqueio:

linha 1 $\Rightarrow 3 - x_1 \geq 0 \quad x_1 \leq 3$

linha 2 $\Rightarrow x_2 = 4$

linha 3 $\Rightarrow x_5 = 1 - x_1 \quad x_1 \leq 1$ bloqueio linha 3 $\;\therefore\; x_5$ sai da base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	0	-1	z - 9
x_3^*	0	0	1	2	-1	2
x_2^*	0	1	0	1	0	4
x_1^*	1	0	0	-2	1	1

SOLUÇÃO ÓTIMA: $z=9 \quad x_1=1 \quad x_2=4 \quad x_3=2 \quad x_4=0 \quad x_5=0$

Note que x_4 está fora da base com $\hat{c}_4=0$.

A função objetivo é : $z-9=0x_4-x_5 \qquad z=9+0x_4-x_5$

Isto significa que a variável x_4 pode entrar na base tomando qualquer valor, que a função objetivo ficará com seu valor inalterado.

Fazendo x_4 entrar na base, obtém-se:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	0	-1	z - 9
x_4^*	0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2^*	0	1	-1/2	0	1/2	3
x_1^*	1	0	1	0	0	3

Note que $\hat{c}_3=0$, logo se x_3 entrar na base deve-se retornar ao quadro anterior.

Exemplo (SOLUÇÃO ILIMITADA):

$$\max \quad z=3x_1+x_2$$

$$s/a \begin{cases} x_1-6x_2\le 6 \\ -4x_1+x_2\le 4 \\ x_i\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-6x_2+x_3 \qquad =6 \\ -4x_1+x_2 \qquad +x_4=4 \\ x_i\ge 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	3	1	0	0	z
x_3	1	-6	1	0	6
x_4	-4	1	0	1	4
	0	19	-3	0	z - 18
x_1	1	-6	1	0	6
x_4	0	-23	4	1	28

$x_1\le 6 \quad \therefore$ bloqueio linha 1

$x_4=4+4x_1\ge 0 \quad x_1\ge -1$

$\hat{c}_2=19>0 \quad \therefore \quad x_2$ é candidato a entrar na base mas como todos os elementos de $A^2<0$ (A_1^2 e $A_2^2<0$) não temos candidato para sair da base. Logo solução ilimitada.

EXPRESSÕES PARAMÉTRICAS DO CRESCIMENTO ILIMITADO

$$x_1=6+6x_2\ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_2\ge -1$$
$$x_4=28+23x_2\ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_2\ge -28/23$$
$$z=18+19x_2 \quad \Rightarrow \quad z=18+19x_2-3x_3$$

3.4.6 ALGORITMO SIMPLEX (não estruturado)

Supondo que seja conhecida uma base factível inicial I:

1) Coloque o problema na forma canônica relativa a base I

2) Determine $\hat{c}^s = \max\limits_{i \in I} \hat{c}^i$

2.1) Se $\hat{c}^s \leq 0$, então terminou.
A solução básica correspondente à base I é ótima

2.2) Se $\hat{c}^s > 0$, então vá para 3.

3) Examine o vetor

3.1) Se $\hat{A}^s \leq 0$ (isto é, todos seus componentes não são positivos), então terminou.
O PL tem solução ilimitada (infinita)

3.2) Se $\{i | \hat{A}_i^s > 0\} \neq 0$

a) Determine r tal que $\dfrac{\hat{b}_r}{\hat{A}_r^s} = \min\limits_{\{i | \hat{A}_i^s > 0\}} \left\{ \dfrac{b_i}{\hat{A}_i^s} \right\}$

b) Identifique $\hat{A}_r^s$ como elemento PIVÔ.
Defina a nova base I' trocando s por r.

c) Pivoteie em torno de $\hat{A}_r^s$ e volte a 2

3.4.7 OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL

Dado um problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ s/a \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad b \geq 0 \end{aligned}$$

Se não houver nenhuma matriz identidade

$$\min \sum_{i=n+1}^{n+m} 1 x_i \qquad s/a \quad Ax + \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = b$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n + m$$

Exemplo:
$$\begin{cases} (\max) & z = -x_1 + 2x_2 \\ s/a & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Colocando na forma padrão:

$$\max \quad z = -x_1 + 2x_2$$
$$s/a \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 7$$

I = {6, 7, 5} é uma BASE FACTÍVEL que fornece uma solução de partida para o SIMPLEX.

Porém, o novo PL só será equivalente ao PL original se as variáveis artificiais forem nulas.

$$\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix} \equiv \begin{matrix} Ax + x_a \\ x, x_a \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x_a = \phi$$

PROCEDIMENTO PARA GERAR AS VARIÁVEIS ARTIFICIAIS
MÉTODO DAS DUAS FASES

FASE 1

Resolver o PL artificial:

$$\begin{aligned} \min \quad & \phi = 1x_a \\ s/a \quad & Ax + x_a = b \\ & x, x_a \geq 0 \end{aligned}$$

pelo método SIMPLEX. Se o ótimo encontrado for $\phi = 0$ (isto é, $x_a = 0$), então a solução ótima correspondente é uma solução básica factível para o P.L. original.

Se o valor ótimo de ϕ for > 0 $(x_a \neq 0)$ $\Rightarrow$ o PL original é INFACTÍVEL.

A solução do PL artificial pode ter $x_a = 0$ com alguma variável artificial na base (DEGENERAÇÃO).

FASE 2

Com a solução básica factível encontrada na FASE 1, aplica-se o SIMPLEX ao PL original.

Resolvendo o exemplo dado nesta seção, temos:

FASE 1

$$
\begin{array}{ll}
(\min)\ \phi = & x_6 + x_7 \\
s/a & \left\{
\begin{array}{lllllllll}
x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = 2 \\
-x_1 & +x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = 1 \\
 & x_2 & & & +x_5 & & & = 3 \\
x_i \geq 0 & & i = 1, 2, \ldots, 7 & & & & &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
	0	0	0	0	0	1	1	ϕ	
	1	1	-1	0	0	1	0	2	
	-1	1	0	-1	0	0	1	1	colocação na
	0	1	0	0	1	0	0	3	forma canônica
	0	-2	1	1	0	0	0	ϕ - 3	em relação à base
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2	I = {6, 7, 5}
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3	
	-2	0	1	-1	0	0	2	ϕ - 1	
x_6	2	0	-1	1	0	1	-1	1	I = {6, 2, 5}
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1	
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2	
	0	0	0	0	0	1	1	ϕ - 0	
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2	I = {1, 2, 5}
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2	BASE ÓTIMA
x_5	0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2	

Fim da FASE 1:

$$\left.\begin{array}{l}\phi = 0 \\ x_6 = x_7 = 0\end{array}\right\}\quad \text{O P.L. original é factível}$$

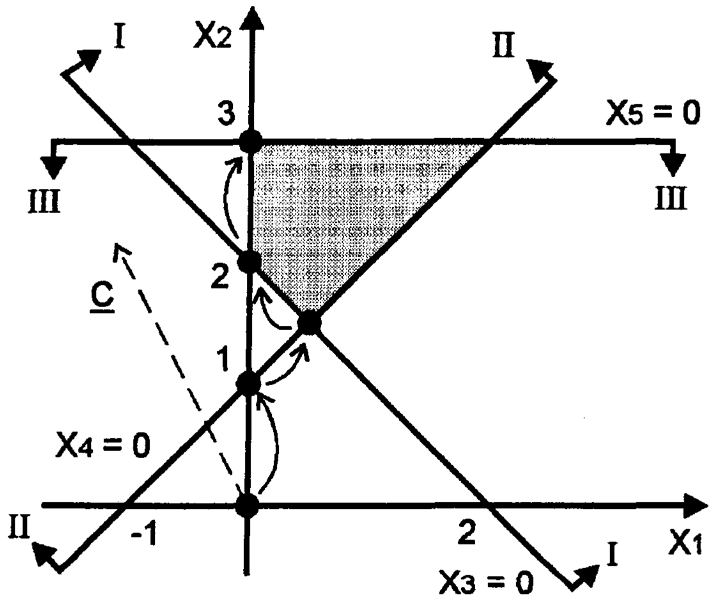
FASE 2

Substituindo no quadro a função objetivo artificial pela original e abandonando as variáveis artificiais:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	-1	2	0	0	0	z	
	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	
	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2	colocação na
	0	0	1/2	1/2	1	3/2	forma canônica
	0	0	1/2	3/2	0	z - 5/2	em relação à base
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	I = {1, 2, 5}
x_2	0	1	-1/2	-1/2	0	3/2	
x_5	0	0	1/2	1/2	1	3/2	
	-3	0	2	0	0	z - 4	
x_4	2	0	-1	1	0	1	I = {4, 2, 5}
x_2	1	1	-1	0	0	2	
x_5	-1	0	1	0	1	1	
	-1	0	0	0	-2	z - 6	
x_4	1	0	0	1	1	2	I = {4, 2, 3}
x_2	0	1	0	0	1	3	BASE ÓTIMA
x_3	-1	0	1	0	1	1	

SOLUÇÃO: $x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1$
$x_4 = 2 \quad x_5 = 0 \quad z = 6$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



EXERCÍCIOS II

1. Colocar na forma padrão o modelo abaixo

$$\text{Max } z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\geq 5 \\ x_2 - x_3 + x_4 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 &\geq -5 \\ x_1 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_2 \text{ livre}$$

2. Resolva pelo método simplex o seguinte PL

$$(\text{Max}) \quad Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.a} \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

faça a interpretação geométrica do problema.

3. **Resolva pelo simplex**

$$\text{Max } f = (1 \quad 2)\, x$$

$$\text{s.a.} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x \geq 0$$

4. **Resolva, pelo simplex, o PL abaixo**

$$\text{Max} \quad Z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

Quantas soluções tem este problema?

5. Resolva

$$(\max)\quad f = 6x_1 + 10x_2$$

$$s/a\quad \begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 36 \\ x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. Um fazendeiro tem 200 unidades de área de terra, onde planeja cultivar trigo, arroz e milho. A produção esperada é de 1800 Kg por unidade de área plantada de trigo, 2100 Kg por unidade de área plantada de arroz e 2900 Kg por unidade plantada de milho. Para atender ao consumo interno de sua fazenda, ele deve plantar pelo menos 12 unidades de área de trigo, 16 unidades de área de arroz e 20 unidades de área de milho, ele tem condições de armazenar no máximo 700000 Kg. Sabendo que o trigo dá um lucro de 1.20 cruzeiros por Kg, o arroz 60 centavos por Kg e o milho 28 centavos por Kg, quantas unidades de área de cada produto ele deve plantar para que o seu lucro seja o maior possível?

7. Um jovem está saindo com duas namoradas: Maria e Luisa. Sabe por experiência que:

a) Maria, elegante, gosta de frequentar lugares sofisticados, mais caros, de modo que uma saida de 3 horas custará 240 cruzeiros;

b) Luisa, mais simples, prefere um divertimento mais popular; de modo que uma saida de 3 horas custará 160 cruzeiros;

c) Seu orçamento permite dispor de 960 cruzeiros mensais para diversão;

d) Seus afazeres escolares lhe dão liberdade de no máximo 18 horas e 4000 calorias de sua energia para atividades sociais;

e) Cada saida com Maria consome 5000 calorias, mas com Luisa, mais alegre e extrovertida, gasta o dobro;

f) Ele gosta das duas com a mesma intensidade.

Como ele deve planejar a sua vida social para obter o número máximo de saidas?

8. O setor de transporte de cada da VASP operando em São Paulo dispõe de 8 aviões B-727, 15 aviões Electra e 12 aviões Bandeirante para vôos amanhã. Há carga para remeter amanhã para o Rio de Janeiro (30 ton) e Porto Alegre (20 ton). Os custos e tonelagens dos aviões são:

	B-727	Electra	Bandeirante
SP - RJ	23	5	1.4
SP - PA	58	10	3.8
Tonelagem	45	7	4

Quantos e quais aviões devem ser mandados para o RJ e PA para satisfazer a demanda e minimizar os custos?

9. Problema das Batatas:

Uma Companhia de Alimentos produz três tipos de batata frita: palito, ondulada e palha. Desde o começo do processo de manufatura, as batatas são ordenadas pelo tamanho e pela qualidade, sendo separadas em linhas de produção.

Esta companhia possui dois fornecedores de batatas brutas. As batatas fornecidas são alocadas conforme a tabela 1, ou seja, o rendimento das batatas brutas por fornecedor.

	Fornecedor 1	Fornecedor 2
PALITO	20%	30%
ONDULADA	20%	10%
PALHA	30%	30%
não usada (lixo)	30%	30%

Tabela 1 - RENDIMENTO - Tipo de batata frita produzida apartir das batatas brutas de cada fornecedor.

As batatas do fornecedor 2 são mais lucrativas, sendo sua contribuição no lucro por tonelada de batata bruta igual a 6. Enquanto o fornecedor 1 contribui no lucro por tonelada em 5.

A companhia sabe que não pode estocar por muito tempo suas batatas manufaturadas, por isso, existe um limite na produção de cada tipo de batata, conforme tabala 2.

PALITO	1.8
ONDULADA	1.2
PALHA	2.4

Tabela 2 - LIMITE DE PRODUÇÃO, em toneladas, para cada tipo de batata frita.

Baseado nos dados fornecidos, o gerente de produção deseja definir: Quantas toneladas de batatas brutas comprará de cada fornecedor?

Equacione o sistema e encontre a melhor quantidade de batata a ser compreada de cada fornecedor.

10. Um companhia produz 2 tipos de aparelhos elétricos, que requerem 4 processos para suas manufaturas.

HORAS-HOMENS GASTAS:

	USINAGEM DAS PEÇAS DE METAL	USINAGEM DAS PEÇAS DE PLASTICO	INSTALAÇÃO ELÉTRICA	PINTURA
LIQUIDIFICADOR	0.2	0.5	0.3	0.25
BATEDEIRA	0.4	0.6	0.6	0.1

HORAS-HOMENS DISPONÍVEIS:

USINAGEM DAS PEÇAS DE METAL	USINAGEM DAS PEÇAS DE PLASTICO	INSTALAÇÃO ELÉTRICA	PINTURA
56	120	130	26

LUCRO EM CADA TIPO DE APARELHO ELÉTRICO:

LIQUIDIFICADOR	R$ 18.00
BATEDEIRA	R$ 20.00

Com os dados acima:

a) FORMULE o problema.

b) Faça a INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA para determinar quantos aparelhos de cada tipo de aparelho elétrico a companhia deve produzir para maximizar o lucro.

c) Use o método SIMPLEX para determinar quantos aparelhos de cada tipo de aparelho elétrico a companhia deve produzir para maximizar o lucro.

d) Refaça o item c) considerando que para o lucro para cada liquidificador seja R$ 10,00.

BIBLIOGRAFIA

Bishop, A. B., *Introduction to Discrete Linear Controls*, Academic Press, 1975.

Cohen, S. S., *Operational Research*, Edward Arnold, 1985

Phillips, D. T., *Operations and Research*, John Wiley & Sons Inc., 1976.

Poljak, B. T., *Minimization of Unsmooth Functionals*, USSR Computational Mathematics and Mathematics Physics, vol 9, n. 3, 1969.

Saaty, T. L., *Mathematical Methods of Operations Research*, Mc-Graw Hill Inc., 1959.

Szegö, G. P., *Minimization Algorithms, Mathematical Theories and Computer Results*, Academic Press, 1972.

Wagner, H. M., *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall Inc., 1975.