Uma introdução à Teoria de Singularidades.

Marcelo José Saia

ICMC-USP, São Carlos, SP.

Abril de 2011

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nestas notas apresentamos um breve introdução ao estudo das singularidades de aplicações diferenciáveis.

Mas o que é uma singularidade? Esta questão se coloca naturalmente no estudo de funções reais a uma variável (no curso de cálculo I), onde é visto como descrever estas funções partir dos seus pontos críticos, que são aqueles onde a primeira derivada se anula. No estudo de aplicações $f : U \to \mathbb{R}^p$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e f é de classe C^∞, este conceito aparece naturalmente e dizemos que um ponto $x \in U$ é um ponto crítico de f se a sua matriz das derivadas parciais calculada no ponto x não tem posto máximo.

O objetivo inicial da teoria de singularidades foi justamente estudar estes pontos críticos e as suas imagens por f, que são as chamadas singularidades de f. Este estudo teve como primeiro objetivo obter a classificação destas singularidades. Mas qual classificação? A classificação de objetos é uma atividade fundamental na matemática. Cada área tem sua noção natural de relação de equivalência e um dos objetivos é listar seus objetos a menos desta equivalência. Assim por exemplo, temos a noção de isomorfismo para espaços vetoriais ou grupos e difeomorfismos para superfícies.

No caso de aplicações de classe C^∞ definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^p$, a relação de equivalência natural consiste em mudanças de coordenadas locais (difeomorfismos locais) no domínio (fonte) e contradomínio (meta). Assim, classificar singularidades é obter as classes de equivalência segundo esta relação. Podemos entender esta classificação como uma continuação natural do estudo de cálculo em várias variáveis, onde os resultados finais nos levam às formas locais das imersões e das submersões, com aplicações definidas em conjuntos que tem somente pontos regulares, e o teorema do posto constante que considera conjuntos com somente um tipo de ponto crítico, ou seja um aberto em que todos os pontos são críticos e tem o mesmo posto. Neste sentido, a teoria de singularidades começa a partir do teorema do posto constante, onde são estudadas funções ou aplicações definidas em abertos que tem diferentes tipos de pontos críticos. Neste caso, a questão mais natural que se coloca é determinar uma forma normal (local) descrevendo cada tipo de singularidade da aplicação.

Nestas notas pretendemos estudar as formas normais das singularidades das funções reais e também das aplicações do plano no plano. No caso das funções reais iremos descrever as singularidades em funções com codimensão menor ou igual a cinco, tendo por base os resultados de Arnol'd em [1] e de Thom descrito em [7]. A descrição das aplicações do plano no plano é feita com base no trabalhos de Whitney [8] e Rieger [4]. Estas notas foram escritas para o mini curso apresentado pelo autor no Programa de Verão de 2011 da UFAL-Maceio, Alagoas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 O Teorema do posto constante

Teorema 2.1.1. Teorema da Função inversa *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma aplicação de classe* C^∞*. Se a aplicação derivada de* f*, denotada* $\mathrm{d}f(x)$*, é um isomorfismo para todo* $x \in U$*, então existem vizinhanças* U' *e* V' *de* x *e de* $f(x)$ *tal que* $f_{U'} : U' \to V'$ *é um difeomorfismo (local) e neste caso* $n = p$*.*

Definição 2.1.2. Uma **Imersão** de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação suave $f \colon U \to \mathbb{R}^p$ com $\mathrm{d}f(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ injetora, ou seja tem posto n e $n \leq p$.

Uma **Submersão** de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação suave $f \colon U \to \mathbb{R}^p$ com $\mathrm{d}f(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ sobrejetora, ou seja tem posto p e $n \geq p$.

Teorema 2.1.3. Forma Local das submersões *Se* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *é submersão, existe difeomorfismo local* $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *com*

$$f \circ h(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p).$$

Forma Local das imersões *Se* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *é imersão, existe difeomorfismo local* $k : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *com* $k \circ f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n, 0,\ldots,0)$.

Teorema do Posto constante *[3], p. 300. Sejam* $f : U \to \mathbb{R}^p$ *uma aplicação tal que em todos os pontos de* U f *tem posto constante* m*, então existem difeomorfismos locais* $h : (U \subset \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *e* $k : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *com* $k \circ f \circ h^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_m, 0,\ldots,0)$.

Imersões e submersões são exemplos de aplicações de posto constante.

2.2 Jatos e Singularidades

Definição 2.2.1. O **espaço dos** k**-jatos** $J^k(n,p)$ é o espaço vetorial real das aplicações polinomiais g de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ de grau $\leq k$ com $g(0) = 0$.

Definição 2.2.2. Para cada aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \to J^k(n,p)$ por: $j^k f(a) =$ o polinômio de Taylor de $f(x+a) - f(a)$ de ordem k na origem. A aplicação $j^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(a)$ é chamado de k-jato de f em a.

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então $j^k f(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$.

Exercício: Determine a série de Taylor até a ordem 3 e o 3-jato de:

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para qualquer $a \in \mathbb{R}^n$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - y^2$, para qualquer $a \in \mathbb{R}^2$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Definição 2.2.3. **O conjunto de pontos críticos** de f, denotado $\Sigma(f)$, é o conjunto dos pontos x em $\mathbb{R}^n$ tal que o posto da matriz $\mathrm{d}f(x)$ é menor que $\min(n, p)$. O conjunto singular de f, denotado $\Delta(f)$ é a imagem por f deste conjunto, ou seja $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$.

A seguir introduzimos o conceito de ação de um grupo em um conjunto.

Uma **ação** de um grupo G em um conjunto M é uma aplicação $\varphi\colon G \times M \to M$, denotada por $\varphi(g, x) = g.x$, tal que para todo $x \in M$ e $g,\ h \in G$ temos:

(i) $1.x = x$, onde 1 denota o elemento identidade de G,

(ii) (gh).x= g.(h.x).

A **órbita** de x em M é o conjunto dos elementos $y \in M$ tal que existe $g \in G$ com $y = g.x$. Notação: $G.x$.

Definição 2.2.4. $x \in M$ é estável se a sua órbita $G.x$ é um aberto em M.

Capítulo 3

Germes em $\mathcal{E}_n$

3.1 A álgebra $\mathcal{E}_n$.

Denotamos por $\mathcal{E}_{n,p}$ o conjunto das aplicações de classe C^∞ definidas em um aberto U de $\mathbb{R}^n$ com $0 \in U$. Chamamos a classe de todas as aplicações que são iguais a f em U de germe na origem em U. Iremos denotar esta classe por $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$. Quando $p = 1$ este conjunto é denotado por $\mathcal{E}_n$.

Exercício: Mostre que: a. $f \in \mathcal{E}_n$ é invertível, se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

b. $\mathcal{E}_n$ é um anel local cujo ideal maximal é $m_n = \{f \in \mathcal{E}_n \ : f(0) = 0\}$.

c. $\mathcal{E}_{n,p}$ é um $\mathcal{E}_n$-módulo livre de dimensão p.

d. m_n é o ideal gerado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

e. $m_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n : j^{k-1} f(0) = 0\}$.

Definição 3.1.1. Topologia em $\mathcal{E}_{n,p}$. Seja $f \in \mathcal{E}_{n,p}$. Dados $\epsilon > 0$, $R > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ associamos a f uma **vizinhança fundamental** em $\mathcal{E}_{n,p}$ formada pelos germes de aplicações $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ tais que: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| \leq R$, $\|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \epsilon$, onde $\| \ \|$ é uma norma no espaço dos jatos $J^k(n, p)$.

3.2 Ação do grupo $\mathcal{R}$ em $\mathcal{E}_n$

Neste capítulo estudamos germes f no anel $\mathcal{E}_n$ que preservam a origem, para estes germes usamos a notação $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$. Nosso objetivo é obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^n$, mais precisamente,

Definição 3.2.1. Dois germes f e $g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ em $\mathcal{E}_n$ são $\mathcal{R}$-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $h\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $f = g \circ h$. Notação: $f \sim g$.

O conjunto dos germes de difeomorfismos $h\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ com a operação de composição é um grupo, que será denotado por $\mathcal{R}$. Este grupo age em $\mathcal{E}_n$ da seguinte maneira: $h.f = f \circ h$. Assim, dois germes f e g são $\mathcal{R}$-equivalentes se, e somente se, suas $\mathcal{R}$-órbitas são iguais.

Denotamos por $J(f)$ o ideal em $\mathcal{E}_n$ gerado pelas derivadas parciais de f, ou seja $J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$.

A $\mathcal{R}$-**codimensão** (ou simplesmente codimensão) de um germe $f \in \mathcal{E}_n$ é definida como a dimensão (como espaço vetorial real) de $\dfrac{\mathcal{E}_n}{J(f)}$. Notação: $\mathrm{cod}(f)$. Se este quociente é um espaço vetorial de dimensão finita, dizemos que o germe f tem codimensão finita em $\mathcal{E}_n$.

Um germe f em $\mathcal{E}_n$ é **estável** se sua codimensão é nula.

Exercício 3.2.2. Calcule a codimensão de $f(x, y) = x^3 + xy^2$ em $\mathcal{E}_2$.

3.3 Singularidade isolada e codimensão finita

Definição 3.3.1. Um germe $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ tem uma singularidade isolada na origem se, e somente se, existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^n$ tal que 0 é a única solução das equações $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exemplo: O germe $f(x, y) = x^5 - y^7$ tem singularidade isolada na origem, pois $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -7y^6 = 0$ somente para $(x, y) = (0, 0)$.

Proposição 3.3.2. *Seja f um germe em $\mathcal{E}_n$ de codimensão finita positiva, então f é um germe com uma singularidade isolada na origem.*

Demonstração. Primeiro observamos que a origem deve ser um ponto singular de f, pois se para algum $i = 1, \ldots, n$ temos $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$, então $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é um elemento invertível de $\mathcal{E}_n$, logo $J(f) = \mathcal{E}_n$ e f tem codimensão zero. Como f tem codimensão positiva, existe um k tal que $m_n^k \subseteq J(f)$. Desta forma, os monômios $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$ se escrevem como combinação linear de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ com coeficientes em $\mathcal{E}_n$. Como em um ponto singular de f todos as derivadas parciais se anulam, então estes monômios se anulam também, ou seja, o ponto singular é a origem. $\square$

Exemplo: **1.** Seja $f(x, y, z) = y^2 - z^2x^2 + z^5$. Neste caso as derivadas parciais de f se anulam ao longo do eixo x, portanto a origem em $\mathbb{R}^3$ não é um ponto singular isolado e o germe f não tem codimensão finita em $\mathcal{E}_3$.

2. Seja $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$. A origem é um ponto singular isolado mas f não tem codimensão finita.

Observamos que no caso de germes complexos $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, vale a recíproca da Proposição 3.3.2, mas a demontração exige mais resultados para ser obtida.

O resultado seguinte mostra que a codimensão é um invariante do germe.

Proposição 3.3.3. *Se dois germes f e g em $\mathcal{E}_n$ são $\mathcal{R}$-equivalentes então f e g têm a mesma codimensão.*

Demonstração. Como f e g são $\mathcal{R}$-equivalentes existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $g = f \circ h$. Portanto h induz um isomorfismo $h^*\colon \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ dado por $h^*(f) = f \circ h$. Afirmamos que $h^*(J(f)) = J(g)$. De fato, da Regra da Cadeia obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} h^*(\frac{\partial f}{\partial x_j}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}$$

então $J(g) \subseteq h^*(J(f))$. Se considerarmos a inversa h^{-1} procedemos analogamente para obter $h^*(J(f)) \subseteq J(g)$. $\square$

Definição 3.3.4. O número de Milnor, *denotado por $\mu(f)$ é*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle}$$

Exemplo: Para $f(x, y) = x^3 - y^4$, $J(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = \langle x^2, y^3 \rangle$ e $\mu(f) = 6$.

A proposição 3.3.3 mostra que o número de Milnor é importante para determinar se dois germes não são $\mathcal{R}$-equivalentes, mas no caso de germes de codimensão finita ele é um importante invariante topológico, no sentido que se existe uma família f_t de germes de funções com número de Milnor constante, então para cada t_1 e t_2 existe um germe de homeomorfismo h tal que $f_{t_2} = f_{t_1} \circ h$.

A seguir apresentamos alguns resultados que nos permitem determinar condições suficientes para que um germe esteja em uma $\mathcal{R}$-órbita. Inicialmente um importante resultado algébrico.

Lema 3.3.5 (Lema de Nakayama). *Sejam $\mathcal{E}$ um anel comutativo com elemento unidade 1 e m um ideal de $\mathcal{E}$ com a propriedade que $1+x$ é invertível em $\mathcal{E}$ para todo $x \in m$. Sejam M um $\mathcal{E}$-módulo e A e B $\mathcal{E}$-submódulos com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + m.A$, então $A \subseteq B$.*

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_t$ geradores de A, por hipótese existem $b_1,\ldots, b_t$ em B e $\lambda_{i,j}$ em m tal que para $1 \leq i \leq t$ podemos escrever $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{t} \lambda_{i,j} a_j$. Assim se considerarmos em notação matricial $a = (a_1, \ldots, a_t)$, $b = (b_1, \ldots, b_t)$ e $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ a matriz formada pelos $\lambda_{i,j}$ temos $(Id - \Lambda)a = b$ onde Id denota a matriz identidade correspondente.

Então para obter que $A \subseteq B$, basta mostrar que existe uma solução única deste sistema, ou seja basta mostrar que a matriz $(Id - \Lambda)$ é inversível, para isto, mas isto ocorre se, e somente se, o determinante da matriz $(Id - \Lambda)$ é diferente de 0, mas este determinante e da forma $1 + x$ com $x \in m$, que por hipótese é diferente de zero. $\square$

Com o Lema de Nakayama é possível mostrar que **o anel $\mathcal{E}_n$ não é Noetheriano**, ou seja existe pelo menos um ideal que não é finitamente gerado, que neste caso é o ideal m_n^∞. Para isto basta vermos que se m_n^∞ fosse finitamente gerado, poderiamos escrever $m_n^\infty \subseteq \{0\} + m_n \cdot m_n^\infty$ e concluir pelo Lema de Nakayama que $m_n^\infty = \{0\}$, o que não é verdade.

Teorema 3.3.6. *Seja $f \in \mathcal{E}_n$ tal que $m_n^k \subset m_n J_f$. Então para todo germe $g \in \mathcal{E}_n$ com mesmo k-jato que f, temos que g é $\mathcal{R}$-equivalente a f.*

O resultado acima é interessante por apresentar condições suficientes para a $\mathcal{R}$-equivalencia de germes de funções, ou seja, mostra que nem tudo é feito somente com mudança de coordenadas.

Observamos também que a demonstração deste Teorema é muito interessante no sentido que mostra a interação da Teoria de Singularidades com a Álgebra, pois usa o Lema de Nakayama, Análise e Geometria, com a resolução de uma equação diferencial e a obtenção de fluxos de campos de vetores.

Demonstração. Seja $g \in \mathcal{E}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$. Para mostrar que f é $\mathcal{R}$-equivalente a g consideramos $F : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ o caminho de germes $F(x,t) = f_t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ e iremos mostrar que quaisquer dois germes $f_t(x) = F(x,t)$ e $f_s(x) = F(x,s)$, deste caminho são $\mathcal{R}$-equivalentes, ou seja, basta mostrar que se t e s são próximos, então f_t é $\mathcal{R}$-equivalente f_s e como $[0,1]$ é compacto o resultado segue.

Afirmação 1: Existe $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,s)) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ tal que

a. $H(x,s) = x$

b. $H(0,t) = 0$

c. $F(H(x,t),t) = F(x,s)$.

Se a afirmação 1. é verdadeira, seja $h_t(x) = H(x,t)$, então segue de b. que $h_t(0) =$ e de a. obtemos que $h_s(x) = x$, logo h_s é germe de difeomorfismo e para t próximo de s, h_t também é germe de difeomorfismo, finalmente, segue de c. que

$$f_t(h_t(x)) = F(h_t(x),t) = F(H(x,t),t) = f_s(x),$$

ou seja, $f_t \circ h_t = f_s$ para t próximo de s e o resultado segue.

Nos resta mostrar então que a afirmação 1 é verdadeira.

Afirmação 2. Podemos trocar a condição c. da afirmação 1. por

$$\text{c}'. \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t).\frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) = 0$$

De, fato de c' obtemos $\frac{\partial F(H(x,t),t)}{\partial t} = 0$, logo $F(H(x,t),t) = F(x,s)$. Como $F(H(x,s),s) = G(x) = F(x,s)$ obtemos $F(H(x,t),t) = F(x,s)$.

Afirmação 3. Existe $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,s) \to \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ suave que satisfaz a equação diferencial :

d. $\sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial t}$ com valor inicial

e. $\xi_i(0,t) = 0$

Agora, se existe ξ, então existe H, pois a equação $\dot{x} = \xi(x,t)$ tem por solução $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ com

f. $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \xi(H(x,t),t)$ satisfazendo a condição inicial $H(x,s) = x$.

Agora so resta mostrar que estas condições implicam as condições a., b. e c'. Mas vemos que a condição a. segue de f., a condição c'. segue de d. e f. Aplicando d. em $(H(x,t) = t)$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(H(x,t),t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t)$$

e de f. obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial t}(x,t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x,t),t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t).$$

Agora considere o P.V.I. $\frac{\partial y}{\partial t} = \xi(y,t)$, com $y = y(t)$ e $y(s) = o$, cuja solução é $y(t) = H(0,t)$, mas $y(t) = 0$ e concluimos que $H(0,t) = 0$.

Mostremos então a afirmação 3.

Seja $\mathcal{E}_{n+1,(0,s)} = \mathcal{E}_{n+1,s} = \{\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,s)) \to \mathbb{R}\}$ de classe C^∞

Notemos que $\mathcal{E}_n$ pode ser visto vomo um subanel de $\mathcal{E}_{n+1,s}$, isto é, um germe de $\mathcal{E}_n$ pode ser considerado como um germe em $\mathcal{E}_{n+1,s}$ que não depende de t. Assim a condição e mostra que $\xi_i \in m_n.\mathcal{E}_{n+1,s}$.

Como $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial((1-t)f+tg)}{\partial t} = g - f \in m_n^{k+1}$, pois $j^k f(0) = j^k g(0)$ implica que $j^k(g-f)(0) = 0$.

Além disso, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial((1-t)f+tg)}{\partial x_i} = (1-t)\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = t\left(\frac{\partial(g-f)}{\partial x_i}\right).$$

Portanto

$$m_n^k\mathcal{E}_{n+1,s} \subset m_n\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}} \subset m_n\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}} + m_n^{k+1}\mathcal{E}_{n+1,s} \subset$$
$$m_n\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}} + m_{n+1,s}m_n^k\mathcal{E}_{n+1,s},$$

pois $m_n^k\mathcal{E}_{n+1,s} \subset m_n\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}}$.

Observamos então que $m_n^k\mathcal{E}_{n+1,s}$ é finitamente gerado em $\mathcal{E}_{n+1,s}$, pois é gerado pelos monômios de grau k, nas variáveis x_i, portanto

$$m_n^{k+1} \subset m_n^k\mathcal{E}_{n+1,s} \subset m_n\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}}.$$

Notemos que $\frac{\partial f}{\partial t} \in m_n^{k+1} \subset m_n\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{E}_{n+1,s}}$.

Então $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ onde $\eta_i \in \mathcal{E}_{n+1,s}$, $\eta_i(x,t)$, $n_i(0,t) = 0$, então tome $\xi_i = -\eta_i$. □

Corolario 3.3.7. *1. Se $m_n^{k+1} \subset m_n^2 J(f)$, então qualquer germe com o mesmo k-jato que f é $\mathcal{R}$-equivalente a f.*

Exemplo 3.3.8. $f(x,y) = x^3 + y^3$, então $J(f) =< x^2, y^2 >$ e $m_2 J(f) = m_2^3$, logo f qualquer germe com o mesmo 3-jato que f é $\mathcal{R}$-equivalente a f.

Exemplo 3.3.9. $f(x,y) = x^4 + y^4$, então $J(f) =< x^3, y^3 >$, porem $m_2 J(f) =< x^4, x^3 y, xy^3, y^4 > \neq m_2^4$, mas $m_2^2 J(f) = m_2^5$ e obtemos que qualquer germe com o mesmo 5-jato que f é $\mathcal{R}$-equivalente a f.

3.4 Germes de codimensão ≤ 5

A classificação dos germes de função se realiza ao determinarmos um representante para cada classe de $\mathcal{R}$-equivalência. Em geral os representantes escolhidos são aqueles que têm a forma mais simples possível com relação a um sistema de coordenadas conveniente. A estes germes damos o nome de forma normal para esta classe de equivalência.

Observamos que conforme aumenta a codimensão do germe, mais difícil fica a escolha do sistema de coordenadas que descreve a forma normal. Nesta seção iremos descrever os germes com codimensão ≤ 5.

Para os germes de codimensão 0 temos o seguinte

Proposição 3.4.1. *Um germe f tem codimensão 0 se, e somente se, a origem não é um ponto singular de f. Neste caso, f é equivalente a*

$$(x_1, \ldots, x_n) \to x_1.$$

Demonstração. Suponhamos que f tem codimensão zero. Então $J(f) = \mathcal{E}_n$. Logo o elemento identidade $1 \in J(f)$, ou seja, $1 = \psi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \psi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$ com $\psi_i \in \mathcal{E}_n$. Tomando $x = 0$ na ultima equação obtemos que existe pelo menos um $i = 1, \ldots, n$ com $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$. Portanto f é não singular.

Reciprocamente suponhamos que f é não singular. Logo existe pelo menos um $i = 1, \ldots, n$ com $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$ e portanto $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é invertível. Então $J(f) = \mathcal{E}_n$ e f tem codimensão 0. O fato de f ser equivalente ao germe $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1$ segue da Forma Local das Submersões. $\square$

O próximo passo é obter a classificação dos germes de codimensão 1.

Definição 3.4.2. Um germe $f \in m_n^2$ (isto é, a origem é um ponto singular) é **não degenerado** se a matriz Hessiana $H(f) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))$ é não singular.

Lema 3.4.3 (Lema de Morse)**.** *Um germe $f \in m_n^2$ é de codimensão 1 se, e somente se, é não degenerado. Neste caso f é equivalente a um germe da forma $(x_1, \ldots, x_n) \to x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_n^2$.*

Demonstração. Aplicando o Lema de Nakayama é possível mostrar que $f \in m_n^2$ é não degenerado se, e somente se, $J(f) = m_n$. Portanto, se f é não degenerado, temos cod $f = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{J(f)} = \dim \frac{\mathcal{E}_n}{m_n} = 1$. Por outro lado, se f tem codimensão 1, então $\dim \frac{\mathcal{E}_n}{J(f)} = 1$ e concluimos que $J(f) = m_n$ e f é não degenerado. Como $m_n = J(f)$, f é equivalente ao seu 2-jato. Concluimos da classificação das formas quadráticas que f é equivalente ao germe acima. $\square$

Definição 3.4.4. Seja $f \in m_n^2$ de codimensão ≥ 2. Dizemos que f tem coposto c se o posto da matriz Hessiana de f é $n - c$.

O Lema de Morse nos dá a classificação dos germes de coposto 0. A seguir obteremos a classificação dos germes de coposto 1 e codimensão finita. Para isto enunciamos um resultado auxiliar.

Lema 3.4.5 (Lema da Separação)**.** *Seja $f \in m_n^2$ de coposto c. Então f é equivalente ao germe*

$$(x_1, \ldots, x_n) \to g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2$$

Observamos que neste caso os germes f e g têm a mesma codimensão. Mostre isto como exercício.

Proposição 3.4.6. *Seja $f \in m_n^2$ de coposto 1 e codimensão k. Então f é equivalente ao germe $(x_1, \ldots, x_n) \to \pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2$. Este germe é chamado de singularidade A_k.*

A demonstração deste resultado é simples e segue diretamente dos seguintes fatos:

1. Pelo lema da separação, f é equivalente ao germe $(x_1, \ldots, x_n) \to g(x_1) \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2$, com $g \in m_1^3$.

2. Como $g \in m_1^3$ tem codimensão finita, existe um germe h, com $h(0) \neq 0$ e $g(x_1) = x_1^{k+1} h(x_1)$.

3. Um cálculo direto nos permite então mostrar que g é equivalente ao germe $\pm x_1^{k+1}$.

Como aplicação do lema da divisão iremos estabelecer uma conexão entre entre o coposto e a codimensão de um germe, que é fundamental para determinarmos as formas normais.

Lema 3.4.7. *Se $f \in m_n^2$ é um germe de codimensão finita e de coposto c, então* $\operatorname{cod} f \geq \frac{c(c+1)}{2} + 1$

Demonstração. Como f é de codimensão finita, temos pelo lema da divisão que f é equivalente a um germe $g(x_1, \ldots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2$, com $g \in m_n^3$. Com f e g tendo a mesma codimensão. Então, como $I = m_c J(g) \subset m_c^3$ temos $\operatorname{cod} I = \operatorname{cod}_0 I + \operatorname{cod}_1 I + \ldots + \operatorname{cod}_r I + \ldots$ com $\underset{0}{\operatorname{cod}} I = \dim \dfrac{I + \mathcal{E}_c}{I + m_c} =$

1, $\operatorname*{cod}_1 I = \dim \dfrac{I + m_c}{I + m_c^2} = c$, $\operatorname*{cod}_2 I = \dim \dfrac{I + m_c^2}{I + m_c^3} = \dfrac{c(c+1)}{2}$. Portanto $1 + c + \dfrac{c(c+1)}{2} \leq \operatorname{cod} I = c + \operatorname{cod} J(g)$ e o resultado segue. $\square$

Assim obtemos as seguintes estimativas:

(i) Se $c = 1$, $\operatorname{cod} f \geq 2$,

(ii) se $c = 2$, $\operatorname{cod} f \geq 4$ e

(iii) se $c = 3$, $\operatorname{cod} f \geq 7$.

Como estamos interessados na classificação dos germes de codimensão ≤ 5, basta considerarmos os germes de coposto ≤ 2.

Como aplicação direta do Lema 3.4.6, para os germes de coposto 1 obtemos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.8. R. Thom *[6] ou [2, p. 129] Para um germe $f \in m_n^2$ de coposto 1 e codimensão ≤ 5, a menos de uma soma de uma forma quadrática não degenerada em $n-1$ variáveis, f é equivalente a um dos seguintes germes*

(i) x^3, *se* $\operatorname{cod} f = 2$, *dobra,*

(ii) x^4, *se* $\operatorname{cod} f = 3$, *cúspide,*

(iii) x^5, *se* $\operatorname{cod} f = 4$, *rabo de andorinha,*

(iv) x^6, *se* $\operatorname{cod} f = 5$, *borboleta.*

Para completar a lista dos germes de codimensão ≤ 5, a proposição seguinte descreve os germes de coposto 2.

Proposição 3.4.9. R. Thom *[6] ou [2, p. 129] Todo germe $f \in m_n^2$ de coposto 2 e codimensão ≤ 5 é equivalente, a menos da soma de uma forma quadrática não degenerada em $n-2$ variáveis, a um dos seguintes germes:*

1. $x^3 - xy^2$ *(umbílico eliptico),*
2. $x^3 + y^3$ *(umbílico hiperbólico) ou*
3. $x^2y + y^4$ *(umbílico parabólico).*

Demonstração. O primeiro passo desta demonstração é consequencia direta do "Lema da separação", ou seja como f é de coposto 2, f é equivalente a $g(x,y) \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm \ldots \pm x_n^2$ com $g \in m_2^3$ e $\operatorname{cod} g = \operatorname{cod} f = 4$ ou 5. Observando que os termos de ordem 3 da Série de Taylor destes germes formam uma forma cúbica binária nas variáveis x e y, a determinação destas formas normais segue diretamente da classificação das formas cúbicas binárias e de uma análise dos jatos de ordem 4 destes germes. Deixamos como exercício a finalização desta análise. Observamos que as duas primeiras formas normais têm codimensão 4 e a última tem codimensão 5. $\square$

Capítulo 4

Germes do plano no plano

Neste capítulo estudamos germes $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, ou seja elementos do anel $\mathcal{E}_{2,2}$ que preservam a origem. Nosso objetivo é obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, ou seja a $\mathcal{A}$-equivalência.

Ressaltamos a importância destes resultados em Teoria de Singularidades por que Whitney em [8, 1955] publicou o que foi considerado o primeiro trabalho da Teoria de Singularidades, mostrando quais as possíveis singularidades que aparecem em uma aplicação estável do plano no plano. A partir deste artigo apareceram várias listas com a classificação das singularidades que aparecem em germes com codimensão baixa, e em [4] temos uma lista mais completa com as singularidades simples. Neste capítulo apresentamos as singularidades em germes de codimensão menor ou igual a dois e temos por referência o capítulo 8 de [5].

4.1 O grupo $\mathcal{A}$.

Neste capítulo estudamos germes $f\colon(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$, ou seja elementos do anel $\mathcal{E}_{2,2}$ que preservam a origem. Nosso objetivo é obter uma lista parcial das classes de equivalência que são determinadas a menos de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, ou seja a $\mathcal{A}$-equivalência.

Definição 4.1.1. Dois germes f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes se existem germes de difeomorfismo $h\colon(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ e $k\colon(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ tal que $f = k\circ g\circ h^{-1}$.

Aqui tambem temos que uma ação do grupo $\mathcal{A}$, formado pelos pares de difeomorfismos (h,k), em $\mathcal{E}_{2,2}$ e as órbitas $\mathcal{A}g$ segundo esta ação são obtidas por todos os elementos f que se escrevem na forma $f = k\circ g\circ h^{-1}$.

Lembramos aqui que o espaço $\mathcal{E}_{2,2}$ tem uma estrutura de $\mathcal{E}_2$-módulo e os espaços tangentes às órbitas são sub-conjuntos de $\mathcal{E}_{2,2}$.

Definição 4.1.2. *Um germe é chamado $\mathcal{A}$-estavel se a sua $\mathcal{A}$ órbita é um conjunto aberto em $\mathcal{E}_{2,2}$.*

Whitney em [8] foi quem primeiro determinou quais são as singularidades que aparecem em um germe de aplicação estável do plano no plano. Este trabalho é considerado pioneiro em Teoria de Singularidades e sua publicação determinou os rumos da pesquisa nesta Teoria por muito tempo. Seu principal resultado diz que na curva singular de qualquer aplicação estável existem somente cúspides e dobras transversais como singularidades isoladas.

Exemplo 4.1.3. Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x, y^4 + xy - y^2)$, o conjunto de pontos críticos de f é dado por:

$$\Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4y^3 + x - 2y = 0\}.$$

A curva singular de f: $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$ é uma curva com dois pontos de cúspide e um ponto duplo.

4.2 As $\mathcal{A}$-órbitas singulares em $\mathcal{E}_{2,2}$

O germe mais simples de aplicação do plano no plano que preserva origem é a identidade $F(x, y) = (x, y)$ e este germe não tem singularidades, pois sua matriz Jacobiana sempre tem posto dois, ou coposto zero.

Nosso próximo passo é estudar os germes de coposto um, ou seja aqueles em que a matriz Jacobiana tem exatamente posto um, neste caso primeiro observamos que qualquer germe de coposto um, a menos de mudança de coordenadas, pode ser escrito na forma $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Iremos inicialmente considerar os germes de grau no máximo dois, ou seja germes em $J^2(2, 2)$. Neste sentido nosso primeiro resultado é descrito na seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Qualquer germe de coposto um em $J^2(2, 2)$ é $\mathcal{A}$-equivalente a um dos seguintes germes: (x, y^2), (x, xy) ou $(x, 0)$.*

Para demonstrar esta proposição escrevemos o germe $F(x, y)$ na forma geral $F(x, y) = (x, ax + bx^2 + cxy + dy^2)$. Observamos que a segunda coordenada de $F(x, y)$ não pode ter termo puro y em sua série de Taylor, pois neste caso o germe seria não singular e $\mathcal{A}$-equivalente a (x, y).

Para eliminar o termo puro x desta função coordenada fazemos a mudança na meta: $k'(u,v) = (u, v - au)$ e obtemos $F_1 = k' \circ F = (x, bx^2 + cxy + dy^2)$.

A seguir, se $d \neq 0$, a mudança na fonte $h'(x,y) \to (x, y - c/dx)$ nos da $F_2 = F_1 \circ h = (x, Ax^2 + By^2)$. Agora fazemos uma mudança de coordenadas na meta $k''(u,v) = (u, v - Au^2)$ para obter $F_3 = k'' \circ F_2 = (x, dy^2))$. Agora podemos mostrar facilmente que este germe F_3 é $\mathcal{A}$-equivalente a (x, y^2). Se $d = 0$ e $c \neq 0$, a mudança na fonte $(x,y) \to (x, bx + cy)$ nos da o germe (x, xy). Se $d = c = 0$, F é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, 0)$. $\square$

Agora damos início ao estudo das $\mathcal{A}$-órbitas nos germes de grau maior. Para isto em cada um destes representantes acrescentamos termos de grau maior e tentamos descobrir representantes para as respectivas $\mathcal{A}$-órbitas.

Dentre estes três germes, primeiro estudamos (x, y^2). A principal questão é descobrir um representante para as $\mathcal{A}$-órbitas com 2-jato (x, y^2) de todos os germes de coposto 1?

A menos de mudanças de coordenadas, tal germe se escreve na forma $(x, y^2 + \sum a_{i,j} x^i y^j)$ com $i + j \geq 3$. Uma aplicação imediata de um teorema análogo ao Teorema 3.3.6, mas relativo à $\mathcal{A}$-equivalência nos mostra que todos os germes da forma $(x, y^2 + \sum a_{i,j} x^i y^j)$ com $i + j \geq 3$ estão na $\mathcal{A}$-órbita do germe (x, y^2). Observamos também que este germe é $\mathcal{A}$-estável.

4.3 Germes com 2-jato (x, xy)

Este se escreve na forma $(x, xy + \sum a_{i,j} x^i y^j)$ com $i + j \geq 3$. Ao fatorarmos os termos divisiveis por x na segunda coordenada do germe, a composição deste com o difeomorfismo na fonte $(x,y) \to (x, y + \sum a_{i,j} x^{i-1} y^j)$ elimina todos estes termos na segunda componente, exceto o termo xy, então este germe é equivalente a $(x, xy + \sum a_i y^i)$. A partir deste resultado, obtemos

Teorema 4.3.1. *As órbitas de $\mathcal{A}$-codimensão ≤ 2 e 2-jato (x, xy) são:*

(i) $(x, xy + y^3)$*, chamado de cúspide, de codimensão zero, ou estável.*

(ii) $(x, xy + y^4)$*, chamado de rabo de andorinha, de codimensão* 1.

(iii) $(x, xy + y^5 + y^7)$*, chamado de borboleta, de codimensão* 2.

Demonstração. Se $a_3 \neq 0$ no germe $(x, xy + \sum_{i\geq 3} a_i y^i)$ qualquer germe é equivalente ao germe (x, y^3). Agora se $a_3 = 0$ e $a_4 \neq 0$ então qualquer germe é equivalente ao germe (x, y^4) e finalmente se, $a_3 = a_4 = 0$ e $a_5 \neq 0$, então qualquer germe é equivalente ao germe $(x, xy + y^5 + y^7)$. A demonstração termina ao mostrarmos que se $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ então os germes tem codimensão maior que 2. □

4.4 Germes com 2-jato $(x, 0)$

No lema a seguir classificamos as órbitas com 2-jato $(x, 0)$ em $J^3(2, 2)$.

Lema 4.4.1. *As órbitas com 2-jato $(x, 0)$ em $J^3(2, 2)$ são $(x, y^3 \pm x^2 y)$, (x, xy^2) e $(x, 0)$.*

Demonstração. Qualquer germe em $J^3(2, 2)$ de coposto um com este 2-jato se escreve na forma $(x, ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3)$. Se $d \neq 0$ fazemos a mudança de coordenadas na meta $(u, v) \to (u, v - au^3)$ e a mudança de coordenadas na fonte $(x, y) \to (x, y - c/dx)$, para obter o germe $(x, (3bd - c^2)/dx^2 y)$. Neste caso, se $(3bd - c^2) = 0$ obtemos que o germe é $\mathcal{A}$-equivalente a (x, y^3), se não, obtemos que o germe é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, y^3 \pm x^2 y)$. Ressaltamos aqui que estes dois germes não são equivalentes, ou seja são representantes de órbitas diferentes, mostre isto como exercício. Se $d = 0$ e $c \neq 0$, usando resultados mais sofisticados, é possível mostrar que o germe é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, x^2 y)$. Finalmente, se todos os coeficientes são nulos temos o germe $(x, 0)$. $\square$

Para completar a classificação, temos o seguinte.

Teorema 4.4.2. *(i) Para $k \geq 3$, todo $k+1$-jato com k-jato $\mathcal{A}$-equivalente a (x, y^3) é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, y^3 \pm x^k y)$ ou (x, y^3). Os dois primeiros tem codimensão $k - 1$.*

(ii) Para $k \geq 3$, todo k-jato cujo $k-1$-jato seja $\mathcal{A}$-equivalente a (x, xy^2) é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, xy^2 + \sum_{i=4}^{k} a_{i,i} y^i)$. Se $a_{4,4} \neq 0$ então o 4-jato é equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$.

(iii) Para $k \geq 2$, todo $k+1$-jato de codimensão finita, com k-jato $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, xy^2 + y^4)$ é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, xy^2 + y^4 + y^{2k-1})$, este germe tem codimensão $k - 2$.

(iv) As outras órbitas tem codimensão maior ou igual a 2.

A demonstração deste Teorema fica como exercício e para finalizar.

Teorema 4.4.3. *Germes de codimensão menor ou igual a dois em $\mathcal{E}_{2,2}$:*

(i) Submersão, com forma normal (x, y) e codimensão 0.

(ii) Dobra, com forma normal (x, y^2) e codimensão 0.

(iii) Cúspide, com forma normal $(x, y^3 + xy)$ e codimensão 0.

(iv) Rabo de andorinha, com forma normal $(x, y^4 + xy)$ e codimensão 1.

(v) Labios ou bicos, com forma normal $(x, y^3 \pm x^2y)$ e codimensão 1.

(vi) Borboleta, com forma normal $(x, y^5 + xy \pm y^7)$ e codimensão 2.

(vii) Ganso, com forma normal $(x, y^3 + x^3y)$ e codimensão 2.

(viii) Gaivota, com forma normal $(x, xy^2 + y^4 + y^5)$ e codimensão 2.

Referências Bibliográficas

[1] V.I. Arnol'd, A. Varchenko & S. Gusein-Zade, Singularities of differentiable maps. Vol. I, Monographs in Mathematics, **82**, Birkhäuser, 1985.

[2] C. Gibson, Singular points of smooth mappings, Pitman Research Notes in Mathematics, 25 (1979).

[3] Elon Lages Lima, Variedades Diferenciáveis, Monografias de Matemática, 15. IMPA, Rio de Janeiro, 1977. 369 pp.

[4] J. H. Rieger, *Families of maps from the plane to the plane*, J. London Math. Soc. (2), 36, (1987), 351–369.

[5] Farid Tari, Singularidades de Aplicações diferenciáveis, Notas Didáticas do ICMC-USP, n: 34, 1999.

[6] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse.* (French) Essai d'une théorie générale des modèles, Mathematical Physics Monograph Series. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass., 1972. 362 pp.

[7] C. T. C. Wall, *Finite determinacy of smooth map germs*, Bull. London Math. Soc. 13, (1981), 481–539

[8] H. Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane.* Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374–410.