UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2569

Um Algoritmo para Otimizar a Geração do Gabarito da Transformada da Distância Euclidiana Exata

Maurício Falvo
Odemir Martinez Bruno

Nº 218

RELATÓRIOS TÉCNICOS

São Carlos – SP
Out./2003

SYSNO 1345007
DATA / /
ICMC - SBAB

UM ALGORITMO PARA OTIMIZAR A GERAÇÃO DO GABARITO DA TRANSFORMADA DA DISTÂNCIA EUCLIDIANA EXATA

Maurício Falvo

Odemir Martinez Bruno

Universidade de São Paulo
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Laboratório de Computação de Alto Desempenho
Caixa Postal 668, 13560-970 – São Carlos, SP, Brasil
e-mail: {mfalvo, bruno}@icmc.usp.br

Resumo: Este relatório apresenta uma proposta para a geração do gabarito a transformada da distância baseada em dilatações exatas. A forma de geração deste gabarito se baseia no algoritmo de construção da circunferência, que se utiliza de simetria. Esta mesma idéia foi aplicada no mapeamento das distâncias euclidianas exatas de uma matriz quadrada de tamanho ímpar. Conforme apresentado em teste comparativo, o algoritmo apresentou um bom desempenho.

Outubro 2003

SUMÁRIO

1 – Introdução 3

1.1 - O gabarito da transformada da distância euclidiana exata 5

2 – Método da Simetria 7

2.1 - Algumas definições: 10

2.2 - Passos para a geração da tabela de distâncias euclidianas 11

3 – Resultados Experimentais 13

4- Conclusão 13

5- Bibliografia 14

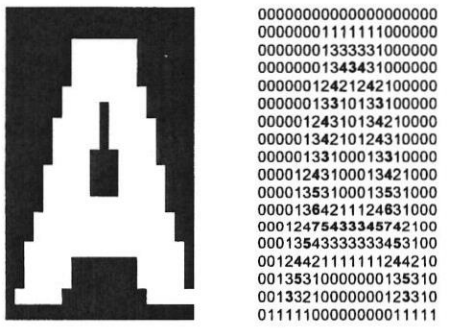
1 – Introdução

A transformada da distância é um método que possibilita obter a distância de um ponto P em relação a qualquer outro ponto contido no mesmo espaço ao qual pertence P (Chassery, 1991a), sendo a distância euclidiana - que é um caso particular das distâncias de Minkowsky – é largamente utilizada, por ser uma maneira natural de como o homem, percebe o espaço a sua volta.

Pode-se encontrar a utilização da transformada da distância, nas mais diversas áreas, tais como:

- Robótica: no planejamento de trajetórias (Zelinsky, 1992).
- Medicina: em neuromorfologia (Costa, 2000).
- Física: análise de rugosidade de superfície. (Souza Cruz, 2000).
- Visão computacional: onde diversos métodos de visão fazem uso da transformada da distância, dos quais são apresentados alguns a seguir:

Afinamento*[1]:** O processo de afinamento possibilita a redução da espessura de objetos em uma imagem binária, através da redução das linhas no sentido da borda para o centro da figura. O resultado obtido, da redução dos objetos em linhas que se aproximam dos respectivos centros, é conhecido como ***esqueletonização. A esqueletonização pode ser definida como uma representação filiforme centrada no interior do objeto representado (Chassery,1991b). A importância da esqueletonização é de se obter as informações essenciais dos objetos na imagem (O'Gorman, 1995a), e medir e comparar a estrutura obtida, com a estrutura de objetos cujas características são conhecidas (Baxes, 1994). Há várias maneiras de se produzir afinamento, aqui serão citadas duas: por operadores morfológicos e pela transformada da distância.



```
00000000000000000000
00000001111111000000
00000001333331000000
00000013434310000000
00000012421242100000
00000013310133100000
00000124310134210000
00000134210124310000
00001331000133100000
00012431000134210000
00013531000135310000
00013642111246310000
00124754333457421000
00135433333334531000
01244211111112442100
01353100000001353100
01332100000000123310
01111100000000011111
```

Figura 1a: Imagem (esq.) e sua transformada da distância (dir.). onde pode-se ver os índices que indicam a distância do respectivo ponto em relação à borda e identificar os índices máximos no interior da imagem. Obs: Os índices aplicados, representam as distâncias da Tabela de Distâncias Euclidianas, página xx.

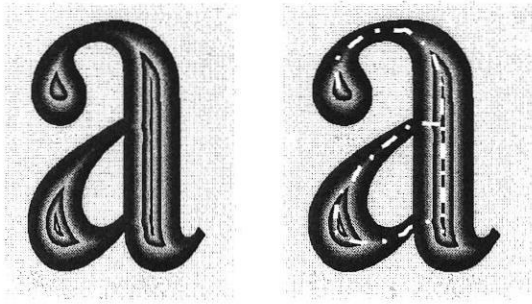


Figura 1b: Esq -Imagem de maior resolução onde foi aplicada a transformada da distância com texturazação.. Dir: - esqueto traçado através do caminho obtido pelo caminhos dos máximos locais.

[1] "O termo afinamento (thinning) é utilizado para descrever o processo, enquanto que thinning-line ou esqueleto é utilizado para designar o resultado" (O'Goramn,1995).

Por meio de operadores morfológicos, pode-se obter o afinamento de um objeto através de operações de erosão (Dougherty, 1992a) ou a obtenção de esqueletos, empregando o afinamento baseado no conceito de discos máximos. Este tipo de transformação, irreversível, requer um pré e pós-processamento, a fim de minimizar numerosas ramificações espúrias devido à irregularidade das bordas e a ruídos (Dougherty, 1992a).

Através da transformada da distância cada pixel da imagem é mapeado com a respectiva distância em relação ao pixel de borda mais próximo. Isto irá produzir sub-contornos que terão suas escalas reduzidas a medida que se caminha para o centro do objeto. O afinamento ocorre, quando é definido qual dos sub-contornos será usado como referência para o redesenho do objeto (figura 1). Por meio da transformada da distância, pode-se obter a esqueletonização, identificando-se os picos de máxima, das distâncias locais. O esqueleto obtido oferece a vantagem de permitir a compressão do objeto esqueletonizado, pois os pontos que determinam o esqueleto, guardam a largura de linha local, possibilitando a reconstrução do objeto original (O'Gorman,1995).

Dimensão Fractal: Da dimensão fractal, pode-se ter parâmetros descritores da complexidade da forma do objeto. Na prática podemos caracterizar a dimensão fractal como uma medida efetiva da superfície de contado entre o objeto e o seu meio. Portanto quanto maior a superfície, maior será a dimensão fractal (Costa, 2002). Com a transformada da distância, pode-se determinar a dimensão fractal de um objeto em relação ao meio, ao qual faz parte, através do mapeamento de todo o espaço (interno e externo) com o qual a borda do objeto em estudo possui interface. Com o mapeamento do espaço onde o objeto está contido, aplica-se o método de "Minkowsky-Sausage" para a determinação da dimensão fractal deste. (Tricot,1995). A figura 2 apresenta um exemplo do método para estimar a dimensão fractal.

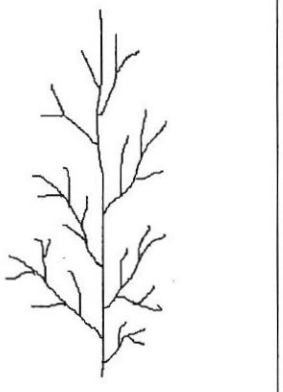


Figura 2a :Estrutura ramificada que poderia ser a nervura de uma folha.

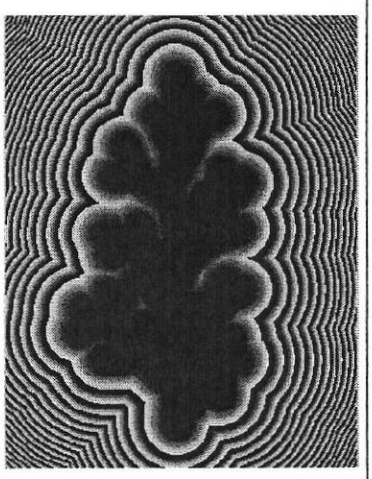


Figura 2b: Representação gráfica da aplicação da transformada da distância.

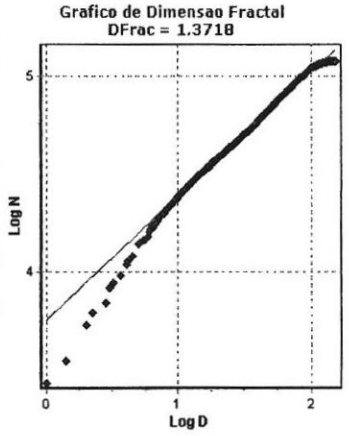


Figura 2c: Obtenção da dimensão fractal pelo método "Minkowsky-Sausage"

Watershed: A identificação e caracterização de objetos em uma imagem podem na maioria das vezes, sofrer interferências devido à distribuição dos objetos em cena - causado pelo agrupamento ou a sobreposição desses. Assim, freqüentemente torna-se necessário a utilização de algoritmos de separação. O algoritmo de watershed, apesar de ser utilizado em diversas aplicações como por exemplo, detecção de borda (Wright, 1997), também é utilizado para a separação de objetos.

Uma boa estratégia de separação consiste em encontrar uma linha divisória que separe os elementos agrupados/sobrepostos de maneira tal que, seja preservado ao máximo a integridade de cada elemento (Dougherty, 1992b). O primeiro passo do método watershed, consiste no mapeamento das distâncias, através da transformada da distância. Obtida a função distância, esta deverá sofrer uma negativação de valores, isto é, onde havia dist(x) passa a ser – dist(x), assim pontos de máxima, passam a ser pontos de mínima, e a partir daí a obtenção da segmentação será o resultado de uma abordagem de visão da função distância. Um exemplo característico é o de um mapa topográfico, onde os pontos de mínima são vistos como vales e os de máxima como picos (Dougherty, 1992b). Supondo que esses vales sejam preenchidos constantemente com água, chegará um momento em que será necessário levantarmos paredes para que as águas de vales vizinhos não se encontrem. O conjunto destes traçados onde deverão ser construídas estas "paredes" é chamado de "watershed lines". As "watershed lines" são utilizadas para a segmentação dos objetos (Serra, 2000). A Figura 3 apresenta os passos da separação de objetos por watershed.

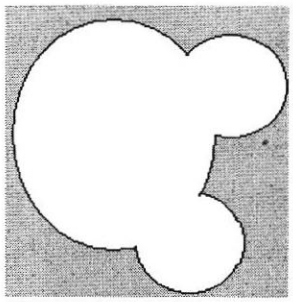


Figura 3a: Modelo com três elementos agrupados.

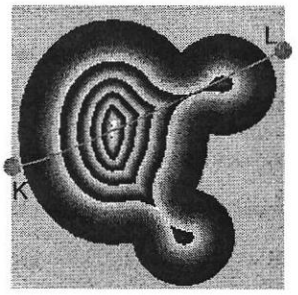


Figura 3b: Aplicação da transformada da distância.

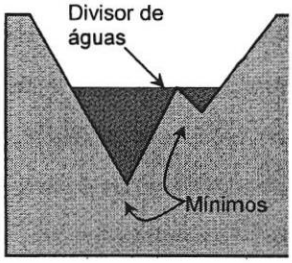


Figura 3c: Corte transversal definido pelo seguimento KL sobre a tranformada da distância (Fig 3b)

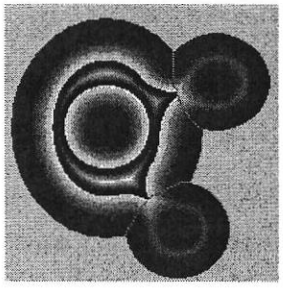


Figura 3d: Aplicação da transformada da distância com os pontos de mínmos marcados Observe que identificando-se os pontos de divisão de águas, pode-se determinar as linhas divisórias do agrupamento

1.1 - O gabarito da transformada da distância euclidiana exata

Como se pode observar, os algoritmos anteriormente descritos, têm como principal instrumento, a transformada da distância euclidiana exata. Neste trabalho é considerado o método da transformada da distânicia por dilatações exatas (Costa 2000b). Observe o exemplo da Figura 4 e veja que o valor do elemento central é zero (informando a distância relativa de P a ele mesmo). Os demais pontos cobertos pela matriz têm sua distância relativa a P, determinada por: $d = \sqrt{(i-c_i)^2 + (j-c_j)^2}$

Onde i e j são os índices do elemento da matriz distância, que serão utilizados para a determinação da distância do respectivo elemento, do centro da matriz. Enquanto que, c_i e c_j são os índices do elemento central da matriz *NxN*.

Convém lembrar que, para se ter uma matriz simétrica, esta sempre deverá ser quadrada NxN sendo N um número ímpar.

Como se pode observar, a geração da matriz distância trata-se de um procedimento simples, onde cada elemento da matriz assume o valor da distância definida pelos seus respectivos índices. Entretanto, ainda se faz necessário que as distâncias geradas e suas respectivas coordenadas da matriz, sejam armazenadas em uma estrutura de fácil recuperação – para que possamos saber quais coordenadas de pontos estão a uma distância *D* de *P (Costa, 2000b)* Esta estrutura deverá ser ordenada em função da distância e deverá conter, para cada distância, a lista de coordenadas que a geram, conforme é exemplificado na Figura 5. A obtenção dessa estrutura demandaria a manipulação de N^2 elementos da matriz, agrupando todas as coordenadas que geram a mesma distância euclidiana exata, em vetores distintos.

$\sqrt{18}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$
$\sqrt{13}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
$\sqrt{13}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
$\sqrt{18}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$

Figura 4

Estrutura de uma Tabela de Distâncias Euclidianas

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 5a:Matriz com os valores da transformada da distância determinadas pelos respectivos índices das células.

-3,3	-2,3	-1,3	0,3	1,3	2,3	3,3
-3,2	-2,2	-1,2	0,2	1,2	2,2	3,2
-3,1	-2,1	-1,1	0,1	1,1	2,1	3,1
-3,0	-2,0	-1,0	0,0	1,0	2,0	3,0
-3,-1	-2,-1	-1,-1	0,-1	1,-1	2,-1	3,-1
-3,-2	-2,-2	-1,-2	0,-2	1,-2	2,-2	3,-2
-3,-3	-2,-3	-1,-3	0,-3	1,-3	2,-3	3,-3

Figura 5b :Representação da matriz com os respectivos índices das céluas.

I	D	Vetor de Coordenadas (Vcd)
0	***0***	{(0,0)}
1	***1***	{(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)}
2	***2***	{(1,1), (1,-1), (1,-1), (-1,-1)}
3	***4***	{(2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)}
4	***5***	{(1,2), (2,1), (1,-2), (2,-1), (-1,2), (-2,1), (-1,-2), (-2,-1)}
5	***8***	{(2,2), (-2,2), (2,-2), (-2,-2)}
6	***9***	{(3,0), (0,3), (-3,0), (0,-3)}
7	***10***	{(1,3), (3,1), (1,-3), (3,-1), (-1,3), (-3,1), (-3,-1), (-1,-3)}
8	***13***	{(2,3), (3,2), (2,-3), (3,-2), (-2,3), (-3,2), (-2,-3), (-3,-2)}
9	***18***	{(3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3)}

Figura 5C: Exemplo de uma estrutura de tabela de distâncias euclidianas indexadas pela distância. Onde I é o índice do elemento na tabela, D é a respectiva distância, e a terceira coluna representa o vetor das coordenadas .

A proposta, aqui apresentada, visa otimizar o algoritmo de geração da tabela de distâncias euclidianas, atuando de duas formas: reduzindo o número de elementos a ser indexado e reduzindo o esforço de agrupamento de coordenadas de distâncias iguais.

2 – Método da Simetria

O método se baseou na geração de coordenadas de pontos de uma circunferência, utilizando-se de simetria, a partir de pontos contidos no intervalo de 0 a 45 graus (Foley, 1992). Assim foi possível gerar de forma rápida, tabelas de distâncias euclidianas ordenadas pela distância, considerando-se as características de simetria de uma matriz quadrada de largura ímpar.

Buscando-se construir uma proposta semelhante à aplicada na construção da circunferências por simetria, houve a necessidade de se identificar e quantificar o número mínimo de elementos $a_{i,j}$ (pertencentes a uma matriz NxN, onde N é ímpar), essenciais para gerar todas as distâncias euclidianas de uma matriz. Por uma questão de maior facilidade de visualização das matrizes e para a manipulação de números inteiros, não foram extraídas as respectivas raízes quadradas das distâncias assim, a distância euclidiana ***D,*** determinada pelo par ordenado *(i, j)* da matriz, fica definida por:

$$\boldsymbol{D} = (c_i - i)^2 + (c_j - j)^2 \ ,$$

Onde *ci e cj* são os índices do elemento central da matriz. Assim, para uma matriz de tamanho 7x7 tem-se a matriz apresentada na Figura 4. Observando-se com mais atenção, pode-se verificar que todas as distâncias diferentes possíveis se concentram na metade do primeiro quadrante, como é apresentada na Figura 6.

O conjunto de coordenadas dos elementos assinalados na matriz da Figura 6 é aqui denominada de conjunto de **coordenadas bases**. Lembrando que, a matriz de distâncias euclidianas para manter sua simetria, deve sempre ter tamanho ímpar e o seu tamanho pode ser definido por:

$$N = (dim*2)+1$$

Onde *dim*, é o comprimento em número de elementos de matriz, do elemento central até a sua borda, excluindo o próprio elemento central. No caso da matriz da Figura 6 o valor de dim é três. Dessa forma $N=(3*2)+1$, de onde se obtêm o tamanho da matriz 7x7, cujo centro que contém o valor zero, está na célula (4,4) que pode ser determinado em função de dim por: $C=dim+1$. Pode-se ver até agora, que todas as distâncias euclidianas base, de uma matriz quadrada de largura ímpar, se concentram na metade do primeiro quadrante. Mas quantas seriam?

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 6

Observando-se que o número de elementos empilhados decresce uma unidade na camada superior, e a base deste empilhamento é de comprimento dim+1, o número total de elementos de distância base (*Ndb*) é definido por:

$$Ndb = \sum_{k=0}^{\dim} (\dim + 1 - k)$$

Que simplificado e aplicado à matriz da Figura 6, gera o total de distâncias base:

$Ndb = (3^2 + 3*3+2)/2$

$$Ndb = \frac{(\dim+1)^2 + (\dim+1)}{2} = \frac{\dim^2 + 3\dim + 2}{2}$$

$Ndb = (9+9+2)/2$

$Ndb = 20/2$

$Ndb = 10$

A razão entre o número de elementos de distância base, pelo número total de elementos da matriz, indica em termos percentuais qual o percentual de redução (*Rn%*) do número de elementos a serem manipulados para a construção da tabela de distância euclidiana. Esse valor é dado por:

$$Rn\% = \frac{\frac{\dim^2 + 3\dim + 2}{2}}{(2\dim+1)^2} = \frac{\dim^2 + 3\dim + 2}{8\dim^2 + 8\dim + 2}$$

Quando dim é 1, teremos uma matriz de 3x3 e o número de distâncias base será 3. O que corresponde a aproximadamente 33% do número total de elementos da matriz. Quando dim tende a infinito, teremos:

$$\lim_{\dim \to \infty} \frac{\dim^2 + 3\dim + 2}{8\dim^2 + 8\dim + 2} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$$

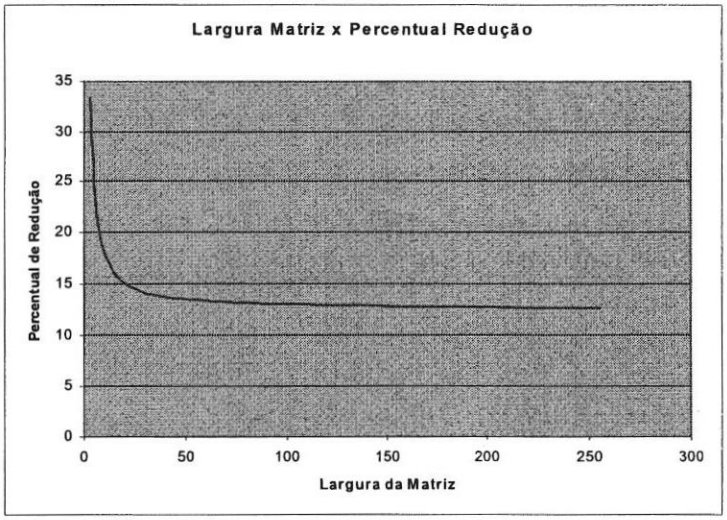


Figura 7

Esta taxa é rapidamente atingida, pois com um valor de dim=100 (o que implica em uma matriz de 201x201), Rn% será de 12,7%.Aumentando-se a largura da matriz, o percentual, de distâncias base a serem ordenados na tabela de distâncias euclidianas, cai progressivamente chegando ao máximo de 12,5% (Figura 7).

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 8a

Nesta primeira etapa, foi possível obter uma considerável redução no número distâncias a serem geradas, o que representa um fator de ganho em termos de esforço computacional. Nesta segunda etapa, são obtidas todas as coordenadas possíveis de cada distância gerada, fazendo-se uso de simetria. Para facilitar a análise da característica de simetria da matriz, as Figuras 8a–8d apresentam a mesma matriz da Figura 6, destacando os grupos de valores das distâncias. A ordem de análise dos grupos de números é seguida pela seqüência das Figuras 8a, 8b, 8c e 8d.

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 8b

- Primeiro grupo (Figura 8a): apresenta apenas a distância zero, possuindo apenas uma única ocorrência. (x, y). Para x=y=0;
- Segundo grupo (Figura 8b): Possuindo 4 ocorrências cada um, os valores (1,4,9) estão sobre os eixos X e Y. Aparecerem nas suas respectivas coordenadas (x,y), e em suas coordenadas simétricas: (y,x),(-x,y) e (x,-y). Esta regra de simetria é válida para elementos da matriz, cujos índices respeitam a condição: x≠y e (y=0 ou x=0).

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 8c

- Terceiro grupo (Figura 8c): Também com 4 ocorrências cada um, os valores (2,8,18), estão sobre as diagonais e além de aparecerem na posição (x,y), são encontrados em suas coordenadas simétricas: (x,-y), (-x,-y) e (-x,y). Esta regra de simetria é valida para elementos da matriz, cujos índices respeitam a condição: x=y e x≠0.
- Quarto grupo (Figura 8b): Os valores (5,10,13) que estão fora das diagonais e dos eixos X e Y, surgem em (x,y) e nas coordenadas simétricas: (y,x),(-x,y),(-y,x),(-x,-y),(-y,-x),(x,-y) e

18	13	10	9	10	13	18
13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13
18	13	10	9	10	13	18

Figura 8d

(y,-x). É o grupo com maior ocorrência por elemento - 8. Esta regra de simetria é valida para elementos da matriz, cujos índices respeitam a condição: $x \neq y$ e $x \neq 0$.

Identificadas as situações de simetria, pode-se agora definir um algoritmo de geração da tabela de distância euclidiana por simetria.

2.1 - Algumas definições:

- **C_i, C_j**: índices de coordenada do elemento central da matriz *nxn* onde *n* é ímpar. Sendo que C_i e C_j podem ser obtidos por :

$$C_i = C_j = \dim(M_{nxn}) + 1 \quad ou\ por\ C_i = C_j = \lceil n/2 \rceil$$

- ***dim(M_{nxn})***: distância em número de elementos, do elemento central da matriz M_{nxn} à sua borda, excluindo-se a contagem do elemento central, isto é: $\dim(M_{nxn}) = \lfloor n/2 \rfloor$ onde n é a largura da matriz, e obrigatoriamente ímpar.

- ***Coordenadas bases*** **(Cb)**: conjunto de pares dos índices *(i,j)* relativos ao centro de uma matriz nxn onde n é ímpar:

$$Cb = \{(i, j) \mid 0 \leq j \leq dim(M_{nxn})\ ; j \leq i \leq dim(M_{nxn}),\ \text{onde } i \text{ e } j \in N\},$$

Para uma matriz 7x7, seria o conjunto de índices { (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)} que correspondem às coordenadas dos elementos da matriz assinalados na Figura 6, cujo índice do elemento central é considerado (0,0). Para a geração do gabarito da transformada da distância exata, devemos gerar as coordenadas e distâncias relativas ao centro da matriz, por isso não podemos considerar as coordenadas absolutas.

- ***Distâncias base***: conjunto de distâncias euclidianas calculadas utilizando-se os índices das coordenadas bases.
- ***Vetor de Coordenadas da Distância*** **(Vcd)** : Conjunto que contém as coordenadas da matriz de uma dada distância **D**.
- ***Tabela Ordenada da Distância Euclidiana*** (TODE): Conjunto de elementos que contém as distâncias euclidianas cada qual com o seu respectivo conjunto de coordenadas Vcd. Esta tabela está ordenada pela distância em ordem crescente.
- ***Regras de Construção do Vetor de Coordenadas da Distância:*** conjunto de regras para a determinação das coordenadas simétricas de uma dada coordenada base.

Regras de Construção do Vetor de Coordenadas da Distância (Vcd)
1. Adicionar a coordenada base (x,y) no ***Vcd***
2. Se x≠y OU y≠0 adiciona-se ao conjunto ***Vcd*** o par (-x,y)
3. Se x≠y adiciona-se ao conjunto ***Vcd*** os pares (y,x) e (y,-x)
4. Se y≠0 adiciona-se ao conjunto ***Vcd*** os pares (x,-y) e (-x,-y)
5. Se x·y E y·0 adiciona-se ao conjunto Vcd os pares (-y,x) e (-y,-x)

2.2 - Passos para a geração da tabela de distâncias euclidianas

1. Para cada coordenada base (x,y):
   - gerar a distância euclidiana da coordenada base
   - Gerar o Vetor de Coordenadas da Distância ***Vcd***, utilizando-se das Regras de Construção do Vetor de Coordenadas da Distância.
   - Inserir na Tabela de Distâncias Euclidianas a distância gerada e seu respectivo vetor de coordenadas ***Vcd***.
2. Ordenar a Tabela de Distâncias Euclidianas pela distância.
3. Varrer a Tabela de Distâncias Euclidianas Ordenada, atualizando o índice I (Figura 1c) com o primeiro valor 0 (zero) para a primeira distância, e incrementando o valor deste índice para todo elemento da tabela que possuir a distância diferente do elemento anterior. Caso o elemento tenha distância igual ao anterior, deve-se agrupar o Vcd deste ao Vcd do elemento anterior. Este passo se faz necessário, pois as coordenadas bases podem gerar distâncias iguais. Um exemplo que pode ser citado, é a distância 25 que pode ser gerada pela coordenada base (0,5) e seus simétricos, mas também pode ser gerada pela outra coordenada base (3,4) e seus simétricos, apesar de não possuírem (0,5) e (3,4) nenhuma relação de simetria. O índice I comumente é utilizado para mapear os níveis de distâncias em vez de se utilizar o valor da distância propriamente dito (Figura 5a).

Exemplo da geração de um Vcd:

Tomando-se a coordenada base *(3,1) teremos a distância* ***Dd*** *=10.* O conjunto de todas as coordenadas do ***Vcd*** desta distância será:

Pela regra 1: (x,y), adiciona-se o par *(3,1)* ao ***Vcd,***

Pela regra 2: 3≠1, além disso, y≠0 adicionando outro elemento, *(-3,1)* ao ***Vcd***:

Pela regra 3: 3≠1 determinando mais outros dois elementos *(1,3) e (1,-3) ao **Vcd***,

Pela regra 4 mais dois elementos irão compor o ***Vcd***: *(3,-1) e (-3,-1)*, pois 1≠0

E finalmente pela regra 5 serão adicionados em **Vcd**, os elementos *(-1,3) e (-3,1)*

Dessa forma o conjunto ***Vcd*** será composto por:

Vcd ={(3,1), (-3,1), (1,3), (1,-3), (3,-1), (-3,-1), (-1,3), (-3,1)}, *o* que confere com a matriz.

Dessa forma, a partir da coordenada base imediatamente são obtidas: a distância da referida coordenada, e todas as coordenadas que possuem a distância ***Dd***. Consequentemente, a construção da tabela das distâncias com a lista das respectivas coordenadas se limita a inserir a distância calculada,com a respectiva lista de coordenadas e indexar a tabela pela distância.

O algoritmo simplificado seria:

```
Lcoord: Xlist;
Ltab: Tlist;
For i:=0 to dim do
 For j:=i to dim do
  begin
  Dist:= sqr(i)+sqr(j);

 Lcoord.AppendCoord(i,j);
 If(i<>j ou j<>0) then
       Lcoord.AppendCoord(-i,j);
 If(x<>y) then
   begin
       Lcoord.AppendCoord(j,i);
       Lcoord.AppendCoord(j,-i);
   end;
 If(y<>0) then
   begin
       Lcoord.AppendCoord(x,-y);
       Lcoord.AppendCoord(-x,-y);
   end;

 If(y<>0 and y<>0) then
   begin
       Lcoord.AppendCoord(-y,x);
       Lcoord.AppendCoord(-x,-y);
   end;
 Ltab.Append(Dist,Lcoord);
  end;
Ltab.SortbyDist();
Ltab.AtualizaIndice();
```

3 – Resultados Experimentais

Os testes de tempo de geração do gabarito das distâncias euclidianas, foram feitos em um computador Pentium 4 1.5Ghz com 512Mb de RAM. Foi feito um teste comparativo com um algoritmo convencional e os resultados são apresentados na Tabela 1.

Como se pode observar, o algoritmo de simetria apresentou um bom desempenho em relação ao algoritmo convencional, sendo em média 17 vezes mais rápido, mesmo possuindo a mesma complexidade que o algoritmo convencional - $O(n^2)$. Esta melhora no desempenho atribui-se à redução do número de interações obtida graças à observação e aproveitamento das características de simetria dos elementos

NxN	Algoritmo Simetria (ms)	Algoritmo Convencional (ms)
101	20	40
251	65	531
501	420	6.300
1001	5.988	184.460
1251	18.607	323.195
1501	41.640	717.862
1751	80.526	1.356.871
2000	139.721	2.343.650

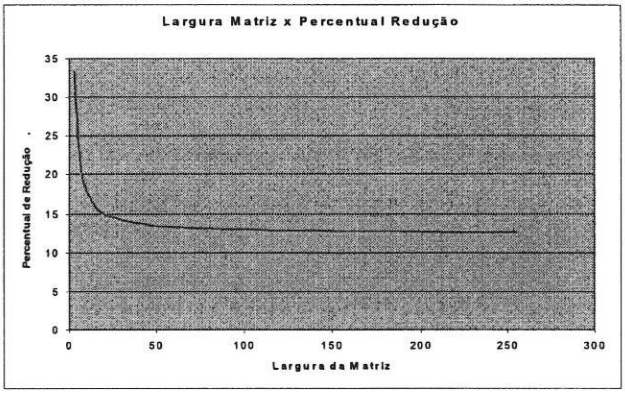
Tabela 1

4- Conclusão

A partir das propriedades de simetria, utilizadas para a construção de uma circunferência, foi possível identificar as propriedades de simetria de uma matriz distância, que por sua vez, possibilitou:

- identificar e quantificar o número de distâncias bases, sendo que a quantidade de distâncias necessárias a serem geradas cai, no pior caso, para 33% (matriz 3x3) do montante original, taxa essa que tende a cair rapidamente para 12,5% a medida que a largura da matriz aumenta; e
- gerar, a partir da coordenada base de uma dada distância, todas as demais coordenadas onde essa distância pode ser encontrada na matriz.

Assim, o algoritmo apresentado tornou a geração do gabarito da transformada da distância euclidiana exata, 17x mais rápida, em relação ao algoritmo convencional devido: a sensível redução das distâncias a serem calculadas e ordenadas e à diminuição do esforço de agrupamento das coordenadas de mesma distância (devido à diminuição de geração de distâncias repetidas). Este aumento de desempenho permite que uma gama um pouco maior de gabaritos, sejam definidos e gerados em tempo de execução de um programa.



5- Bibliografia

(Wright,1997) Wright, A. S., Acton, S. T. ,"Watershed Pyramids for Edge Detection", IEEE, 1997, p 578-581. http://

(Baxes,1994) Baxes, G. A. ,"Digital Image Processing Principles and Applications", John Wiley & Sons Inc., USA, 1994, p 137-139.

(Chassery,1991a) Chassey, J.M., Annick, M., "Géometrie Discrète in analyses d'images", Hermes, Paris, 1991, p 152-153.

(Chassery,1991b) Chassey, J.M., Annick, M., "Géometrie Discrète in analyses d'images", Hermes, Paris, 1991, p 230-231.

(Costa,2000) COSTA L. da F. - Robust Skeletonization through Exact Euclidean Distance Transform and its Application to Neuromorphometry Real-Time Imaging, v. 6, pp. 415-431. 2000.

(Costa, 2002) Costa, L. da F., Bianchi, A. G. C., "A dimensão da dimensão Fractal", Ciência Hoje,vol 31, nº 183, Junho 2002, p 40-47.

(Costa, 2000b) COSTA L. da F. - Robust Skeletonization through Exact Euclidean Distance Transform and its Application to Neuromorphometry **Real-Time Imaging**, v. 6, pp. 415-431. 2000.

(Dougherty,1992a) Dougherty, E. R., "An Introduction to Morphological Image Processing", SPIE

Oprtical Engeneering Press, 1992, p 42-48.

(Dougherty,1992b) Dougherty, E. R., "An Introduction to Morphological Image Processing", SPIE

Optical Engineering Press, 1992, p 48-56.

(Foley,1992) Foley, J.D.; van Dam, A.; Ferner, S. K.; Hugher, J; "Computer Graphics Principles and Practice"; Addison Wesley Publishing Company, 2th Edition, 1992, p 82.

(O'Gorman,1995) O'Gorman, L. K., Kasturi, R., "Document Image Analysis", IEEE Computer Society Press, 1995

(Serra, 1997) Serra, C. P., Karas, E. W., "Fractais Gerados por Sistemas Dinâmicos Complexos", Champagnot, Curitiba, 1997, p-14-17.

(Souza Cruz, 200) Souza Cruz, T. G. "Leis de Escala e Dimensão Fractal em Filmes Finos: Microscopia de Força Atômica e Voltametria Cíclica" ; *Revista Physicae* 1, 200, p29-36.

(Serra,2000) Serra, J. "Course of Math Morphology" , Ecole des Mines de Paris, 2000, Cap IX, pp 12-13, http://cmm.ensmp.fr/~serra/cours/pdf/en/ch9en.pdf

(Tricot, 1995) Tricot, C. Curves and Fractal Dimension. New York: Springer-Verlag. 1995

(Zelinsky,1992) Zelinsky, A. "A Mobile Robot Navigation Exploration Algorithm". IEEE Transactions of Robotics and Automation (8) 6, 707-717, 1992.