

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ESCOAMENTO
INCOMPRESSÍVEL**

**Valdemir G. Ferreira
João L. F. Azevedo
José A. Cuminato**

**Notas Didáticas
1997**

1. INTRODUÇÃO

Uma simulação computacional bem sucedida de um processo natural requer fundamentalmente a escolha de um modelo matemático que descreva o processo, um algoritmo de discretização que reduza o problema a um procedimento computacional simples e um método através do qual a solução das equações discretizadas é determinada. Nestas notas, o processo natural considerado é o escoamento de um fluido viscoso e incompressível. O modelo teórico que descreve o escoamento é governado pelas equações de Navier-Stokes dependentes do tempo e a técnica de discretização utilizada é o método de diferenças finitas.

Devido às restrições impostas pelo custo computacional, o desenvolvimento de métodos numéricos para simular escoamentos de fluidos tem sido concentrado em problemas de estado estacionário. Entretanto, muitas das situações que ocorrem na prática são inerentemente não estacionárias. As limitações impostas pelos recursos computacionais são particularmente evidentes em simulações de escoamentos incompressíveis não estacionários, desde que a cada instante várias iterações são necessárias para impor a restrição de incompressibilidade. Com a contínua redução em custos computacionais, nos últimos anos atenção especial tem sido dedicada à simulação de escoamentos incompressíveis em regime não estacionário [5-15].

Existem basicamente duas maneiras de encontrar soluções aproximadas para escoamento de fluidos incompressíveis. Uma delas é a formulação do problema em variáveis primitivas, ou formulação velocidade-pressão, onde as variáveis u , v , w e p são utilizadas e procedimentos especiais são introduzidos para tratar a equação que descreve a conservação de massa durante o processo. Nesta formulação, além da falta de condições de fronteira para a pressão, a presença da restrição de incompressibilidade, a qual deve ser satisfeita em todo tempo, não permite a utilização de métodos explícitos simples de solução. Uma outra alternativa é a formulação do problema em vorticidade. Esta formulação, em contraste com a velocidade-pressão, envolve somente dois campos escalares desconhecidos: a função de corrente e a vorticidade. A principal desvantagem nesta formulação é que ela não é facilmente estendida para escoamentos tridimensionais. Por esta razão, as técnicas numéricas recentemente utilizadas para resolver a formulação incompressível das equações de Navier-Stokes, tratam o problema em variáveis primitivas [19-21].

O tratamento numérico no caso incompressível e em variáveis primitivas tem sido, nos últimos anos, um assunto de muitas pesquisas [32-37]. Uma técnica bastante utilizada é o método da compressibilidade artificial, ou pseudo

compressibilidade, introduzida por Chorin em 1967 [7]. O princípio do método é considerar a solução das equações de Navier-Stokes estacionárias como o limite, quando $t \rightarrow \infty$, da solução das equações não estacionárias e, substituir a equação da conservação de massa por uma equação perturbada, com a finalidade de obter um sistema de equações de evolução temporal cuja solução numérica pode ser facilmente obtida por métodos padrões. Outros métodos também bastante utilizados usam a equação da conservação de massa para derivar uma equação de Poisson para a pressão. O algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) de Patankar [23], os métodos de passo fracionário de Chorin [8] e o método MAC (Marker-and-Cell) de Harlow e Welch [14] estão dentro desta categoria. Nesses algoritmos uma correção prevista para a pressão é usada para corrigir um campo de velocidade intermediário o qual satisfaz a conservação de massa. Os métodos citados acima são aplicados principalmente em problemas onde as forças inerciais são maiores que as forças viscosas, isto é, o número de Reynolds é maior que 1. Devido às limitações impostas pelas restrições de estabilidade numérica, estes métodos não são eficientes para escoamentos onde o número de Reynolds é menor que 1 [10-26]. Uma extensão do método MAC e que permite simular escoamentos em baixo número de Reynolds foi derivado por Pracht [26], usando um esquema implícito. Outros tipos de métodos podem ser derivados para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis e não estacionárias, pela completa discretização implícita das equações e consequentemente a solução iterativa de sistemas não lineares [24]. A eficiência desses procedimentos depende fortemente das técnicas de solução empregadas para resolver sistemas não lineares.

Um dos problemas fundamentais no processo de resolução das equações de Navier-Stokes incompressíveis, e em variáveis primitivas, usando a metodologia de diferenças finitas ou volumes finitos, é onde posicionar as incógnitas u , v , w e p na malha [37]. Duas possibilidades amplamente utilizadas são as malhas diferenciadas (em inglês “staggered”) e não diferenciadas. Em uma malha do tipo não diferenciada todas as incógnitas são avaliadas numa mesma posição, ao passo que numa malha tipo diferenciada as variáveis são posicionadas em diferentes pontos da malha.

Os objetivos deste trabalho são, apresentar alguns métodos amplamente utilizados na literatura para as equações de Navier-Stokes incompressíveis e simular o escoamento de um fluido viscoso e incompressível numa cavidade quadrada bidimensional usando um método completamente implícito. A expectativa é que a simulação seja bem sucedida para Reynolds da ordem de 10^{-2} .

2. AS EQUAÇÕES GOVERNANTES E UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL E DE FRONTEIRA

Durante a evolução de um escoamento a massa de qualquer partícula do fluido deve ser conservada. Se ρ é a massa por unidade de volume (densidade) do fluido e $U=(u,v)$ é a velocidade da partícula então, a equação fundamental que expressa a conservação de massa é [11]

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0.$$

Para substâncias líquidas, onde grandes variações na pressão são necessárias para alterar a densidade, a hipótese de incompressibilidade é usualmente utilizada [1]. Assumindo que ρ é constante, a equação da conservação de massa pode ser escrita como

$$\nabla \cdot (U) = 0. \quad (2.1)$$

Neste trabalho assumimos que o fluido é isotérmico de tal forma que todas as quantidades envolvidas, em particular a viscosidade, podem ser consideradas constantes com respeito à temperatura. Assim, a equação que descreve o movimento do fluido pode ser escrita como [3]

$$\partial_t U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p - \mu \nabla^2 U - F = 0, \quad (2.2)$$

onde p é a pressão dividida pela densidade e μ é a viscosidade cinemática. Fisicamente, a equação (2.2) descreve a produção local de momentos em termos das seguintes quantidades: $(U \cdot \nabla)U$ descreve a convecção de momentos devido ao movimento do fluido; ∇p é a variação de momento que aparece devido às forças de pressão normais; $\mu \nabla^2 U$ representa a difusão de momento devido aos processos viscosos e F descreve a produção de momento por forças externas. Usando a equação (2.1), a equação (2.2) pode ser reescrita na forma conservativa como

$$\partial_t U + \nabla \cdot (UU) + \nabla p - \mu \nabla^2 U - F = 0. \quad (2.3)$$

Num escoamento, sejam os valores característicos de comprimento e velocidade L_c e U_c , respectivamente. Então, definindo as seguintes variáveis adimensionais

$$U = U_c \underline{U}, \quad x = L_c \underline{x}, \quad t = L_c t / U_c \quad \text{e} \quad p = \rho U_c^2 \underline{p},$$

as equações (2.1)-(2.3) tomam as formas adimensionais

$$\partial_t U + \nabla \cdot (UU) + \nabla p - R_c^{-1} \nabla^2 U - F = 0, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (2.4b)$$

onde $R_c = U_c L_c / \mu$ é o número de Reynolds. O escoamento estará completamente especificado quando a velocidade $U=(u,v)$ e a pressão p forem conhecidos em cada ponto $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \times (0, T_{\max}]$. Para facilitar o desenvolvimento que segue, o vetor que representa as forças externas será desprezado na formulação.

As equações (2.4a) e (2.4b) são conhecidas na literatura como equações de Navier-Stokes incompressíveis e representam o modelo matemático das leis de conservação de momento e massa, respectivamente. Usualmente, a equação (2.4a) é chamada de equação de momentos e a equação (2.4b) é conhecida como equação da continuidade ou restrição de incompressibilidade. Com condições iniciais e de fronteira adequadas estas equações constituem um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP) para as incógnitas U e p . Um problema típico de valor inicial e de fronteira associado a (2.4) e que aparece com frequência na literatura, por exemplo [4-9-18-33], é o de encontrar U e p num domínio Ω , com fronteira Γ , tal que U é especificada na fronteira (problema de Dirichlet), U é conhecida em $t=0$, com $t \in [0, T_{\max}]$, e nenhuma condição é imposta sobre p . Na simulação que apresentamos neste trabalho, o domínio é $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ e as equações (2.4) são resolvidas numericamente, num contexto de diferenças finitas, com condições iniciais e de fronteira homogêneas.

3. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS E EM VARIÁVEIS PRIMITIVAS

No contexto de variáveis primitivas (u,v,p) , e na ausência de forças externas, as equações de Navier-Stokes adimensionais podem ser escritas em forma de leis de conservação como

$$\partial_t U + \nabla \cdot (UU) + \nabla p = R_c^{-1} \nabla^2 U, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot U = 0, \quad (3.1b)$$

Em coordenadas cartesianas, os termos presentes nas equações (3.1) são dados por [25]

$$\nabla \cdot (UU) = [\partial_x u^2 + \partial_y(uv)]\mathbf{i} + [\partial_y v^2 + \partial_x(uv)]\mathbf{j},$$

$$\nabla p = \partial_x p \mathbf{i} + \partial_y p \mathbf{j},$$

$$\nabla^2(\cdot) = \partial_x(\partial_x(\cdot)) + \partial_y(\partial_y(\cdot)),$$

$$\nabla \cdot U = \partial_x u + \partial_y v.$$

Levando em conta os operadores definidos acima, o sistema (3.1) toma a seguinte forma

$$\partial_t u + \partial_x u^2 + \partial_y(uv) + \partial_x p = R_e^{-1} [\partial_x(\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u)], \quad (3.2a)$$

$$\partial_t v + \partial_y v^2 + \partial_x(uv) + \partial_y p = R_e^{-1} [\partial_x(\partial_x v) + \partial_y(\partial_y v)], \quad (3.2b)$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (3.2c)$$

onde u e v são as componentes de velocidade nas direções x e y respectivamente, p é a pressão estática e R_e o número de Reynolds. No problema de valor inicial associado, as componentes u e v devem ser especificadas ao longo da fronteira do domínio computacional. O valor de U na fronteira deve também satisfazer a seguinte restrição [11]

$$\int_{front} U \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal exterior à fronteira Γ e as condições iniciais $U_0 = (u_0(x, y), v_0(x, y))$ devem satisfazer $\nabla \cdot U_0 = 0$. A equação (3.3) é a equivalência global de (3.2c). Neste ponto, é importante observar que as equações de Navier-Stokes (3.2) não possuem solução única, pois a variável dependente p pode ser substituída por $p+c$, c constante, e nada mudará. As equações discretizadas de Navier-Stokes devem também preservar esta característica.

A maior dificuldade em resolver numericamente as equações de Navier-Stokes, para escoamento de fluidos incompressíveis, é a imposição rigorosa da equação da conservação de massa discretizada a cada nível de tempo. Os métodos numéricos em variáveis primitivas os quais são usualmente preferidos pelas facilidades de imposição de condições de fronteira (incluindo o caso de domínios multiplamente conexos [20]), apresentam dificuldades na determinação do campo de pressão consistente com o campo de velocidades “divergence-free”. Estas dificuldades podem ser superadas pela introdução de

uma equação de Poisson a qual requer substancial aumento no esforço computacional, ou a introdução de alguma compressibilidade artificial que permite obter algoritmos eficientes para o caso estacionário mas, produz efeitos distorcidos em fenômenos transientes. Existem dois métodos bastante populares para a solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis e em variáveis primitivas: o método da compressibilidade artificial e o método da equação de Poisson para a pressão. O método da compressibilidade artificial, inicialmente proposto por Chorin [7], tem como princípio básico a solução das equações estacionárias como o limite, quando $t \rightarrow \infty$, da solução das equações transientes. Um condicionamento é feito no sistema pela adição, na equação da continuidade, de uma derivada temporal multiplicada por uma constante positiva. O sistema resultante permite utilizar métodos numéricos derivados para escoamento de fluidos compressíveis, como por exemplo os algoritmos de Beam-Warming e Pulliam-Chaussee. Com o objetivo de esclarecer o que foi dito acima, consideremos as equações de Navier-Stokes com compressibilidade artificial

$$\partial_t U + \nabla \cdot (UU) + \nabla p = R_e^{-1} \nabla^2 U, \quad (3.4a)$$

$$\delta \partial_t p + \nabla \cdot U = 0, \quad (3.4b)$$

onde δ é o coeficiente de compressibilidade artificial. A restrição de “divergence-free” sobre U foi substituída por uma equação de evolução no tempo para a pressão. Isto implica que o sistema (3.4) pode ser resolvido por técnicas numéricas derivadas para o caso compressível. Para ilustrar este ponto, vamos considerar como exemplo a versão unidimensional inviscida de (3.4) como segue:

$$\partial_t \{u, p\}^t + \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix} \partial_x \{u, p\}^t = 0. \quad (3.5)$$

Os autovalores da matriz em (3.5) são determinados por

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 1/\delta & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

Isto acarreta que

$$\lambda = u \pm (u^2 + 1/\delta)^{1/2}.$$

Observe que os autovalores são reais e distintos e portanto por definição, (3.5) é um sistema de EDP hiperbólico. Ainda mais, os autovalores têm sinais opostos e portanto, o campo de escoamento é subsônico para qualquer valor de $\delta > 0$. Isto nos permite afirmar que não ocorrerá descontinuidades na solução, tais como choques. Assim, δ pode ser escolhido de forma a produzir rápida convergência para o estado estacionário. As equações (3.4) podem ser escritas como [29]

$$\partial_t Q + (A_x + A_y)Q = 0, \quad (3.6)$$

onde

$$Q = \{u, v, p\}^t,$$

$$A_x = \begin{pmatrix} M & 0 & \partial_x \\ 0 & M & 0 \\ (1/\delta)\partial_x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & \partial_y \\ 0 & (1/\delta)\partial_y & 0 \end{pmatrix}$$

com

$$M\theta = \partial_x(u\theta) - Re^{-1} \partial_x(\partial_x \theta),$$

$$N\theta = \partial_y(v\theta) - Re^{-1} \partial_y(\partial_y \theta),$$

$$\theta = u \text{ ou } v.$$

Introduzindo um estágio intermediário, denotado por $*$, e aproximando os termos convectivos em $n\delta t$, podemos marchar no tempo a equação (3.6) segundo o algoritmo

$$\begin{cases} Q^* - Q^n + \delta t(A_x^n Q^n + A_y^n Q^*) = 0 \\ Q^{n+1} - Q^n + \delta t(A_x^n Q^{n+1} + A_y^n Q^*) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Note que (3.7) constitui um sistema de equações não lineares nas variáveis Q^* , Q^{n+1} e portanto, a solução pode ser determinada usando processos iterativos [25]. Uma outra alternativa [29] é usar uma fatoração do tipo ADI (Alternating Direction Implicit). Em geral, a discretização espacial em (3.7) é feita sobre malhas diferenciadas usando diferenças de ordem baixa.

O método da equação de Poisson para a pressão (“pressure-based”), o qual é talvez o mais utilizado em escoamentos de fluidos incompressíveis, foi originalmente introduzido por Harlow e Welch [14] para a simulação de escoamentos transientes. A idéia básica do método é formular uma equação de Poisson para a pressão e então atualizar os campos de velocidade e pressão até que a equação da continuidade seja satisfeita. Com o objetivo de apresentar as idéias centrais do método, consideremos a metodologia de Harlow e Welch contida no método MAC. Dividindo a equação (3.4b) por δ e denotando $(1/\delta)=c^2$ teremos

$$\partial_t p + c^2 \nabla U = 0. \quad (3.8)$$

As equações (3.2) e (3.8) são discretizadas como

$$\begin{aligned} \delta_t^{-1}(u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n) + \{ \partial_x u^2 + \partial_y(uv) \}_{i+1/2,j}^n \\ + \Delta_x p_{i+1/2,j}^n = R_c^{-1} \nabla^2 u_{i+1/2,j}^n, \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \delta_t^{-1}(v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n) + \{ \partial_y v^2 + \partial_x(uv) \}_{i,j+1/2}^n \\ + \Delta_y p_{i,j+1/2}^n = R_c^{-1} \nabla^2 v_{i,j+1/2}^n, \end{aligned} \quad (3.9b)$$

$$\delta_t^{-1}(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n) + c^2(\Delta_x u_{i,j}^{n+1} + \Delta_y v_{i,j}^{n+1}) = 0, \quad (3.9c)$$

onde os operadores de diferença Δ_x , Δ_y e ∇^2 são definidos por

$$\Delta_x f_{i,j} = \delta_x^{-1}(f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j}),$$

$$\Delta_y f_{i,j} = \delta_y^{-1}(f_{i,j+1/2} - f_{i,j-1/2}),$$

$$\nabla^2 f_{i,j} = (\Delta_x \Delta_x + \Delta_y \Delta_y) f_{i,j}.$$

Se as componentes de velocidade, no nível $n+1$, que aparecem em (3.9c) forem substituídas usando (3.9a) e (3.9b) então, a equação (3.9c) pode ser reescrita como

$$p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n - c^2 \delta t^2 \nabla^2 p_{ij}^n = -c^2 \delta t \nabla^* \cdot \{U - \delta t (\nabla \cdot (UU) - Re^{-1} \nabla^2 U)\}_{ij}^n, \quad (3.10)$$

onde $\nabla^* = (\Delta_x, \Delta_y)$. No limite $n \rightarrow \infty$, devemos ter $p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^n$ e consequentemente,

$$\nabla^* \cdot U_{ij}^n = \{\nabla^* \cdot (\nabla^2 U)\}_{ij}^n = 0.$$

Portanto (3.10) torna-se

$$\nabla^2 p_{ij}^n = -\nabla^* \cdot \{\nabla \cdot (UU)\}_{ij}^n,$$

que é uma equação de Poisson aproximada para p . Em suma, podemos notar que o método da compressibilidade artificial pode ser considerado como uma técnica especial para resolver as equações de Navier-Stokes estacionárias usando, em particular, uma equação de Poisson para a pressão.

Uma extensão do método da equação de Poisson para a pressão para escoamentos estacionários foi proposta por Patankar e Spalding [22] e Patankar [23]. Outro tipo de método também desta natureza é o método da projeção, ou método de passo fracionário, proposto por Chorin [8] e por Temam [35]. Neste esquema, a solução é avançada no tempo usando um tamanho de passo em dois estágios: usualmente no primeiro estágio, a equação de momento é resolvida aproximadamente sem a conservação de massa; no segundo estágio, a pressão e o campo de velocidade são corrigidos para satisfazer a equação da continuidade. Neste último estágio, uma equação de Poisson com condições de fronteira de Neumann é introduzida. Uma formulação explícita do método foi proposta por Fortin et al [12].

Nos métodos “pressure-based” somente esquemas semi-implícitos [13] podem ser empregados desde que, por construção, as equações de momento e continuidade são resolvidas separadamente. Desta forma, o tamanho de passo no tempo está restrito às condições de estabilidade numérica e como consequência, a eficiência destes procedimentos dependem fortemente de um bom “solver” para a equação de Poisson. Ao contrário destes esquemas, os quais podem ser aplicados diretamente às equações não estacionárias, o método da compressibilidade artificial foi inicialmente projetado para simular problemas em regime estacionário. Para a solução de problemas não estacionários, o procedimento foi estendido por Steger e Kutler [31], assumindo valores pequenos para a constante de compressibilidade. Este procedimento entretanto, dá origem a problemas altamente “stiff” [21], e que são difíceis de resolver numericamente. A propriedade essencial desse esquema é a sua boa propriedade de estabilidade, de tal forma que o tamanho do passo no tempo precisa ser escolhido somente de acordo com a precisão [25].

Para o tratamento completamente implícito das equações de Navier-Stokes e não estacionárias, existem basicamente dois tipos de métodos de marcha no tempo: o primeiro deles [24-36], é um método do tipo θ de dois níveis dado por

$$(U^{n+1}-U^n)/\delta t + \theta \{ \nabla \cdot (U^{n+1}U^{n+1}) - R_e^{-1} \nabla^2 U^{n+1} \} \\ + (1-\theta) \{ \nabla \cdot (U^n U^n) - R_e^{-1} \nabla^2 U^n \} + \nabla p^{n+1} = 0, \quad (3.11a)$$

$$\nabla \cdot U^{n+1} = 0, \quad (3.11b)$$

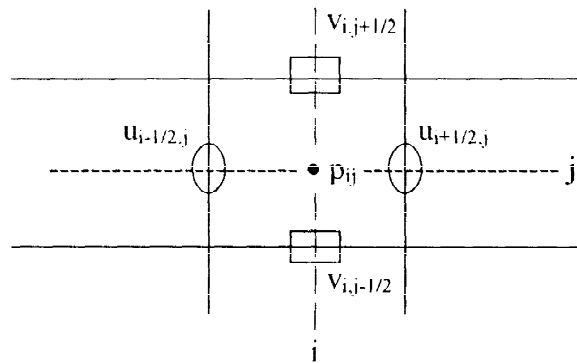
onde δt é o tamanho do passo no tempo e $0 \leq \theta \leq 1$ é um parâmetro especificado pelo usuário. $\theta=0$ corresponde ao método explícito de Euler, $\theta=1$ representa o método implícito de Euler e $\theta=1/2$ representa o método de Crank-Nicolson. O esquema é de primeira ordem de precisão se $\theta=0$ ou $\theta=1$, e de segunda ordem de precisão se $\theta=1/2$; o segundo esquema de marcha no tempo é o método de três níveis dado por

$$\delta t^{-1} (3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}) + \nabla \cdot (U^{n+1}U^{n+1}) \\ - R_e^{-1} \nabla^2 U^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0, \\ \nabla \cdot U^{n+1} = 0.$$

Segundo Childress e Peyret [6], o esquema é de segunda ordem de precisão e com a discretização espacial na malha diferenciada, apresentada em [14], o esquema resultante é incondicionalmente linearmente estável. Este esquema tem suas vantagens e desvantagem comparado aos esquemas (3.11), com $\theta=1/2$, numa malha diferenciada de [14]. As vantagens estão associadas à simplicidade na implementação e um melhor amortecimento de harmônicos de pequeno comprimento de onda que são de interesse em regiões onde a solução varia bruscamente (problemas “stiff”). A desvantagem é que o esquema, como todo esquema de três níveis, não determina a solução no primeiro passo e, devemos usar outro esquema de inicialização.

Neste ponto, é bom lembrar que uma solução numérica para as equações (3.2) deve incorporar um procedimento que leva em conta a importante interação entre campos de velocidade e pressão. Para obter este acoplamento, a equação da continuidade deve ser substituída por uma equação que envolva a velocidade e a pressão e, ao mesmo tempo garanta que a restrição de incompressibilidade seja satisfeita. Talvez a característica mais atrativa do método da compressibilidade artificial é a sua rápida convergência [33], isto porque as equações de momento e continuidade são resolvidas de uma maneira completamente acopladas. No entanto, no método “pressure-based” há um desacoplamento das equações. Já nos métodos completamente implícitos este acoplamento é evidente por construção.

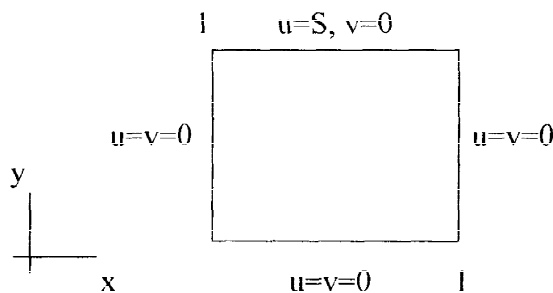
Outra questão de extrema importância na solução numérica de (3.2) é onde posicionar as variáveis dependentes u , v e p nos nós da malha. Duas possibilidades amplamente utilizadas na literatura [26-27-32-37] são malhas diferenciadas e não diferenciadas. Em uma malha não diferenciada, todas as variáveis são colocadas nos nós da malha. Em uma malha diferenciada as variáveis são posicionadas em diferentes pontos da malha. Uma malha do tipo diferenciada largamente utilizada é aquela encontrada nos trabalhos de Arakawa [2] e Harlow e Welch [14]. Nessa malha as componentes de velocidade estão localizadas nos centros das faces de cada célula e a pressão é avaliada no centro da célula. A figura abaixo mostra esta configuração.



A vantagem de uma discretização não diferenciada é que ela é simples do ponto de vista de implementação e fácil de estender para sistemas de coordenadas curvilíneas gerais. Entretanto, esta discretização gera oscilações no campo de pressão se diferenças centrais são utilizadas nas discretizações do gradiente de pressão e equação de incompressibilidade [30-37]. Outra desvantagem dessa discretização é que condições de fronteira artificiais para a pressão são necessárias. Em contraste, na discretização diferenciada oscilações no campo de pressão não podem aparecer e nenhuma condição de fronteira é necessária para a pressão [30-37]. A principal dificuldade em estender a discretização diferenciada de coordenadas cartesianas para coordenadas curvilíneas gerais, está na escolha de variáveis independentes. Como recomendado em [28], do ponto de vista da precisão numérica e conservação das leis físicas, é melhor discretizar as equações de momento usando componentes de velocidade cartesianas, desde que isto permite uma completa forma conservativa e a precisão nos resultados numéricos é menos sensível à distorção e não ortogonalidade da malha.

4. APLICAÇÃO: O PROBLEMA DA CAVIDADE QUADRADA

Um fluido isotérmico e incompressível está confinado numa cavidade quadrada bidimensional cujos lados têm comprimentos unitários (figura abaixo). O fluido está em repouso para $t < 0$. Em $t = 0$, a tampa superior é instantaneamente posta em movimento com velocidade constante igual a S . Uma pressão de referência é fixada no canto superior direito da cavidade.



O escoamento induzido pela tampa superior cria dentro da cavidade um movimento circulatório das partículas do fluido. Para Reynolds baixo, o movimento é em torno de um ponto, chamado vórtice central, onde o vetor velocidade é nulo. A simulação é caracterizada pelo número de Reynolds

$R_c = L_c U_c / \mu$, onde L_c e U_c são o comprimento e a velocidade horizontal da tampa superior respectivamente, e μ é a viscosidade cinemática do fluido. No nosso caso $R_c = \mu^{-1}$. Este tipo de problema tem sido utilizado na literatura [10-17-18-26] com o objetivo de testar novos esquemas numéricos.

A simulação do escoamento é feita usando o método de marcha no tempo (3.11) com $\theta=1$ (Euler implícito). A discretização é feita usando diferenças centrais sobre a malha diferenciada de [2-14]. Assim, a ordem do esquema é $o(\delta t, \delta x^2)$, com $\delta x = \delta y$. As equações de Navier-Stokes discretizadas sobre a malha diferenciada são:

$$\begin{aligned} \text{Momento-x: } & \{b(v_{i+3,j+2} + v_{i+1,j+2}) - d\}u_{i+2,j+3} \\ & + \{2a(u_{i+4,j+1} - u_{i,j+1}) + b(v_{i+3,j+2} + v_{i+1,j+2} - v_{i+3,j} - v_{i+1,j}) + k\}u_{i+2,j+1} \\ & - \{b(v_{i+3,j} + v_{i+1,j}) + d\}u_{i+2,j-1} + a(u_{i+4,j+1}^2 - u_{i,j+1}^2) \\ & - c(u_{i+4,j+1} + u_{i,j+1}) + 4a(p_{i+3,j+1} - p_{i+1,j+1}) - u_{i+2,j+1}^n \cong 0, \quad (4.1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Momento-y: } & \{a(u_{i+2,j+3} + u_{i+2,j+1}) - c\}v_{i+3,j+2} \\ & + \{2b(v_{i+1,j+4} - v_{i+1,j}) + a(u_{i+2,j+3} + u_{i+2,j+1} - u_{i,j+3} - u_{i,j+1}) + k\}v_{i+1,j+2} \\ & - \{a(u_{i,j+3} + u_{i,j+1}) + c\}v_{i-1,j+2} + b(v_{i+1,j+4}^2 - v_{i+1,j}^2) \\ & - d(v_{i+1,j+4} + v_{i+1,j}) + 4b(p_{i+1,j+3} - p_{i+1,j+1}) - v_{i+1,j+2}^n \cong 0, \quad (4.1b) \end{aligned}$$

$$\text{Continuidade: } (u_{i+2,j+1} - u_{i,j+1}) + (v_{i+1,j+2} - v_{i+1,j}) \cong 0, \quad (4.1c)$$

onde todas as variáveis são avaliadas no tempo $n+1$ e

$$\begin{aligned} a &= \delta t / 4 \delta x, \\ b &= \delta t / 4 \delta y, \\ c &= \delta t / (R_c \delta x^2), \\ d &= \delta t / (R_c \delta y^2), \\ k &= 1 + 2(c+d). \end{aligned}$$

Para simplificar, tomamos $\delta x = \delta y$ e portanto $a=b$, $c=d$ e $k=1+4c$.

Neste ponto é importante relembrar que as equações de Navier-Stokes possuem infinitas soluções. As equações discretas (4.1) devem também preservar esta característica. De fato,

$$\sum_{i=0}^{2k} \sum_{j=0}^{2l} [\delta y(u_{i+2,j+1} - u_{i,j+1}) + \delta x(v_{i+1,j+2} - v_{i+1,j})] = 0,$$

com $k=0,1,\dots,N-2$, $i=0,1,\dots,M-2$, N e M número de divisões de $[0,1]$. Isto implica que o sistema de equações lineares formado por (4.1c) possui a matriz dos coeficientes singular. Este fato é suficiente para caracterizar infinitas soluções das equações não lineares (4.1). A solução única será obtida pela discretização das equações de Navier-Stokes em todos os nós da malha excluindo um ponto arbitrário, onde a equação de conservação de massa é discretizada. Em nosso estudo, excluimos o ponto da malha definido por $(N-1, N-1)$ e, neste ponto fixamos o valor da pressão.

As equações (4.1) são funções não lineares dos pontos de malha

$$u^{n+1}_{i+2,j+1}, v^{n+1}_{i+1,j+2} \text{ e } p^{n+1}_{i+1,j+1}$$

e portanto, podemos identificá-las como

$$F(X) = 0,$$

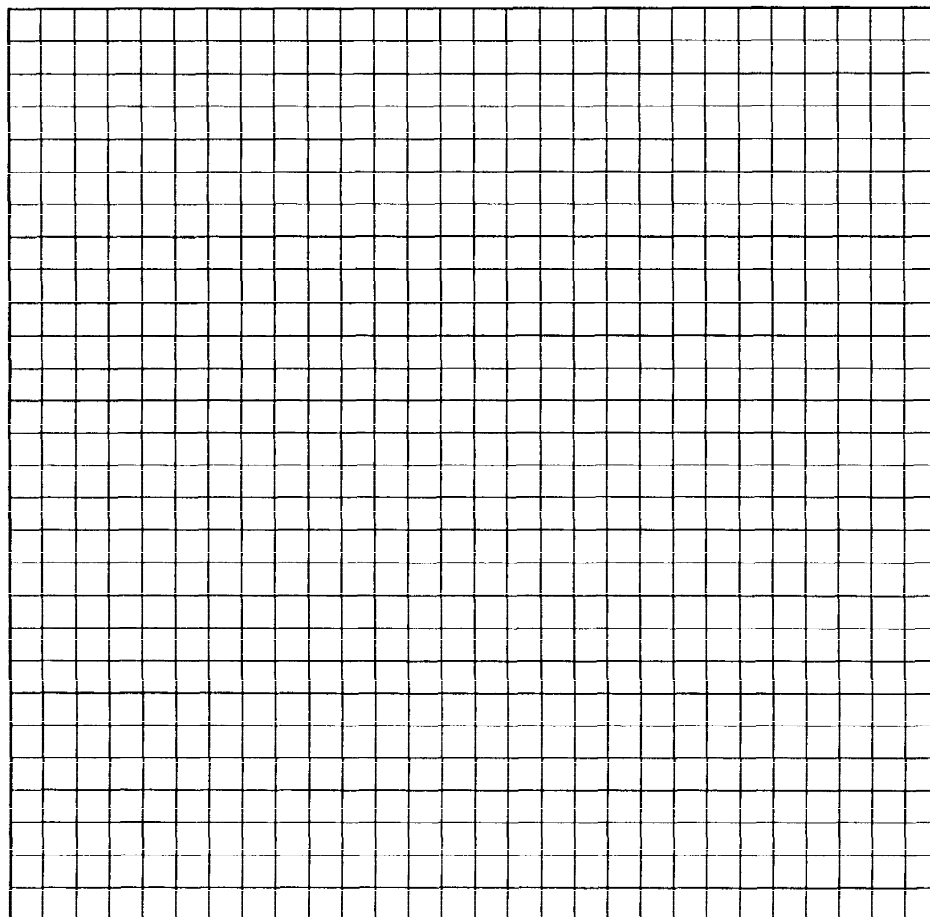
onde $F = (f_1, f_2, \dots, f_{2M-1})$ com $f_i = f_i(X)$ e $X = (u^{n+1}_{i+2,j+1}, v^{n+1}_{i+1,j+2}, p^{n+1}_{i+1,j+1})$, $i=1,2,\dots,2M-1$. A cada passo no tempo, esta equação constitui um sistema de equações não lineares nas incógnitas $u^{n+1}_{i+2,j+1}$, $v^{n+1}_{i+1,j+2}$, $p^{n+1}_{i+1,j+1}$ e, que podem ser resolvidos por técnicas iterativas.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

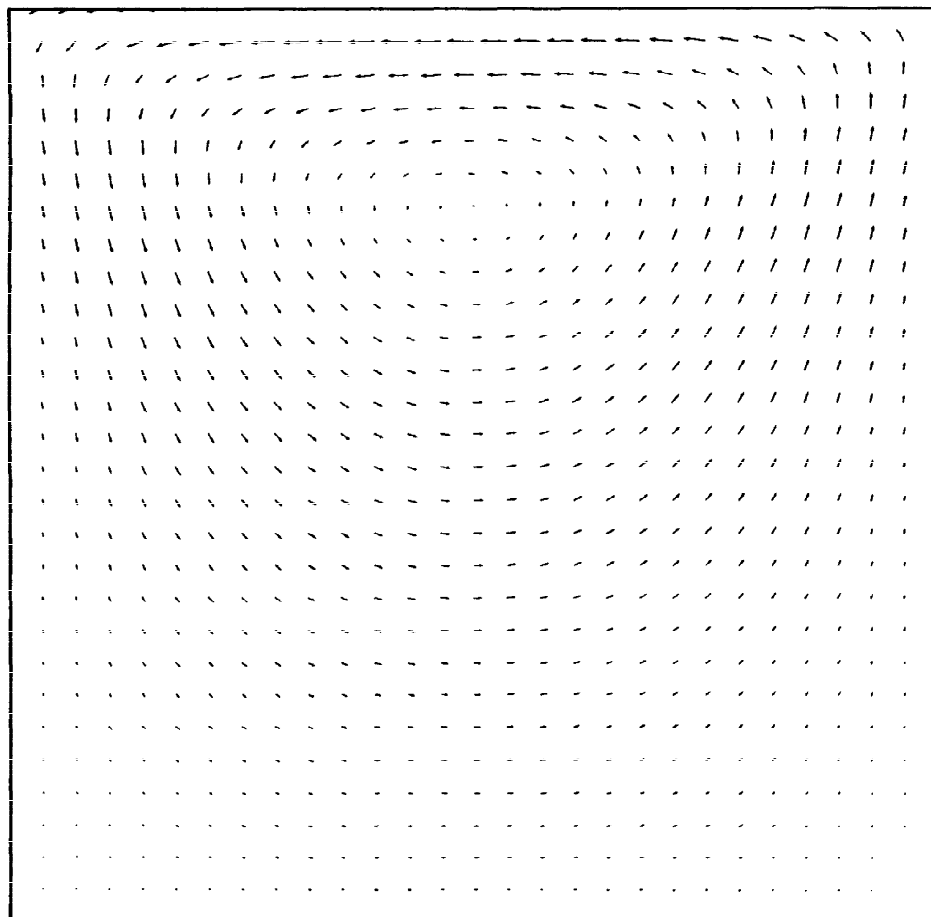
O escoamento na cavidade bidimensional foi simulado usando o número de Reynolds na faixa $[10^{-2}, 10]$. Em todos os casos a malha utilizada foi 14×14 , o tamanho do passo $\delta t = 10$, a velocidade da tampa superior da cavidade foi $S = -1.0$ e a pressão de referência foi de 1.0. Dificuldades surgiram quando utilizamos a conservação de massa para definir o resíduo. Após uma série de testes numéricos verificamos que o resíduo caiu no máximo uma ordem de magnitude e assim, optamos por trabalhar com 500 iterações em todos os processos. A simulação com $Re = 10^{-2}$ foi comparada com os resultados de Pracht [26], onde os campos de vetores mostraram-se bem semelhantes. A visualização dos nossos resultados estão mostrados no final deste trabalho.

O método completamente implícito utilizado neste trabalho tem boas propriedades de estabilidade, pois conseguimos também simular o escoamento com δt^3 . A desvantagem nessa formulação é solução do sistema de equações não lineares a cada passo, pois implementar um bom “solver” para resolver $F(\mathbf{X})=0$, F não linear, não é trivial. Em nossas simulações 90% do esforço computacional foi na solução destes sistemas. Com a malha 14×14 , o tempo de CPU a cada iteração ficou em média em 2 minutos.

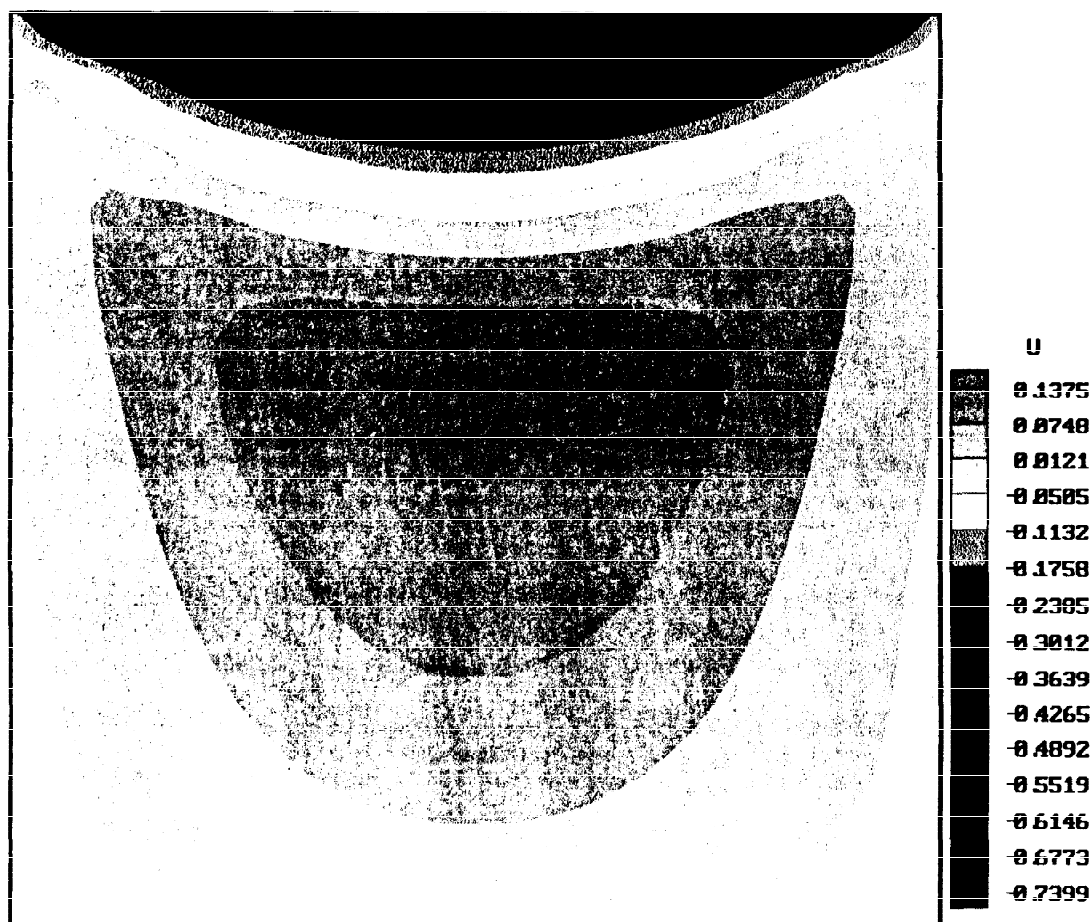
MALHA (14x14)



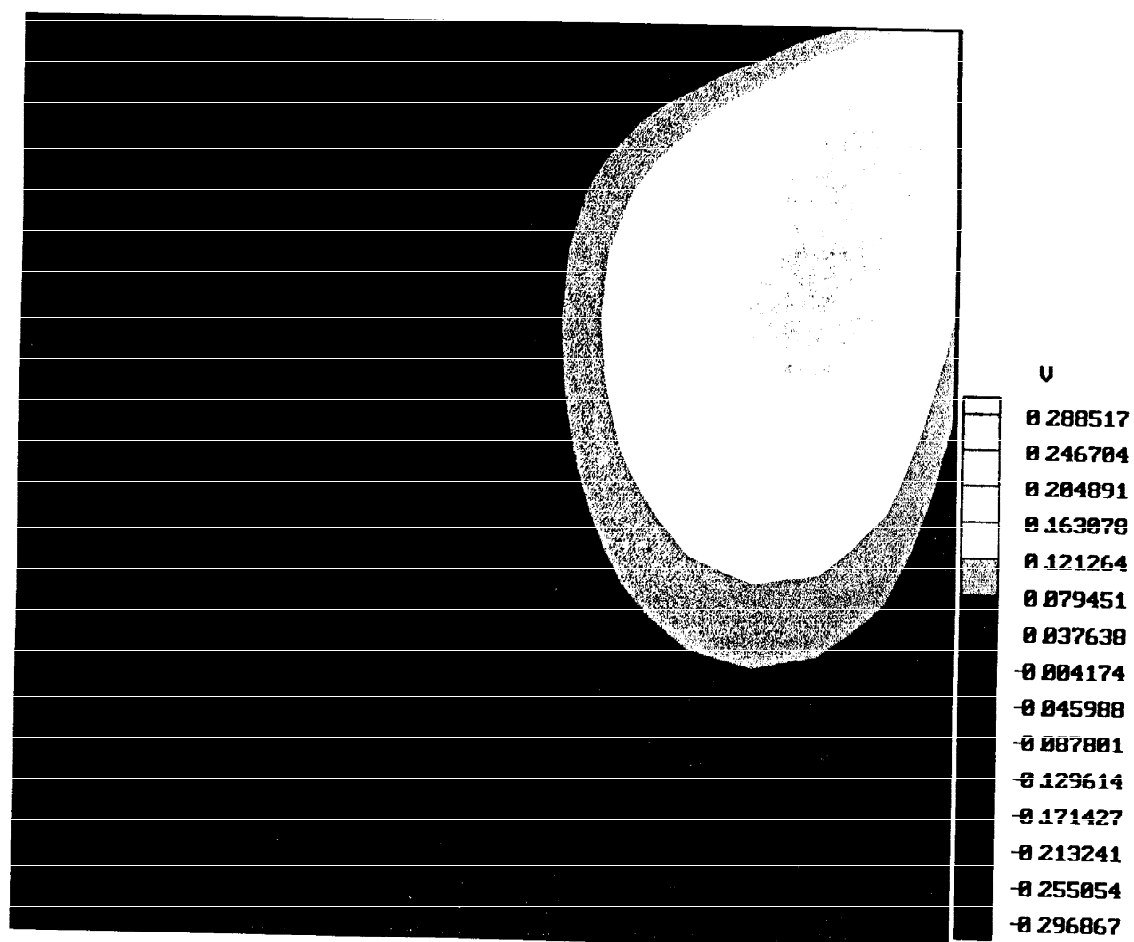
CAMPO DE VETORES ($Re=001$)



COMPONENTE U DE VELOCIDADE



COMPONENTE U DE VELOCIDADE

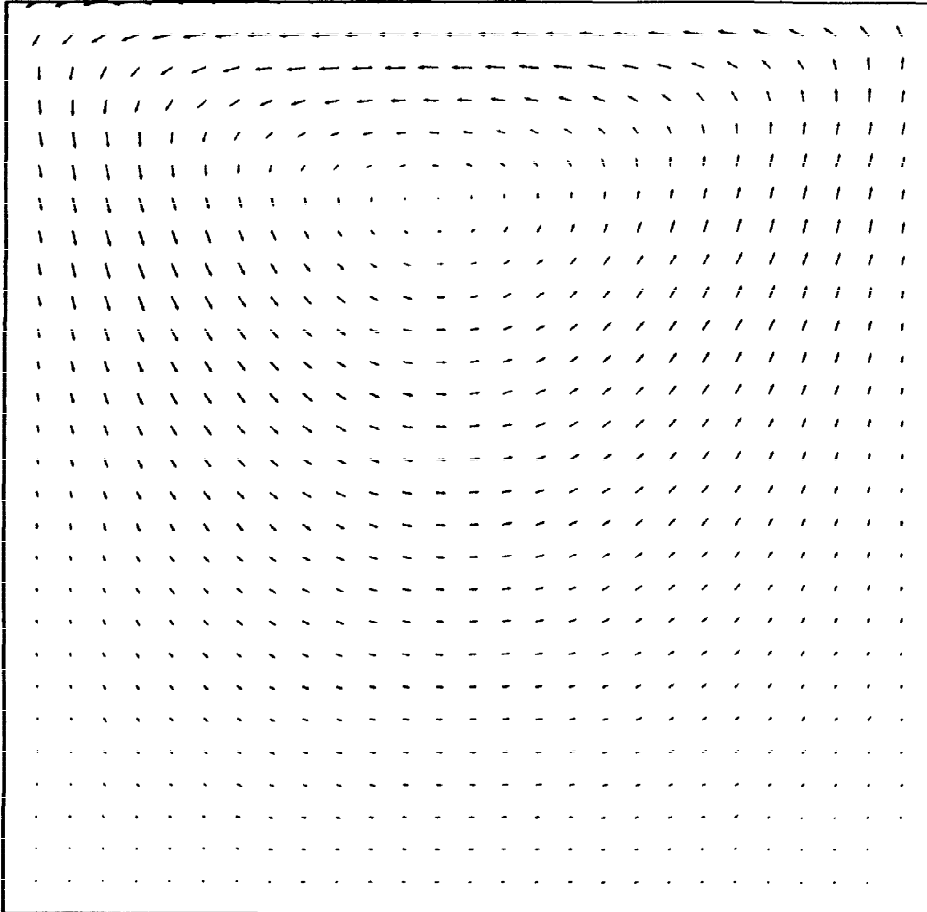


CAMPO DE PRESSAO

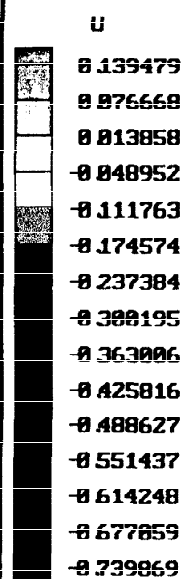
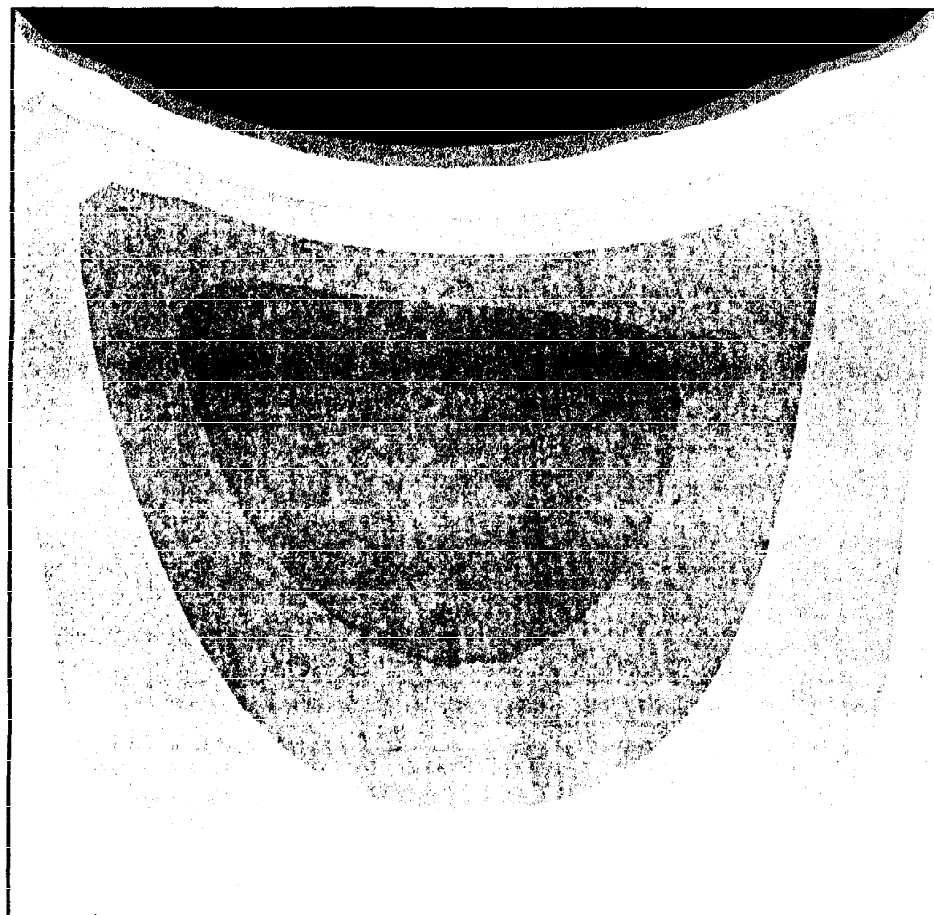


P
27 238
25 400
23 739
21 990
20 241
18 492
16 742
14 993
13 244
11 495
9 7459
7 9968
6 2476
4 4984
2 7492

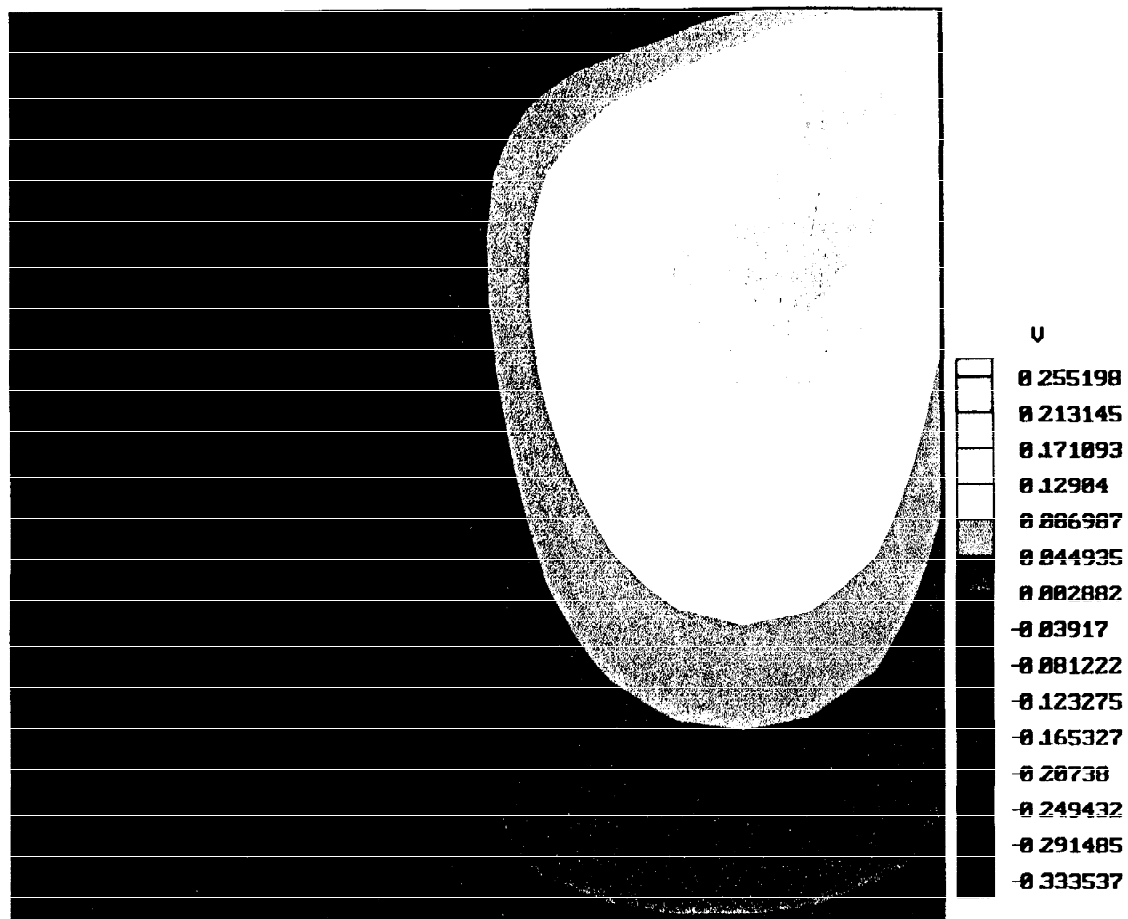
CAMPO DE VETORES ($Re = 0.1$)



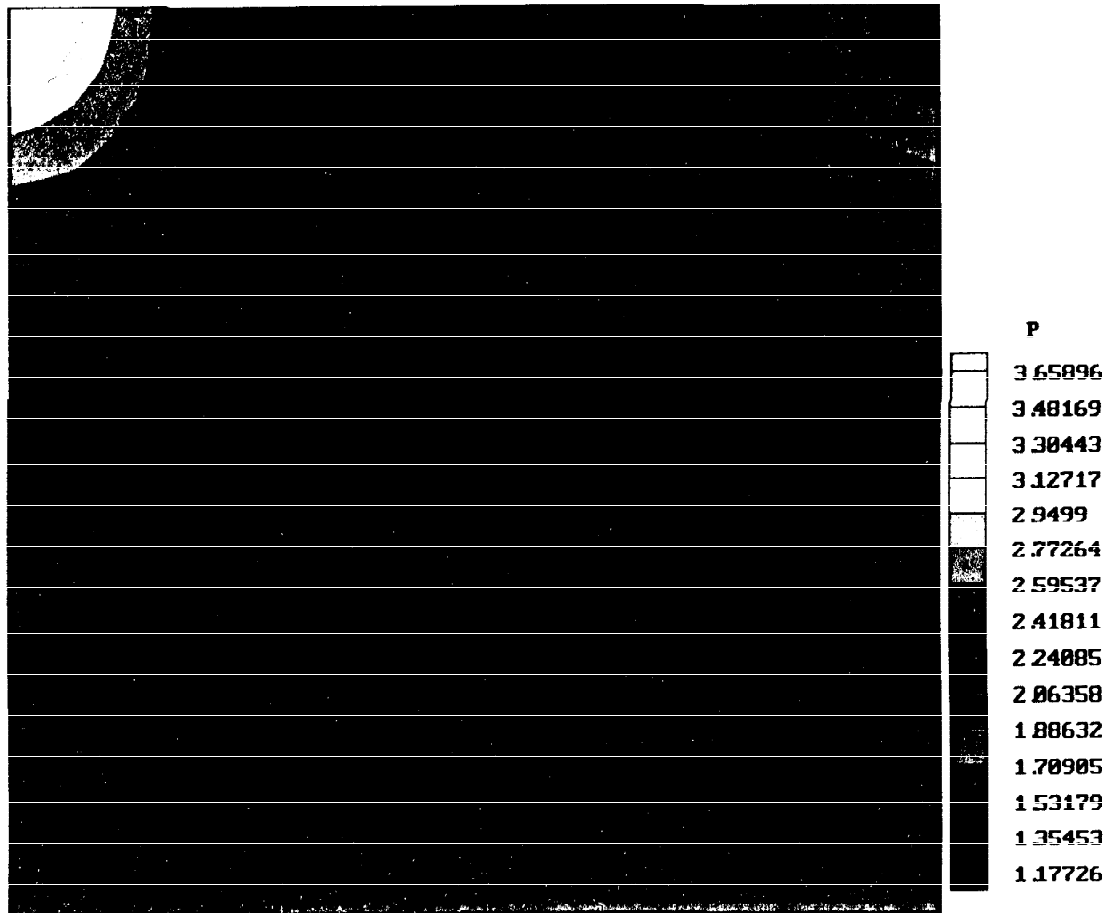
COMPONENTE U DE VELOCIDADE



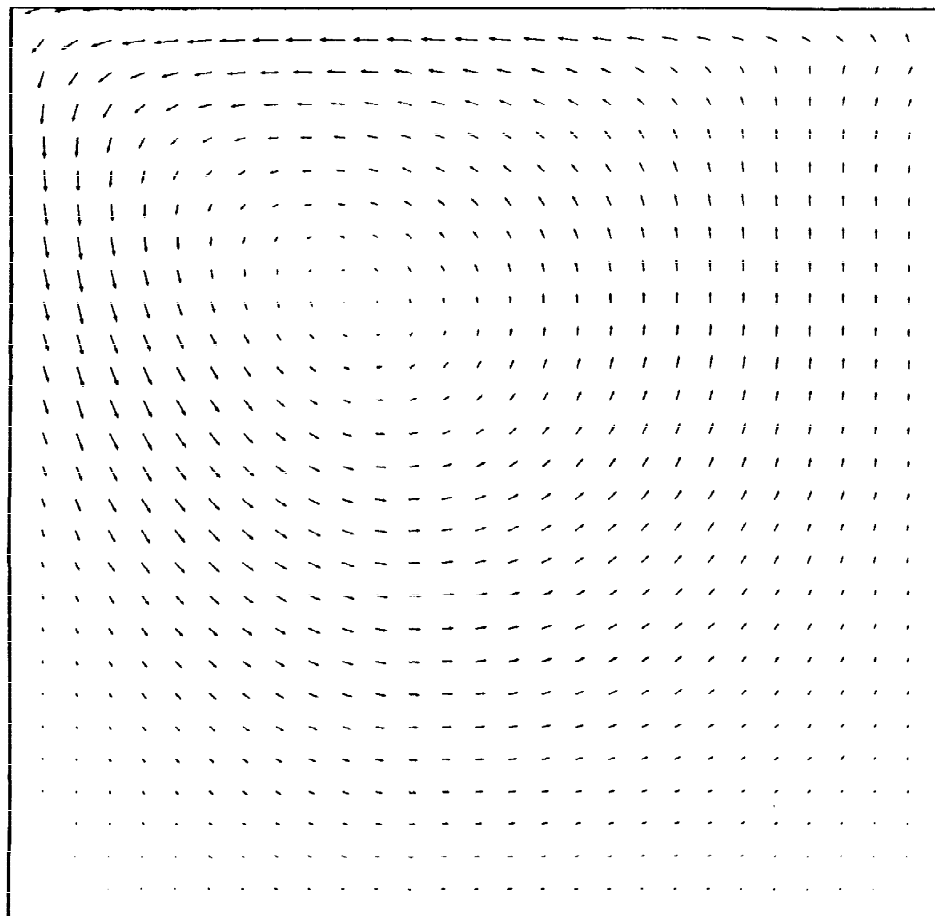
COMPONENTE U DE VELOCIDADE



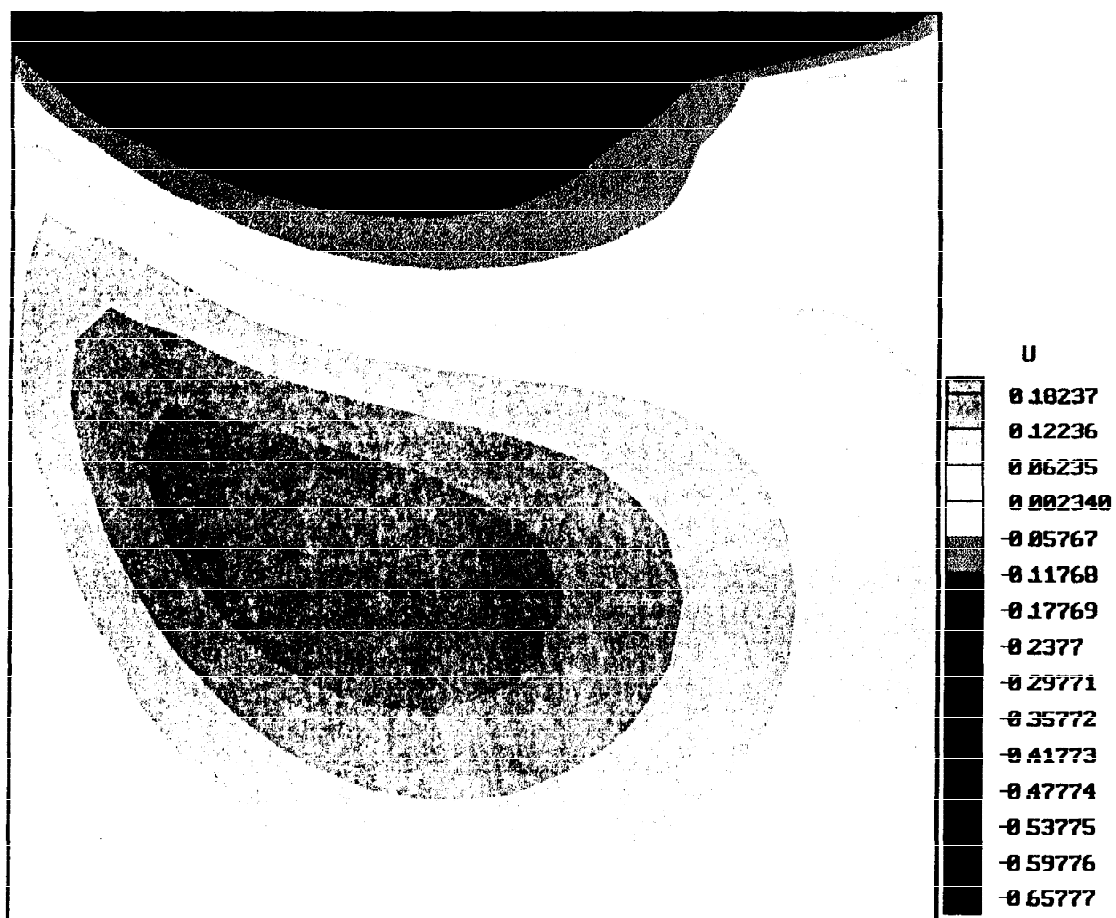
CAMPO DE PRESSAO



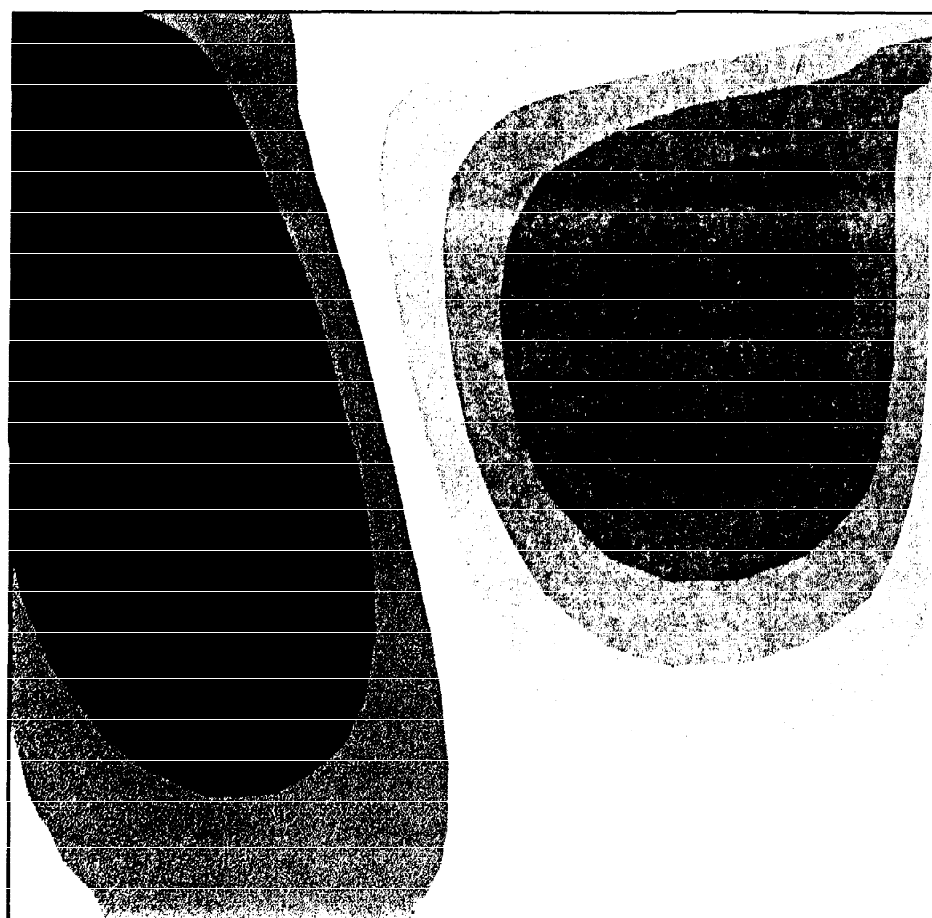
CAMPO DE VETORES ($Re=10$)



COMPONENTE U DE VELOCIDADE



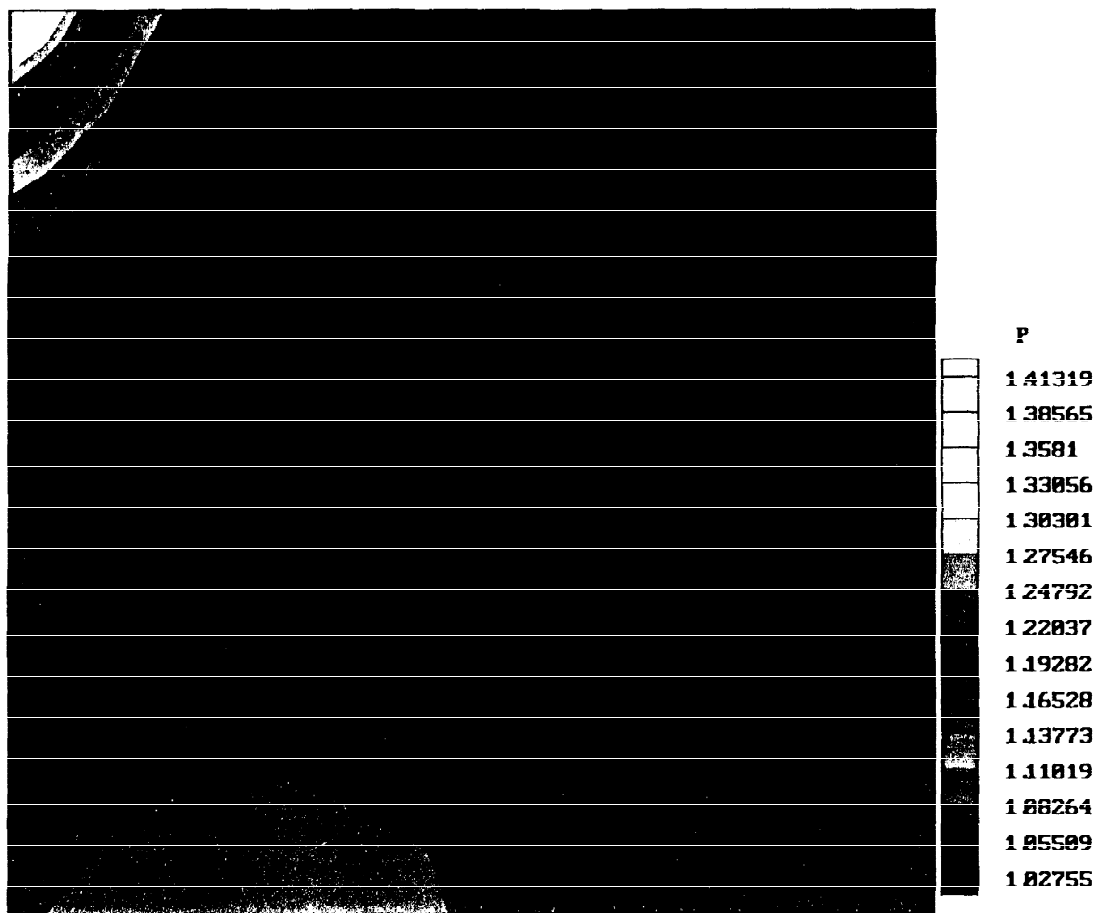
COMPONENTE U DE VELOCIDADE



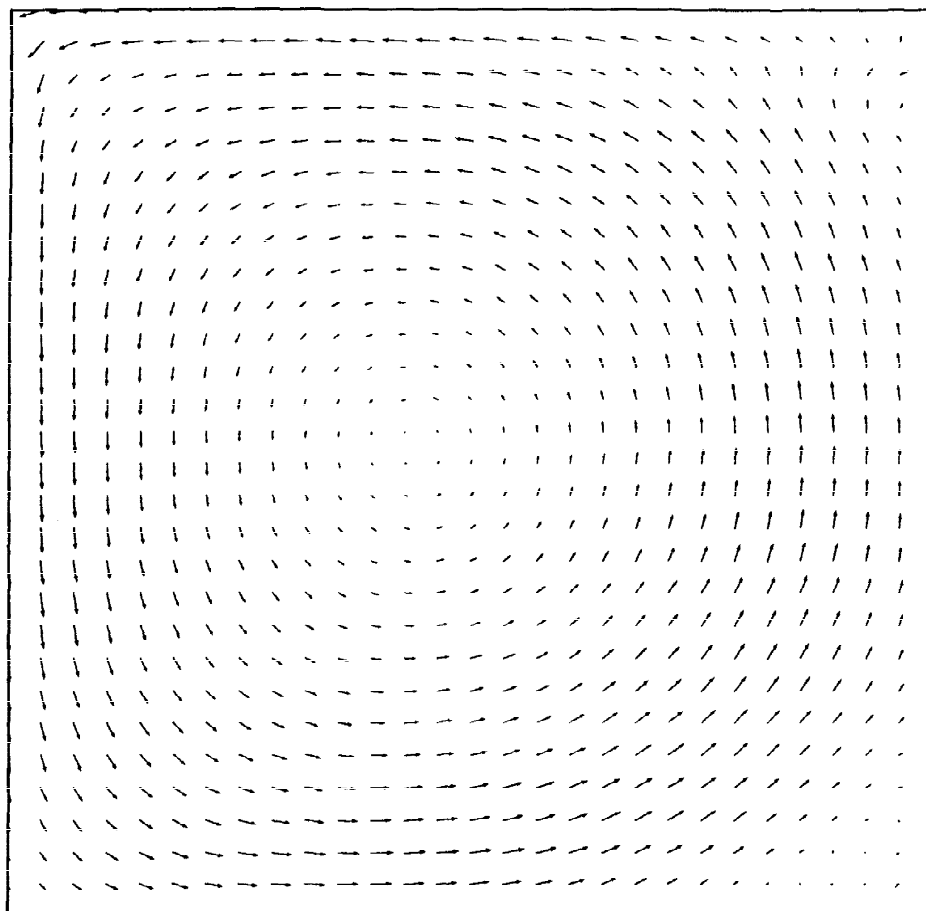
U

0.179394
0.134179
0.088363
0.043747
-0.001468
-0.046683
-0.091899
-0.137115
-0.182331
-0.227546
-0.272762
-0.317977
-0.363193
-0.408409
-0.453624

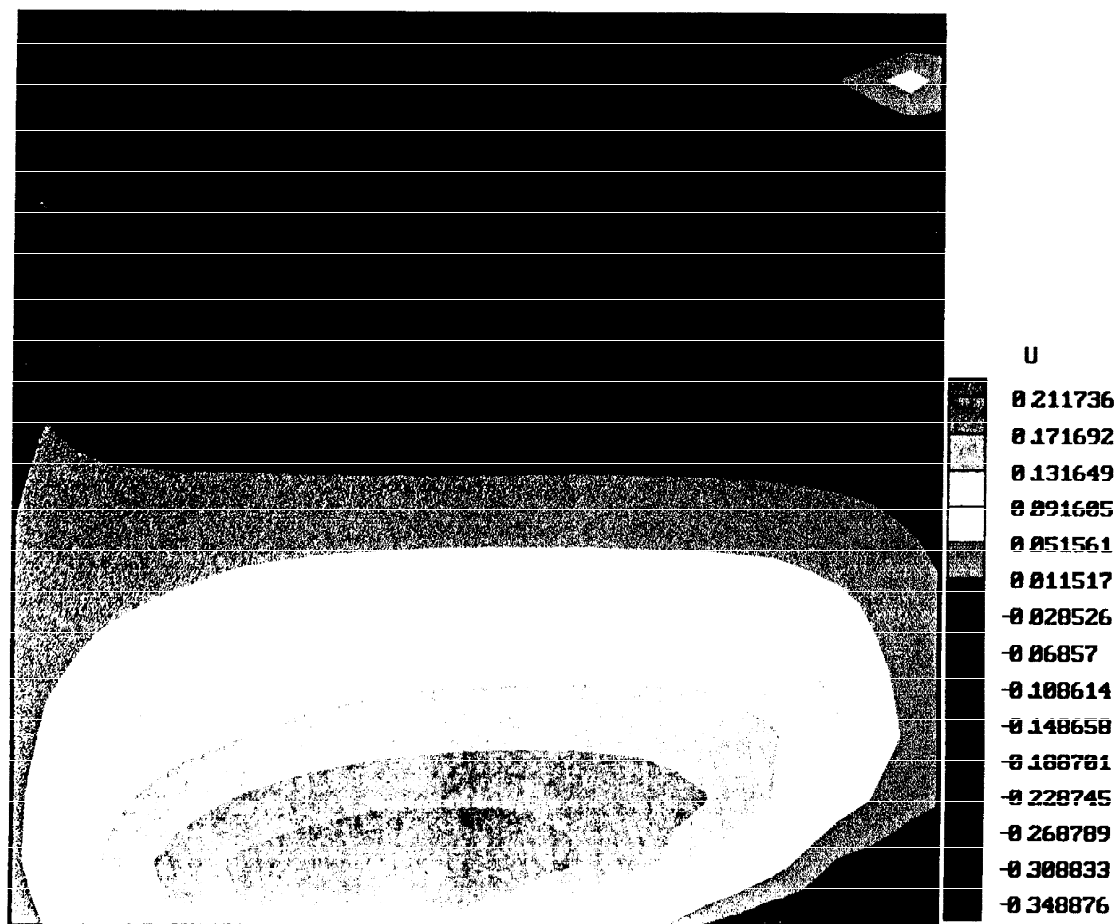
CAMPO DE PRESSAO



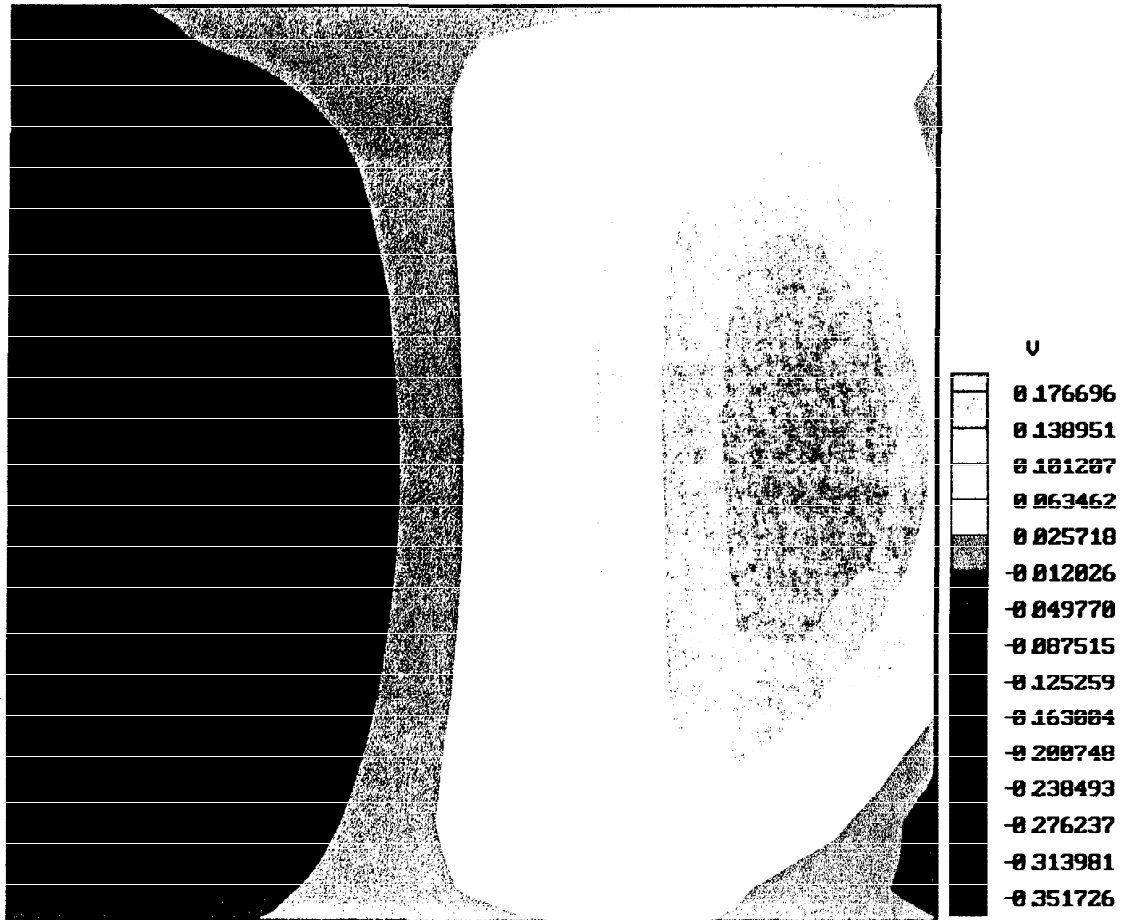
C A M P O D E V E T O R E S (R e = 10)



COMPONENTE U DE VELOCIDADE



COMPONENTE U DE VELOCIDADE



CAMPO DE PRESSAO



P
1 89319
1 88492
1 87664
1 86836
1 86009
1 85181
1 84353
1 83525
1 82698
1 8187
1 81042
1 80215
8 993871
8 985594
8 977317

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - Acheson, D. J., Elementary fluid dynamics, Claredon Press-Oxford (1990).
- [2] - Arakawa, A., J. Comput Phys. 1, 119 (1966).
- [3] - Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press (1967).
- [4] - Bell, J. B., Colella, P. and Glaz, H. M., J. Comput. Phys. 85, 257 (1984).
- [5] - Brever, M. and Hänel, D., In 8th conference on numerical methods in fluid mechanics (1989).
- [6] - Childress, S. and Peyret, R., J. Méc. 15, 753 (1976).
- [7] - Chorin, A. J., J. Comput. Phys. 2, 12 (1967).
- [8] -, Math. Comput. 22, 745 (1968).
- [9] - Couzy, W. and Deville, M., J. Comput. Phys. 116, 135 (1995).
- [10] - Deville, M. O., J. Comput. Phys. 15, 362 (1974).
- [11] - Fletcher, C. A. J., Computational techniques for fluid dynamics, Vol II, Springer-Verlag (1988).
- [12] - Fortin, M., Peyret, R. and Temam, R., Lecture Notes in Physics, Vol. 8, 337, Springer-Verlag (1971).
- [13] - Gresho, P. M., Int. J. Num. Methods in Fluid 22, 987 (1996).
- [14] - Harlow, F. H. and Welch, J. E., Phys. Fluids 8, 2182 (1965).
- [15] - Kim, S. W. and Benson, T. J., Comput. Fluids 21, 435 (1992).
- [16] - Kim, J. and Moin, P. J. Comput. Phys. 59, 308 (1985).
- [17] - Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., J. Comput. Phys. 70, 439 (1987).
- [18] - Lee, S. C. and Chen, C. K., Int. J. Numer. methods Fluids 23, 47 (1996).
- [19] - Madabhushi, R. K., Balachadar, S. and Vanka, S. P., J. Comput. 105, 199 (1993).
- [20] - Mansutti, D., Graziani, G. and Piva, R., J. Comput. phys. 92, 161 (1991).
- [21] - Marx, P. Y., J. Comput. Phys. 112, 182 (1994).
- [22] - Patankar, S. V. and Spalding, D. B., Int. J. Heat mass Transfer 15, (1987).
- [23] - Patankar, S. V., Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere, Washington (1980).
- [24] - Peyret, R., J. Fluid Mech. 28, 49 (1976).
- [25] - Peyret, R. and Taylor, T. D., Computational methods for fluid flow, Springer-Verlag (1983).

- [26] - Pracht, W. E , J. Comput. Phys. 7, 46 (1971).
- [27] - Rosemfeld, M., Kwak, D. and Vinikur, M. J. Comput. Phys. 94, 102 (1991).
- [28] - Shyy, W. and Vu, T. C., J. Comput. Phys. 92 (1991).
- [29] - Soh, W. Y., J. Comput. Phys. 29, 232 (1986).
- [30] - Sotiropoulos, F. and Abdallah, S., J. Comput. Phys. 95, 121 (1991).
- [31] - Steger, J. L. and Kutler, P. AIAA J. 15(4), 581 (1977).
- [32] - Tafti, D., J. Comput. Phys. 116, 143 (1995).
- [33] - Tamamidis, P., Zhang, G. and Assanis, D. N., J. Comput. Phys. 124, 1 (1996).
- [34] - Tau, E. Y., J. Comput. Phys. 115, 147 (1994).
- [35] - Temam, R., Archiv. Ration. Mech. Anal. 32, 377 (1969).
- [36] - Turek, S., Int. J. Num. Methods in Fluid 22, 987 (1996)
- [37] - Zhang, L. B., J. Comput. Phys. 113, 26 (1994).