

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2569

**Técnicas de Estimativa de Dimensão Fractal Aplicadas em
Imagens Digitais**

**André Ricardo Backes
Odemir Martinez Bruno**

Nº 247

RELATÓRIOS TÉCNICOS



**São Carlos – SP
Jan./2005**

SYSNO	<u>R416207</u>
DATA	<u> / / </u>
ICMC - SBAB	

Técnicas de estimativa de dimensão fractal aplicadas em imagens digitais

André Ricardo Backes

Odemir Martinez Bruno

Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Departamento de Computação e Estatística

13560-670, São Carlos, SP, Brasil.

email: {backes, bruno}@icmc.usp.br

Índice:

1. Introdução.....	3
2. Fundamentos da Estimativa da Dimensão Fractal	4
3. Métodos Para Estimativa da Dimensão Fractal	5
3.1. Massa Raio.....	5
3.2. Análise intersecção Acumulativa	7
3.3. BoxCounting	10
3.4. Dividers (Compass).....	13
3.5. Espectro de Potência.....	14
3.6. Bouligand-Minkowski.....	15
3.7. Variações do BoxCounting	17
4. Comparação dos Métodos	18
5. Considerações Finais	23
6. Bibliografia.....	23

1. Introdução

O senso comum leva a considerar que os diversos objetos da natureza podem ter uma, duas, ou três dimensões, e ainda se o tempo for considerado, uma quarta dimensão. Deste modo são considerados apenas números inteiros para estimar as dimensões. A dimensão fractal, ao contrário do que sucede na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro. Com efeito, ela pode ser um número fracionário. A dimensão fractal representa o grau de ocupação de uma forma fractal no espaço, sendo diretamente relacionado com o seu grau de irregularidade. Dito de outra forma, a dimensão de um fractal é um número que caracteriza o nível de irregularidade que uma determinada estrutura apresenta (FALCONER, 1990) (TRICOT, 1995).

A dimensão fractal vem sendo aplicada de diversas formas nas mais variadas áreas da ciência, indo de ciências de materiais (PFEIR, 1984) à microeletrônica (SPANOS & IRENE, 1994). Temos diversas contribuições da dimensão fractal em técnicas de reconhecimento de padrões e visão computacional (BRUNO & COSTA, 2004) (PENTLAND, 1984) (HARTLEY et al, 1984) (CHAUDHURI and SARKAR, 1995), bem como em técnicas usadas para quantificar a complexidade, textura e composição geométrica de uma forma (COELHO & COSTA, 1995).

Fractais são primitivas geométricas auto-similares em escala e irregulares encontradas na natureza. Trata-se de objetos que tanto em níveis maiores quanto menores de escala são formados por um conjunto de primitivas euclidianas (Figural). É por esse motivo que a análise fractal tem sido preferida em aplicações onde se lida com objetos naturais. A dimensão fractal pode ser usada com uma medida da complexidade ou irregularidade de uma curva, superfície ou objeto, sendo de grande utilidade em diferentes aplicações.

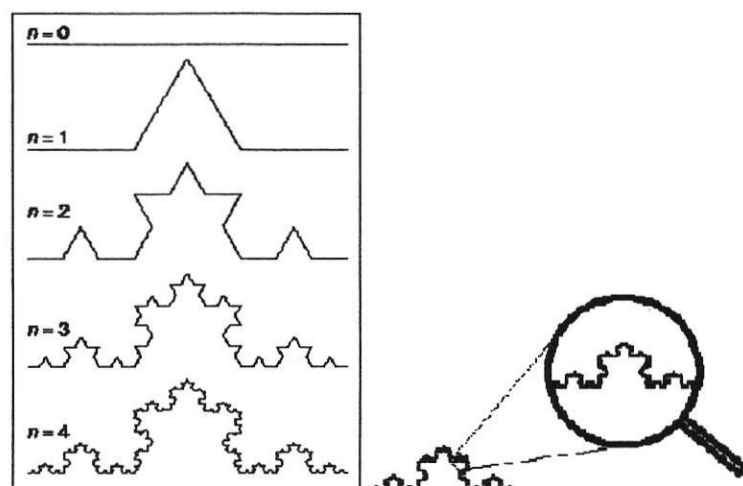


Figura 1: Exemplo de um fractal.

No entanto, uma imagem não é um fractal e nem apresenta auto-semelhança em diferentes níveis de escala. Neste caso, a técnica para o cálculo da dimensão fractal é adaptada de modo que o resultado seja uma estimativa do nível de complexidade que uma dada imagem apresenta (CARLIN, 2000). Neste relatório é apresentada uma síntese dos diversos métodos para calcular a dimensão fractal encontrada na literatura, no que se refere a processamento de imagem, bem como uma análise comparativa sobre os mesmos no que se refere à sua utilização e precisão.

2. Fundamentos da Estimativa da Dimensão Fractal

Considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento u , de modo que $L > u$. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até cobri-la completamente, encontra-se um valor $N = L / u$, que nada mais é do que uma medida da linha.

Análogo ao que foi realizado com a linha pode-se medir um quadrado de lado L sobrepondo a ele pequenos quadrados de lado u , obtendo-se novamente a relação $N = L / u$.

De forma mais generalizada, esse processo leva a uma relação do tipo $N = (L / u)^d$ ou, se extraído o logaritmo de ambos os lados, $d = \ln(N) / \ln(L / u)$, onde d é a dimensão fractal ou dimensão de Hausdorff do objeto analisado. Para um objeto uniforme e compacto, d é um inteiro igual à dimensão topológica. Mas, para um fractal, tem-se que d é um número fracionário (FALCONER, 1990) (TRICOT, 1995) (SHROEDER, 1996).

3. Métodos Para Estimativa da Dimensão Fractal

Diversos métodos para calcular a dimensão fractal podem ser encontrados na literatura. Nesta seção, serão discutidos e analisados alguns dos métodos mais relevantes relacionados à análise de imagens digitais.

3.1. *Massa Raio*

O método de cálculo de Massa-Raio consiste de sobrepor círculos sobre uma forma e contar a quantidade de pontos dessa forma presentes dentro do interior do círculo (Figura 2).

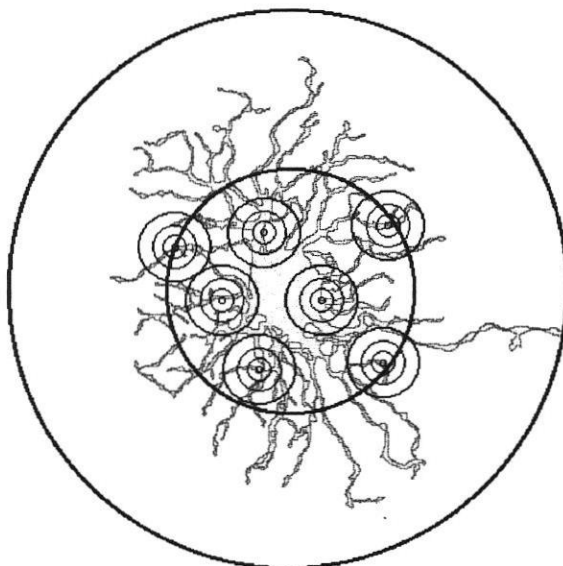


Figura 2: Sobreposição dos círculos pelo método Massa-Raio.

Sendo $A, C_r \in R^2$ a forma analisada e o círculo de raio r , $M_r(A)$ é o número de pontos de A presentes em C_r , obedecendo a relação

$$C_r \subset A$$

$$M_r(A) = \mu r^D \text{ para } r > 0$$

Obtém-se então a dimensão fractal a partir da relação acima como sendo:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(M_r(A))}{\ln(r)}$$

onde D é a dimensão fractal pelo método de Massa-Raio.

Para calcular esse método, um ou mais círculos podem ser utilizados. No caso de se utilizar apenas um círculo, é interessante escolher o centro do círculo como sendo o centro de massa da forma analisada. O centro de massa C_{xy} pode ser calculado como sendo:

$$Area = \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n A(x, y)$$

$$c_x = \frac{1}{Area} \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n x \quad c_y = \frac{1}{Area} \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n y$$

Já no caso de se utilizar vários círculos, um mecanismo de sorteio pode ser utilizado para se escolher os diferentes centros dos círculos. Deve-se também considerar a massa média calculada nesse caso.

Outro detalhe desse método se refere ao raio máximo que será utilizado na expansão dos círculos. Apesar desse valor poder ser definido por usuário, é comum utilizar o raio de giro da imagem. Este raio de giro é definido como

$$r_{\max} = \max(\sqrt{(c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2}), \text{ onde } p_{xy} \in A$$

Os raios r utilizados no método variam então entre $1 \leq r \leq r_{\max}$, sendo a cada nova iteração o raio incrementado em 1 e o cálculo da massa realizado novamente. (CORNFORTH, JELINEK, PEICHL, 2002).

Traçando o gráfico de log-log entre $M_r(A)$, massa acumulada para um raio r , e r , raio do círculo usado, obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = \alpha$ é Dimensão Fractal de A (Figura 3) (FALCONER, 1990) (MANDELBROT, 2000).

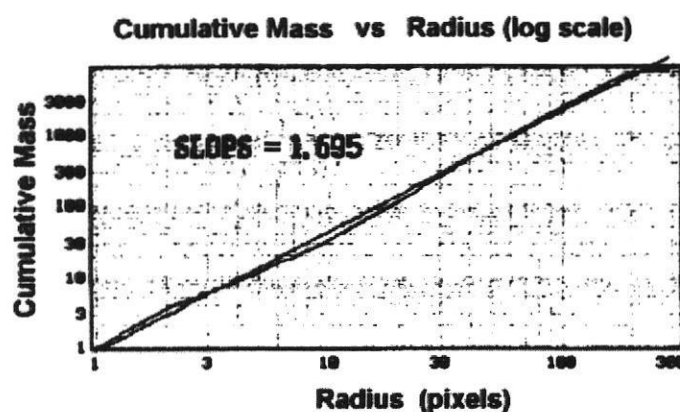


Figura 3: Gráfico Log – Log da variação da massa acumulada em relação ao raio. Para fractais matemáticos estritamente auto-semelhantes a dimensão da Massa é a mesma da dimensão de Hausdorff (SCHROEDER, 1996) (HONDA, DOMON & SASAKI, 1991) (LANDINI & RIPPIN, 1993).

3.2. Análise intersecção Acumulativa

O método da intersecção acumulativa foi desenvolvido por Schierwagen (SCHIERWAGEN, 1990), baseado no trabalho de Sholl (SHOLL, 1953). Trata-se de um método similar ao método Massa-Raio, no entanto, ao invés de calcular a massa de uma região esse método calcula o número de intersecções ou subdivisões existentes nessa região (Figura 4) (CORNFORTH, JELINEK, PEICHL, 2002).

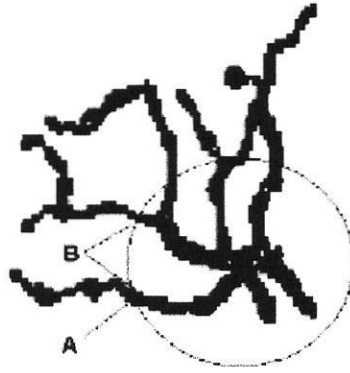


Figura 4: Uma pequena seção de uma imagem é mostrada, com um simples círculo correspondendo ao raio selecionado em um algum ponto durante a análise. Pontos consecutivos que também são adjacente são mostrados por A, enquanto que pontos que não são adjacentes são mostrados por B.

Sendo $A, C_r \in R^2$ a forma analisada e o perímetro de um círculo de raio r , $M_r(A)$ é o número de pontos de A presentes em C_r , obedecendo a relação:

$$C_r \subset A$$

$$M_r(A) = \mu r^D \text{ para } r > 0$$

Obtém-se a dimensão fractal a partir da relação acima como sendo

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(M_r(A))}{\ln(r)}$$

onde D é a dimensão fractal pelo método de Massa-Raio.

Para calcular esse método, um ou mais círculos podem ser utilizados. No caso de se utilizar apenas um círculo, é interessante escolher o centro do círculo como sendo o centro de massa da forma analisada. O centro de massa C_{xy} pode ser calculado como sendo

$$Area = \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n A(x, y)$$

$$c_x = \frac{1}{Area} \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n x \quad c_y = \frac{1}{Area} \sum_{x=0}^m \sum_{y=0}^n y$$

Já no caso de se utilizar vários círculos, um mecanismo de sorteio pode ser utilizado para se escolher os diferentes centros dos círculos. Deve-se também considerar o número de intersecções médias calculada nesse caso.

Depois de sobreposto este círculo de raio r sobre a forma, são colocados em um vetor todos os pontos de sua borda que também pertençam a forma, ordenados pelo ângulo que fazem a partir do centro do círculo (Figura 5). Feito isso, basta atravessar o vetor verificando a adjacência de pontos consecutivos, contando onde essa adjacência não é satisfeita devido à intersecção (CORNFORTH, JELINEK, PEICHL, 2002).

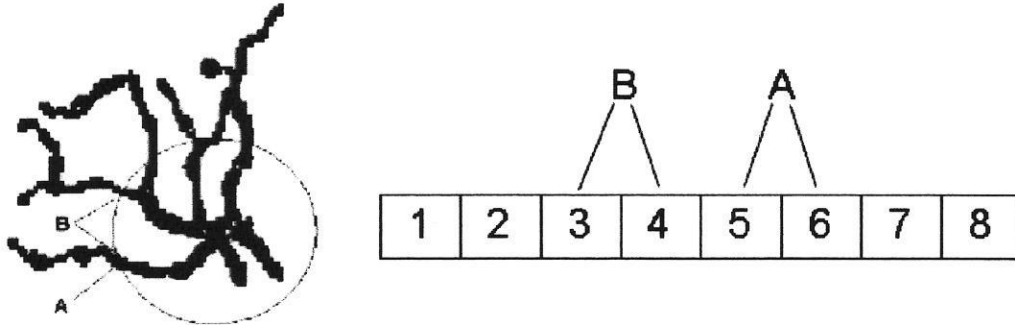


Figura 5: Exemplos da verificação das intersecções no vetor.

Outro detalhe desse método se refere ao raio máximo que será utilizado na expansão dos círculos. Apesar desse valor poder ser definido por usuário, é comum utilizar o raio de giro da imagem. Este raio de giro é definido como:

$$r_{\max} = \max(\sqrt{((c_x - p_x)^2 + (c_y - p_y)^2)}), \text{ onde } p_{xy} \in A$$

Os raios r utilizados no método variam então entre $1 \leq r \leq r_{\max}$, sendo a cada nova iteração o raio incrementado em 1 e o cálculo do total de intersecções realizado novamente. (CORNFORTH, JELINEK, PEICHL, 2002).

Traçando o gráfico de log-log entre $M_r(A)$, número de intersecções para um raio r , e r , raio do círculo usado, obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = \alpha$ é Dimensão Fractal de A (Figura 6) (FALCONER, 1990) (MANDELBROT, 2000).

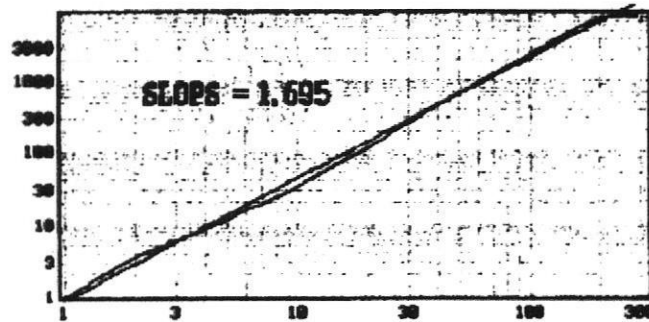


Figura 6: Gráfico Log – Log da variação do número de intersecções em relação ao raio

3.3. BoxCounting

O BoxCounting é um dos métodos mais conhecidos e utilizados para estimar a dimensão fractal de uma forma ou imagem. Isso se deve a sua simplicidade e facilidade de implementação. Este método consiste em sobrepor à imagem uma malha de quadrados e contar o número de quadrados necessários para cobrir toda a forma (Figura 6) (COELHO & COSTA, 1995).

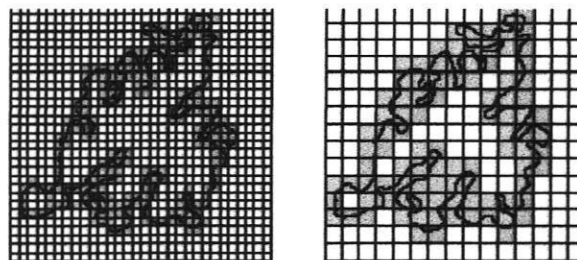


Figura 6: Divisão de uma imagem pelo Método do BoxCounting

Sendo $A \in R^2$ a forma analisada, $N_r(A)$ é o número de caixas de lado r necessárias para cobrir A , obedecendo a relação

$$N_r(A) = \mu r^{-D}$$

A dimensão fractal pode então ser obtida a partir da relação acima, de modo que

$$D = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(N_r(A))}{\ln(r)}$$

onde D é a dimensão fractal calculada pelo método do BoxCounting.

Para a execução desse método é necessário definir um conjunto B de tamanhos de lados r a ser utilizado nas diversas iterações do método. Apesar de B poder ser definido inicialmente por um usuário, é padrão calculá-lo com base nas dimensões da imagem, de modo que:

$$\forall r_i \in B \quad \begin{cases} r_0 = \max(\text{altura}, \text{largura}) \\ r_{i+1} = r_i / 2 \end{cases}$$

Traçando-se um gráfico log-log de $N_r(A)$ (número de caixas ocupadas) por r (tamanho do lado dessa caixa) obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α . Deste modo, é possível definir $D = -\alpha$ como Dimensão Fractal de A (Figura 7) (TRICOT, 1995) (FALCONER, 1990).

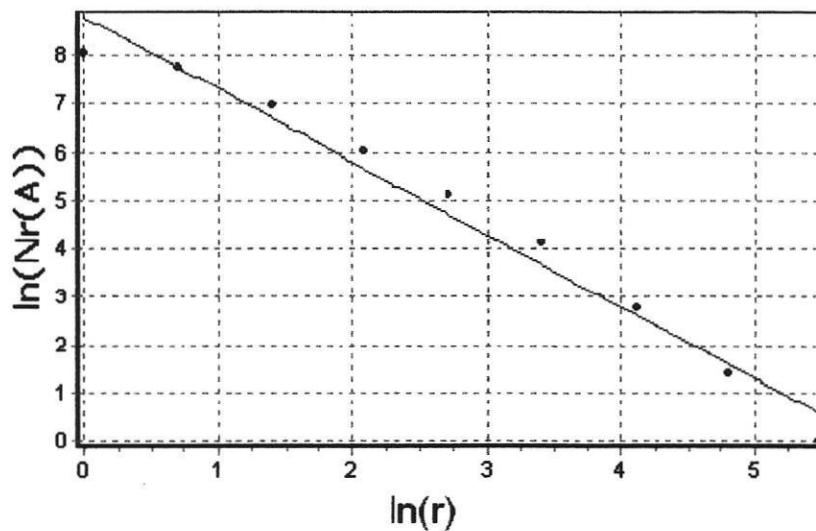


Figura 7: Cálculo do coeficiente angular no boxCounting

Por se tratar de um método bastante simples, o BoxCounting permite a inserção de refinamentos em sua técnica. Um deles seria introduzir uma distinção entre células parcialmente ocupadas e completamente ocupadas. Isto permite calcular várias dimensões fractais, calculando o logaritmo da combinação de células: completamente ocupadas, completamente não-ocupadas, parcialmente ocupadas (MORENCY & CHAPLEAU, 2003). Por ser um método simples, o BoxCounting é muito sensível a variações. Variações como qualidade da imagem influenciam no seu cálculo. Outro problema que esse método apresenta se refere à disposição e orientação da malha sobre a imagem (Figura 8) e ao tamanho das caixas escolhidas. Todas essas pequenas variações podem levar o método a calcular valores errôneos, diferentes de resultados esperados (MORENCY & CHAPLEAU, 2003).

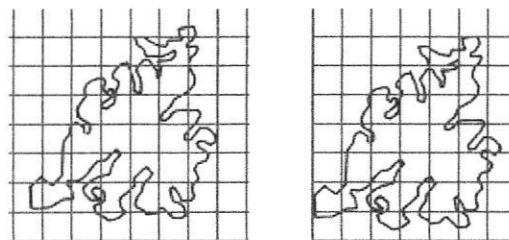


Figura 8: Variação na disposição do Grid.

3.4. Dividers (Compass)

O método dividers (STOYAN and STOYAN, 1994), também conhecido como Compass (MANDELBROT, 2000), é um dos métodos mais simples para estimar a dimensão fractal de objetos e curvas que possuam um contorno definido (membrana de célula, linha costeira...). Trata-se de um método exato apenas para curvas auto-semelhantes (TAKAYASU, 1990) (NORMANT and TRICOT, 1991) (TRICOT, 1995).

Ele é baseado no fato do perímetro de um fractal ser proporcional ao tamanho de uma régua r usada para medir o seu contorno (Figura 9).

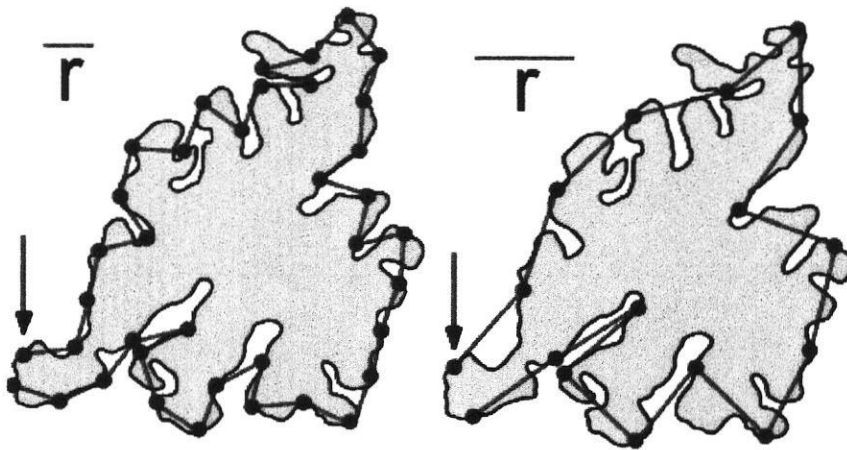


Figura 9: Medição para valores distintos de r

Sendo $A \in R^2$ a forma analisada, temos que P é o perímetro de A , dado por:

$$P \subset A$$

Movendo-se uma régua de tamanho r ao longo do perímetro P , obtém-se o comprimento $l(r)$ do perímetro, obedecendo a relação

$$l(r) = c.r^{1-D}$$

A dimensão fractal do perímetro pode ser calculada então com sendo:

$$D = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(l(r))}{\ln(r)}$$

Traçando o gráfico log-log de $l(r)$ (comprimento do perímetro para uma régua r) por r (tamanho da régua) obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = 1 - \alpha$ é Dimensão Fractal de P (MANDELBROT, 2000)

Um dos problemas que este método apresenta é o fato do valor calculado variar dependendo do ponto de início da curva. Para isso, é recomendado que o processo seja repetido para diversos pontos de início na curva (SUGIHARA and MAY 1990). Em alguns casos, o gráfico log-log não possui uma inclinação constante (a dimensão fractal não é constante), podendo ser um reflexo da resolução limitada dos dados analisados (HAMILTON et al. 1992; KENKEL and WALKER 1993; GAUTESTAD and MYSTERUD, 1994).

3.5. Espectro de Potência

Esse método baseia-se a partir das coordenadas do pixel (x,y) de uma imagem discreta $N \times M$, onde $x = 0,1 \dots N$ e $y = 0,1 \dots M$, sendo $h(x,y)$ a coordenada z de cada pixel (x,y) , a qual definimos com uma função altura definida no domínio espacial.

A Transformada de Fourier bidimensional (BRIGHAM, 1988) é dada pela seguinte equação:

$$F(u, v) = \frac{1}{NM} \sum_{y=0}^M \sum_{x=0}^N h(x, y) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{ux}{N} + \frac{yv}{M} \right) \right]$$

O valor da amplitude no domínio da frequência, $|F(u,v)|$, quando elevado ao quadrado é conhecido como Espectro de Potencia do perfil ou sinal original. A função P (ou seja, a função de densidade espectral do sinal) é obtida por:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2$$

e sendo k o comprimento de onda no espaço recíproco, temos então

$$k^2 = u^2 + v^2$$

que conseqüentemente fornece a seguinte relação:

$$P(k) = |F(k)|^2$$

Visto que o perfil de uma superfície fractal pela definição inclui informações em quase todas as frequências, parece ser difícil aplicar esse método, mas de fato, a relação é muito simples de ser realizada. O método de estimação fractal por espectro de potência apresenta uma variação “aparentemente” linear (considerando apenas um determinado intervalo), entre o log da amplitude ao quadrado e o log da frequência. O coeficiente angular α da reta interpolada no determinado intervalo linear do gráfico é relacionado com a equação de dimensão fractal D_{PSD} , conforme a seguinte relação (PEITGEN, 1988) (DUMAS, 1993) (VALTEL, 1993)

$$D_{PSD} = 4 + \left(\frac{\log P(k)}{2 \log(1/k)} \right) \Leftrightarrow D_{PSD} = 4 + \frac{\alpha}{2}$$

Este método fornece uma das mais diretas técnicas para análise de perfis de superfícies fractais e que pode ser aplicado em imagens auto-afins e auto-similares (PINTO, 2001).

3.6. Bouligand-Minkowski

O método de Bouligand-Minkowski ou Dimensão de Minkowski é um dos métodos que produz os resultados mais acurados e consistentes para a dimensão fractal (TRICOT, 1995). Isso ocorre por se tratar de um método mais sensível as diferentes mudanças estruturais da forma em análise.

Este método se baseia no estudo da área de influência, criada pela dilatação da forma em questão, por um disco de raio r (Figura 10). Pequenas alterações na forma geram alterações na área de influência calculada (TRICOT, 1995) (SHROEDER, 1996).



Figura 10: Dilatação de uma curva com um disco

Sendo $A \in R^2$ a forma analisada, definimos a dilatação de A , A_r , como o conjunto de pontos em R^2 que se encontram a uma distância A menor igual a r :

$$A_r = \{x \in R^2 \mid \exists y \in A : |x - y| \leq r\}$$

Essa Dilatação pode também ser definida como:

$$A_r = \bigcup_{x \in A} B_r(x)$$

sendo $B_r(x)$ um disco de raio r .

Para obter a Dimensão de Minkowski, um disco de raio r é varrido continuamente ao longo dos pixels do contorno (ou de interesse) da imagem, sendo que os centros dos discos correspondem às coordenadas de cada um dos pixels. Os pixels limitados pelo círculo são então somados, fornecendo a área dilatada $A(r)$ da imagem, para um raio r (SERRA, 1982). A área dilatada, $A(r)$, e o raio, r , obedecem a seguinte relação:

$$A(r) = \mu r^{2-D}$$

A dimensão fractal pode então ser obtida a partir da relação acima, de modo que

$$D = 2 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(A(r))}{\ln(r)}$$

onde D é a dimensão fractal calculada pelo método de Minkowski.

Traçando-se um gráfico log-log de $A(r)$ (área de influência para um raio r) por r (tamanho do raio de influência), obtém-se a aproximação de uma reta com coeficiente angular α , onde $D = 2 - \alpha$ é Dimensão Fractal de A pelo método de Minkowski.

Para otimizar o algoritmo de cálculo da área de influência utiliza-se a Transformada Exata da Distância (TED), que atribui aos pixels de uma imagem binária a distância

mínima entre estes pixels e os pixels de fundo. Para o cálculo da TED utiliza-se a Distância Euclidiana, devido a sua propriedade de invariância a rotação (BRUNO & COSTA, 2004).

Dados dois pontos $p, q \in R^2$, a distância euclidiana pode ser definida como:

$$d(p, q) = |q - p| = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}$$

Tem-se então que a TED é um conjunto de distancias Euclidianas únicas, ordenadas e crescentes, que servem de base para as dilatações sucessivas do disco no contorno da imagem (BRUNO & COSTA, 2004).

3.7. Variações do BoxCounting

A literatura fornece uma variedade de diferentes técnicas para se estimar a dimensão fractal de uma imagem ou objeto. No entanto, vale lembrar que muitas dessas técnicas possuem aplicações limitadas devido ao fato de serem muito específicas, não sendo de grande importância no contexto geral (FALCONER, 1990).

Muitas das técnicas encontradas na literatura são na verdade variações de métodos populares, como por exemplo, o BoxCounting. Ao invés de se dividir uma imagem com uma grade de quadrados de lado L e contar o número de quadrados que cubra a imagem (Figura 11a), pode-se cobrir a imagem com quadrados de lado L de forma a obter-se o número mínimo de quadrados (Figura 11b). Outra variação seria cobrir a imagem com círculos de raio L e contá-las, não sendo necessário que essas bolas estejam disjuntas (Figura 11c) (FALCONER, 1990).

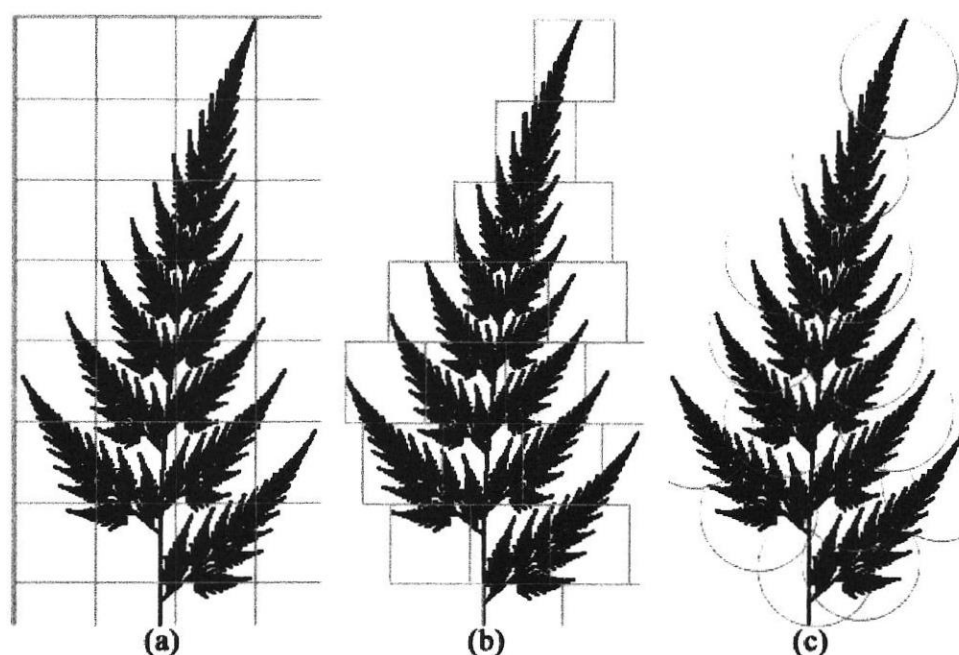


Figura 11: variações na implementação do BoxCounting

4. Comparação dos Métodos

Pode-se observar que os diversos métodos descritos acima são todos baseados em relações entre uma medida realizada e sua distribuição espacial. No entanto, enquanto alguns destes métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de estrutura, outros métodos sofrem de certas restrições quanto a sua utilização.

Métodos baseados na medida do comprimento podem ser aplicados apenas a curvas (como membranas celulares, linhas costeiras e limites de terrenos) uma vez que leva em consideração apenas o contorno que descreve o objeto (Figura 12). O método Dividers é um claro exemplo de método baseado no comprimento de curva. Por esse motivo, objetos com contornos semelhantes, mas com diferentes formas interna (como por exemplo, uma área interna não preenchida) são calculados de forma idêntica.



Figura 12: Método Dividers não leva em consideração a informação interna do objeto. A dimensão Fractal calculada é a mesma para os dois objetos.

Também o método baseado na análise de intersecções acumulativa possui restrições quanto a sua aplicação. Como seu próprio nome diz, sua análise está baseada na descontinuidade e reentrâncias que a estrutura possui, não fazendo sentido aplicá-lo a uma curva ou a uma estrutura continua, sem reentrâncias. No entanto, esse método pode ser muito bem aplicado ao esqueleto da estrutura (Figura 13). O Esqueleto de uma estrutura pode ser compreendido como a forma de representar imagens através da extração de suas características pelo processo de afinamento, resultando os pixels essenciais para composição de segmentos lineares com comprimento, tamanho e direção (SERRA, 1982).

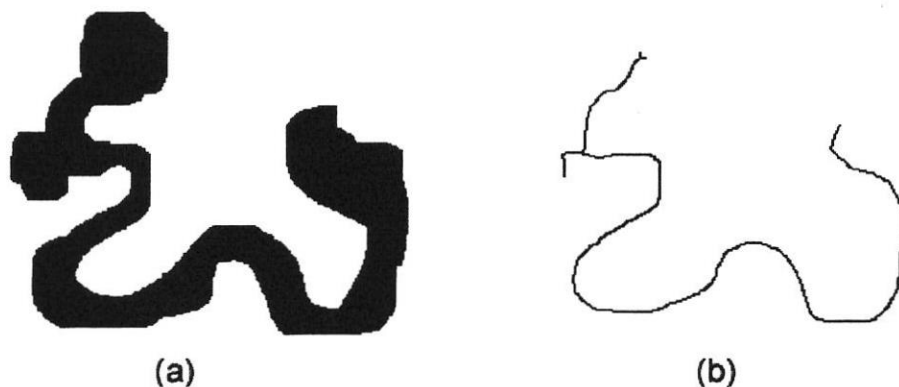


Figura 13: (a) Imagem Original; (b) Esqueleto da Imagem Obtido por Afinamentos Sucessivos.

De maneira inversa ao método Dividers, o método Massa-Raio tem a restrição de não ser eficaz quanto temos em mãos apenas o contorno de determinada estrutura. Isso

ocorre porque tendo apenas o contorno de um objeto, não temos nenhuma informação com relação à massa interna do mesmo (Figura 14). Para a utilização do método de Massa-Raio é necessário que a estrutura esteja preenchida.



Figura 14: O Método de Massa-Raio necessita da informação interna do objeto para o cálculo. Apenas o contorno é insuficiente.

Apesar dos métodos descritos possuírem certas restrições quanto a sua utilização, métodos como BoxCounting e Minkowski não apresentam restrições quanto a sua utilização.

Outro fator que deve ser considerado nos métodos descritos neste relatório é que a maioria deles pode apresentar certas variações de resultado para uma mesma estrutura medida. Isso se deve ao fato de que vários desses métodos possuem pontos e/ou ajustes iniciais escolhidos para a realização do cálculo. Esse fator de aleatoriedade adiciona ao método uma pequena variação em cada execução, o que pode induzir a um certo erro de cálculo da dimensão fractal. Este tipo de problema é comum no método boxcounting.

No método Dividers, a variação da estimativa ocorre devido ao cálculo do comprimento da curva começar a partir de um certo ponto escolhido. Se em uma segunda execução outro ponto for escolhido como ponto inicial para o cálculo do comprimento da curva, um resultado diferente do anterior poderá ser encontrado (Figura 15). Uma maneira de diminuir esse erro é calcular o comprimento da curva para vários pontos iniciais distintos e calcular o comprimento médio da curva. A partir dessa média do comprimento da curva é que será calculada a dimensão fractal da mesma.

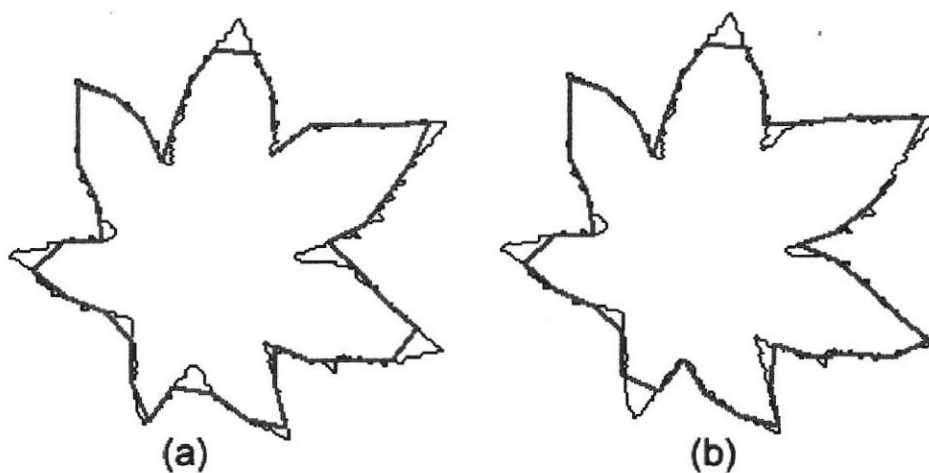


Figura 15: (a) e (b) são execuções do Dividers para um mesmo tamanho de régua, mas pontos iniciais distintos.

Já no método BoxCounting, a inconsistência ocorre devido posicionamento do grid sobre a imagem. Dependendo de como o grid é posicionado sobre a imagem o número de caixas contadas pode variar, provocando variações no resultado de uma execução para outra (Figura 16). No entanto tais variações podem ser reduzidas alinhando o início do grid com o início da figura a ser analisada, minimizando a porção da imagem delimitada exclusivamente ao plano de fundo.

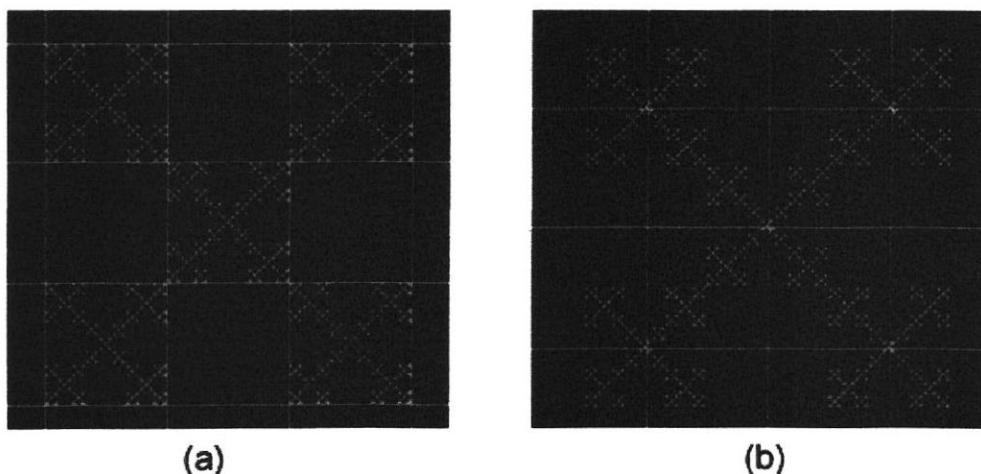
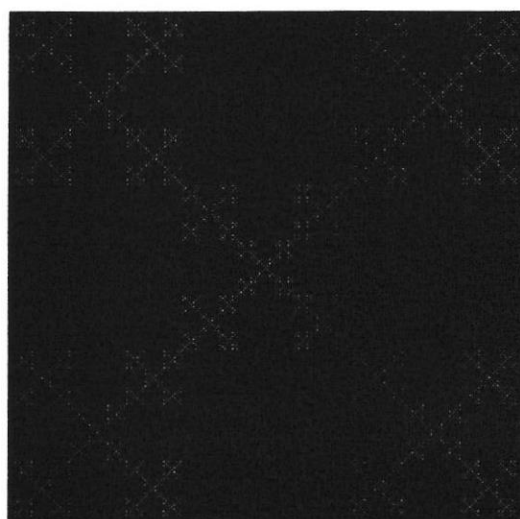


Figura 16: (a) Grid alinhado ao início da imagem minimiza a contagem. (b) Grid sem alinhamento

Ainda, outro problema encontrado no BoxCounting é em relação ao número e ao tamanho de caixas utilizados pelo algoritmo nas iterações do método. Isso se deve ao fato do tamanho da caixa influenciar diretamente no total de caixas necessárias para cobrir a imagem. Pode ser observado que uma mesma imagem, apresenta resultados diferentes de dimensão fractal para conjuntos diferentes de caixas (Figura 17). Esta variabilidade da dimensão fractal quanto ao conjunto de caixas pode ser minimizada usando-se sempre um mesmo conjunto de caixas ou a partir de uma regra que calcule os valores das caixas a partir do tamanho da imagem. Alguns autores consideram uma boa estratégia começar com uma caixa suficientemente grande, de modo que preencha toda imagem e, a cada iteração, diminuir o tamanho da caixa pela metade até ter uma caixa de tamanho um.



Caixas Usadas:
3,9,27,81

DF: 1,4649735

Caixas Usadas:
1,2,4,8,15,30,61,122,243

DF: 1,4997350

Figura 17: Conjuntos diferentes de caixas geram valores diferentes para a Dimensão Fractal

Os métodos de Massa_Raio e de Intersecções Acumulativas apresentam problemas similares ao do método Dividers. Ambos os métodos dependem de pontos escolhidos como centro dos círculos usados no cálculo. Uma vez que as escolhas podem ser empíricas, provocam variações de resultado de uma execução para outra. Observe que isto ocorre apenas quando são utilizados vários círculos para o cálculo. O algoritmo apresenta versões que utilizam apenas um círculo, que pode apresentar como centro, o centro de massa da imagem, e reduzir a inconsistência. Assim como no método Dividers, uma saída para

minimizar estes erros seria trabalhar com a média de varias execuções para o cálculo da dimensão fractal.

O método de Bouligand-Minkowski apresenta resultados mais consistentes, uma vez que não necessita de ajustes iniciais. Confirmando a afirmação de Tricot (TRICOT, 1995) de que este é o método mais preciso e consistente para a estimativa da dimensão fractal.

5. Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo mostrar alguns dos principais métodos existentes na literatura atual para cálculo da Dimensão Fractal, bem como ressaltar as principais características de cada método. Foi observado que os parâmetros iniciais dos algoritmos acabam gerando inconsistências na estimativa da dimensão fractal. Entre os métodos apresentados o algoritmo mais eficiente e menos sujeito a variações e inconsistências foi o Bouligand-Minkowski.

6. Bibliografia

(BRIGHAM, 1988) Brigham, E. O. The Fast Fourier Transform, 2º Ed. New Jersey, Prentice Hall

(BRUNO & COSTA, 2004) BRUNO, O. M., COSTA, Luciano da Fontoura

A parallel implementation of exact euclidean distance transform based on exact dilations. Microprocessors And Microsystems. , v.28, n.3, p.107 - 113, 2004.

(CARLIN, 2000) Carlin, M. Measuring the complexity of non-fractal shapes by a fractal method. Pattern Recognition Letters 21 p.1013-1017, 2000.

(CESAR & COSTA, 2000) CESAR, R. M. Jr, COSTA, L. F., Shape Analysis and Classification: Theory and Practice. Hardcover, 2000

(CHAUDHURI & SARKAR, 1995) Chaudhuri, B.B., Sarkar, N., 1995. Texture segmentation using fractal dimension. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 17, 72-77.

- (COELHO & COSTA, 1995) COELHO, R. C. & COSTA, L. da F. - "The Box-Counting Fractal". Dimension: Does it Provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So, How to Use It?", *Anais do Sibgrapi*'95: p. 183-191, 1995.
- (CORNFORTH, JELINEK, PEICHL, 2002) David Cornforth, Herbert Jelinek, and Leo Peichl, *Fractop: a tool for automated biological image classification*, 6th Australasia-Japan Joint Workshop, 2002
- (DUMAS, 1993) Dumas, P.; Bouffakhreddine, B.; Amra, C.; Valtel, O.; André, E.; Galindo, R.; Salvan, F. Quantitative Microroughness Analysis down to the Nanoeter scale. *Europsychics Letters*, 22(9), p. 717-722. 1993
- (FALCONER, 1990) FALCONER, K.J. *Fractal Geometry: mathematical and applications*. New York, John wiley, 1990
- (GAUTESTTAD and MYSTERUD, 1994) Gautestad, A.O. and I. Mysterud. 1994. Fractal analysis of population ranges: methodological problems and challenges. *Oikos* 69: 154-157.
- (HAMILTON et al. 1992) Hamilton, S.K., J.M. Melack, M.F. Goodchild and W.M. Lewis, 1992. Estimation of the fractal dimension of terrain from lake size distributions. In: P.A. Carling and G.E. Petts (eds.). *Lowland floodplain rivers: geomorphological perspectives*. pp. 145-163. J. Wiley and Sons, New York.
- (HARTLEY et al, 1984) Hartley, R., Peleg, S., Naor, J., Avnir, D., 1984. Multiple resolution texture analysis and classification. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 6, 518-523.
- (HONDA, DOMON & SASAKI, 1991) Honda E., Domon M., Sasaki T.: A Method for Determination of Fractal Dimension of Sialographic Images, *Investigative Radiology*, October 1991, Vol.26
- (KENKEL and WALKER, 1993) Kenkel, N.C. and D.J. Walker. 1993. *Fractals and ecology*. *Abst. Bot.* 17: 53-70.
- (LANDINI & RIPPIN, 1993) Landini G, Rippin JW. Fractal dimensions of the epithelial-connective tissue interfaces in premalignant and malignant epithelial lesions of the floor of the mouth. *Analytical and Quantitative Cytology and Histology*, 15(2), 144-149, 1993.
- (MANDELBROT, 2000) Mandelbrot, Benoit B., "The Fractal Geometry of Nature" – 19th Edition, W.H. Freeman & Company, 2000.

- (MORENCY & CHAPLEAU, 2003) C. Morency, R. Chapleau/ HarFA - Harmonic and Fractal Image Analysis (2003), pp. 30 – 34
- (NORMANT and TRICOT, 1991) Normant, F. and C. Tricot. 1991(eds.). Methods for evaluating the fractal dimension of curves using convex hulls. *Phys. Rev. A* 43: 6518-6525.
- (PEITGEN,1988) Peitgen, H. O.; Saupe, D. *The Science of Fractal Images*. New York, Springer-Verlag, 1988.
- (PENTLAND, 1984) Pentland, A.P., 1984. Fractal based description of natural scenes. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 6, 661–674.
- (PFEIR, 1984) Pfeir, P., 1984. *Appl. Surf. Sci.* 18, 146.
- (PINTO, 2001) Pinto, S.C.D. *Estimação da Dimensão Fractal de Imagens de SPM*, Usp, São Carlos – SP, 2001
- (SCHIERWAGEN, 1990) Schierwagen, A. "Scale-invariant diffusive growth: a dissipative principle relating neuronal form to function". In J. Maynard-Smith and G. Vida, editors, *Organisational constraints on the dynamics of evolution*, pp. 167-189, Manchester University Press.
- (SERRA, 1982) SERRA, J. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. London: Academic Press, v.1. 1982. 600 p.
- (SHOLL, 1953) Sholl, D. Dendritic organization in the neurons of the visual cortices of the cat. *Journal of Anatomy*, 87:387-406, 1953.
- (SHROEDER, 1996) SHROEDER, M. *Fractals, Chaos, Power Laws – Minutes from an infinite Paradise*. New York, W. H. Freeman and Company, 1996.
- (SPANOS & IRENE, 1994) Spanos, L., Irene, E.A., 1994. Investigation of the roughened silicon surfaces using fractal analysis, Part I: Two dimensional variation method. *J. Vac. ci. Technol. A* 12, 2646–2652.
- (STOYAN and STOYAN, 1994) Stoyan, D., Stoyan, H., 1994. Methods for the empirical determination of fractal dimension. In: Stoyan, D., Stoyan, H. (Eds.), *Fractals, Random Shapes and Point Fields*. Wiley, New York, pp. 39±45.
- (SUGIHARA and MAY 1990) Sugihara, G. and R.M. May. 1990. Applications of fractals in ecology. *Trends Ecol. Evol.* 5: 79-86.
- (TAKAYASU, 1990) H. Takayasu, "Fractals in the Physical Sciences", (Manchester University Press, Manchester and New York, 1990).

(TRICOT, 1995) TRICOT, C. Curves and Fractal Dimension. New York: Springer-Verlag. 1995.

(VALTEL,1993) Valtel, O.; Dumas, P.; Chollet, F.; Salvan, F.; André, E. Roughness Assessment of Polysilicon Usig Power Spectral Density. Jpn. J. Appl. Phys. 32(12A). p.5671-5674. 1993.