

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2569

**Estimação e Análise de Robustez na Abordagem
Bayesiana de Modelos AR(p): Estudo de Caso em
Previsão de Vazão**

**Marinho G. Andrade
Guilherme de A. Barreto**

Nº 97

RELATÓRIOS TÉCNICOS DO ICMC

São Carlos
Nov./1999

SYSNO	1053341
DATA	/ /
ICMC - SBAB	

Estimação e Análise de Robustez na Abordagem Bayesiana de Modelos $AR(p)$: Estudo de Caso em Previsão de Vazão

Marinho G. Andrade

Inst. de Ciências Matemáticas e de Computação
C.P. 668, 13560-970, São Carlos – SP
marinho@icmc.sc.usp.br

Guilherme de A. Barreto

Departamento de Engenharia Elétrica/EESC
C.P. 359, 13560-970, São Carlos – SP
gbarreto@sel.eesc.sc.usp.br

Resumo

Neste trabalho é descrito uma seqüência de procedimentos para estimar parâmetros, selecionar ordem e avaliar a robustez dos estimadores de modelos auto-regressivos de ordem p , $AR(p)$, por meio de inferência bayesiana e simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC). Três alternativas são consideradas para a densidade a priori dos parâmetros do modelo. Para o primeiro caso, adota-se uma densidade a priori não-informativa. Para o segundo, adota-se uma densidade conjugada normal-gama, e para o terceiro, uma densidade informativa resultante do produto de uma a priori t -Student, p -dimensional, com uma densidade gama. Diferentemente do primeiro e segundo caso, a densidade a posteriori para a priori t -Student não possui forma padrão, não sendo possível a amostragem direta. Neste caso a análise a posteriori é efetuada por meio de algoritmos de simulação MCMC. Avalia-se também a previsão de novos valores da série e a influência do parâmetro de localização da densidade a priori na estimativa bayesiana dos parâmetros. Essa última análise mostra que, de um modo geral, o uso da densidade a priori t -Student implica em estimativas mais robustas que aquelas resultantes da normal-gama. Conclui-se que o uso de simulação MCMC torna o processo de inferência bayesiana mais poderoso e flexível, podendo ser facilmente estendido para problemas de dimensão/ordem maior, sem dificuldade adicional.

Palavras-chaves: Inferência bayesiana, Markov Chain Monte Carlo, seleção de modelo, diagnóstico de convergência, previsão, robustez.

Abstract

In this work it is described a number of procedures that allows to estimate parameters, select the order, and assess the robustness of the estimators for autoregressive models of order p , $AR(p)$, by means of Bayesian inference and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation. Three alternatives for the prior density of the parameters are considered. In the first case, a non-informative prior is used. In the second case, it is used a normal-gamma conjugate prior, and for the third case, it is adopted a informative prior obtained from the product of a p -dimensional t -Student density with a gamma density. Unlike the first and second case, the posterior density for the third case is not in a standard form, which difficults direct sampling. In this case, the posterior analysis is carried out through MCMC methods. It is also evaluated the prediction of new values for the times series under study, and the influence of prior location parameter on the bayesian estimates of the parameters. It is shown that the use of a t -Student prior density implies in more robust estimates than those from normal-gama prior. We can affirm that MCMC simulation makes the bayesian inference a more flexible and powerful tool, being easily extended to higher dimension problems.

Keywords: Bayesian inference, Markov Chain Monte Carlo, model selection, convergence diagnostics, prediction, robustness.

1. Introdução

Uma abordagem de muito interesse na análise de séries temporais é a bayesiana. Este trabalho aplica técnicas bayesianas para ajustar modelos auto-regressivos de ordem p , $AR(p)$. Em geral, esta abordagem considera o uso de densidades de probabilidade para representar informações a priori sobre os parâmetros do modelo. O objetivo desse trabalho é utilizar a abordagem bayesiana e técnicas de simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC) para estimar parâmetros, selecionar modelos, fazer previsões e avaliar a influência do parâmetro de localização das densidades a priori na estimativa a posteriori dos parâmetros dos modelos $AR(p)$. Esse tipo de influência foi estudada por Choy & Smith (1997) em modelos lineares e resultados explícitos podem ser obtidos somente em casos de regressão simples (Rodrigues & Baba, 1994), ou quando adota-se o modelo conjugado normal-gama (Broemeling & Land, 1984). Em casos mais gerais como fazemos aqui, a influência dos parâmetros de localização das densidades a priori só pode ser avaliada usando técnicas de simulação MCMC. Além disso, apresentamos critérios de seleção de modelos baseados na densidade preditiva ordenada (Oliveira, 1998) e no fator de Bayes, observando como tais critérios podem ser utilizados na análise de modelos de séries temporais.

Três alternativas para as densidades a priori dos parâmetros do modelo serão estudadas. Primeiro, adota-se uma densidade não-informativa. Em seguida, usa-se uma priori conjugada normal-gama. Neste caso, o estimador bayesiano para os parâmetros podem ser calculados explicitamente (Broemeling & Land, 1984). Mostra-se adiante que o estimador bayesiano é uma média ponderada entre o estimador de máxima verossimilhança e o valor esperado da priori. Isto permite mostrar que a relação entre o parâmetro de localização da priori e a estimativa de máxima verossimilhança influencia de maneira linear o estimador bayesiano dos parâmetros. Na terceira alternativa, utiliza-se uma priori informativa t -Student, p -dimensional, para os parâmetros ϕ 's e uma densidade a priori gama para o inverso da variância dos resíduos $\tau = 1/\sigma_a^2$. Esta escolha resulta em uma densidade a posteriori não-padrão, a qual só permite uma análise a posteriori por meio de simulação de algoritmos de Monte Carlo em Cadeia de Markov (MCMC). Aqui serão adotados os algoritmos Amostrador de Gibbs (Casella & George, 1992) e Metropolis-Hastings (Chib & Greenberg, 1995).

Os resultados desse trabalho mostram as vantagens e flexibilização do processo de inferência bayesiana pelo uso de técnicas de simulação MCMC, principalmente no que diz respeito à seleção de modelos, previsão e análise de robustez para os estimadores. Os resultados provêm da análise de quatro séries temporais, duas simuladas e duas provenientes de medidas reais referentes a vazões médias mensais de rios.

2. Modelos Auto-regressivos - $AR(p)$

Considera-se um processo $\{Z_t, t \in N_+\}$. Assim, um modelo linear auto-regressivo de ordem p , $AR(p)$, é aquele cujo o valor corrente do processo Z_t é expresso como uma combinação linear de seus p valores passados $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$ e de um ruído branco a_t . Considera-se que o ruído $\{a_t, t \in N_+\}$ é um processo i.i.d. $N(0, \sigma^2)$. Um modelo $AR(p)$ pode, então, ser escrito da seguinte forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

O problema da escolha de um modelo $AR(p)$ adequado a uma determinada série temporal divide-se em várias etapas: identificação e seleção da ordem do modelo, estimação dos parâmetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ e τ , e predição e análise de robustez. Neste trabalho, estas etapas serão implementadas por técnicas bayesianas e para efeito de comparação as estimativas são calculadas por simulação MCMC e explicitamente quando isto for possível.

3. Análise Bayesiana do Modelo $AR(p)$

A análise bayesiana de modelos $AR(p)$ começa através da escolha de uma função densidade de probabilidade a priori para os parâmetros $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ e τ . Notando que a função de verossimilhança aproximada, assumindo as p -primeiras observações Z_p , é dada por:

$$L(\phi, \tau | Z) \propto \tau^{\frac{N-p}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\phi - \hat{\phi})' X' X (\phi - \hat{\phi}) + (Z - \hat{Z})' (Z - \hat{Z})] \right\} \quad (3.1)$$

em que $\hat{\phi} = (X' X)^{-1} X' Z$ é a estimativa de máxima verossimilhança condicionada às p -primeiras observações (Box & Jenkins, 1976) e $\hat{Z} = X \hat{\phi}$. Percebe-se que $L(\phi, \tau | Z)$ tem a forma de uma densidade normal-gama. Portanto, uma primeira sugestão de densidade a priori é a conjugada normal-gama.

3.1 Priori Não-Informativa

Quando se tem pouco ou nenhum conhecimento prévio a cerca da distribuição dos parâmetros de um modelo, em geral, adota-se a densidade a priori de não-informativa de Jeffreys (Box & Tiao, 1973). Assim, supondo $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$ e τ independentes, tem-se que a densidade conjunta a priori pode ser dada por:

$$\Pi_0(\phi, \tau) \propto 1/\tau, \quad \tau > 0 \quad (3.2)$$

Combinando-se a função de verossimilhança (3.1) com a priori (3.2), chega-se a seguinte densidade a posteriori:

$$\Pi(\phi, \tau | Z) \propto \tau^{\frac{(N-p)-1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\phi - \hat{\phi})' X' X (\phi - \hat{\phi}) + (Z - \hat{Z})' (Z - \hat{Z})] \right\} \quad (3.3)$$

Neste caso em particular, é possível determinar analiticamente as densidades marginais e condicionais para os parâmetros ϕ e τ , integrando diretamente a Equação (3.3). As densidades marginais serão úteis para determinar o valor teórico pontual do estimador e sua variância, enquanto que as densidades condicionais serão úteis na simulação MCMC. Procedendo desta forma, as seguintes densidades marginais são obtidas (Oliveira, 1998):

$$\Pi(\tau | Z) = \text{gama} \left(\frac{N-2p}{2}, (Z - \hat{Z})' (Z - \hat{Z}) / 2 \right) \quad (3.4)$$

$$\Pi(\phi|Z) = t\text{-Student}(N-2p, \hat{\phi}, (N-2p)(X'X)[(Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})]^{-1}) \quad (3.5)$$

As densidades condicionais, por sua vez, são dadas por (Oliveira, 1998):

$$\Pi(\tau|\phi, Z) \sim \text{Normal}(\hat{\phi}, (\tau W)^{-1}) \quad (3.6)$$

$$\Pi(\phi|\tau, Z) \sim \text{Gama}((N-p)/2, B) \quad (3.7)$$

onde $B = \frac{1}{2} [(\phi - \hat{\phi})'X'X(\phi - \hat{\phi}) + (Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})]$ e $W = (X'X)^{-1}$.

De posse da densidade marginal a posteriori dos parâmetros, os estimador bayesianos ϕ_b e τ_b são dados pelo valor esperado a posteriori de (3.4) e (3.5), ou seja, $\phi_b = E(\phi|Z)$ e $\tau_b = E(\tau|Z)$. Logo, tem-se:

$$E(\tau|Z) = \tau_b = (N-2p)[(Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})]^{-1}, \quad \text{Var}(\tau|Z) = 2(N-2p)[(Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})]^{-2}$$

$$E(\phi|Z) = \phi_b = (X'X)^{-1}X'Z, \quad \text{Var}(\phi|Z) = (X'X)^{-1}[(Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})]/(N-2p-2)$$

Percebe-se que, neste caso, quando se usa densidade a priori não-informativa, o estimador bayesiano coincide com o estimador de máxima verossimilhança.

3.2 Priori Conjugada Normal-Gama

Para se obter a densidade a posteriori dos parâmetros (ϕ, τ) é necessário a especificação uma densidade a priori. A forma da função de verossimilhança (3.1) sugere a utilização de uma densidade a priori conjugada Normal-Gamma. Desta forma, tem-se:

$$\Pi_0(\phi|\tau) = \Pi_1(\phi|\tau)\Pi_2(\tau) \quad (3.8)$$

onde:

$$\Pi_1(\phi|\tau) \propto \tau^{\frac{p}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\phi - \mu)'P(\phi - \mu)] \right\} \sim N(\mu, P^{-1})$$

$$\Pi_2(\tau) \propto \tau^{\alpha-1} \exp\{-\beta\tau\} \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

De tal forma que:

$$\Pi_0(\phi, \tau) \propto \tau^{\frac{p+2\alpha}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [2\beta + (\phi - \mu)'P(\phi - \mu)] \right\}$$

onde $\mu \in R^p$, $P \in R^{p \times p}$ e $\alpha, \beta \in R$.

Combinando-se a verossimilhança (3.1) com a densidade a priori (3.8) obtém-se a densidade a posteriori:

$$\Pi(\phi, \tau|Z) \propto \tau^{\frac{(N+2\alpha)}{2}-1} \exp \left\{ -\tau D - \frac{\tau}{2} (\phi - \phi_b)'V(\phi - \phi_b) \right\} \quad (3.9)$$

onde,

$$V = X'X + P$$

$$\phi_b = (X'X + P)^{-1}(X'Z + P\mu)$$

$$D = \beta + \frac{1}{2} \left[(Z'Z + \mu'P\mu) - (X'Z + P\mu)(X'X + P)^{-1}(X'Z + P\mu) \right]$$

O uso da priori conjugada normal-gama implica em uma densidade a posteriori também normal-gama. Assim, determina-se a densidade a posteriori de τ , integrando-se (3.9) com relação ao vetor de parâmetros ϕ . Procedendo dessa forma, obtém-se:

$$\Pi(\tau | Z) \propto \tau^{\frac{(N-p+2\alpha)-1}{2}} \exp\{-\tau D\} \int_{\phi} \tau^{\frac{p}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\phi - \phi_b)'V(\phi - \phi_b)\right\} d\phi$$

$$\Pi(\tau | Z) \propto \tau^{\frac{(N-p+2\alpha)-1}{2}} \exp\{-\tau D\}$$

onde \int_{ϕ} corresponde a p integrais $\int_{\phi_1} \dots \int_{\phi_p}$.

O valor esperado e a variância a posteriori de τ são, então, dados por:

$$E(\tau|Z) = (N - p + 2\alpha) \cdot (2D)^{-1} \quad (3.10)$$

$$Var(\tau|Z) = E(\tau|Z) (D)^{-1} \quad (3.11)$$

Lançando mão do mesmo procedimento, agora integrando em relação a τ , obtém-se a densidade marginal a posteriori para os parâmetros ϕ :

$$\Pi(\phi|Z) \propto \int_0^{\infty} \tau^{\frac{(N+2\alpha)-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\tau}{2}[(\phi - \phi_b)'V(\phi - \phi_b) + 2D]\right\} d\tau$$

$$\Pi(\phi|Z) \propto [(\phi - \phi_b)'V(\phi - \phi_b) + 2D]^{\frac{(N-2\alpha)}{2}} \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) pode ser rescrita, reagrupando termos, como:

$$\Pi(\phi|Z) \propto \left[1 + \frac{(\phi - \phi_b)'W(\phi - \phi_b)}{N - p + 2\alpha} \right]^{-\frac{(N-2\alpha)}{2}} \quad (3.13)$$

onde $W = (N - p + 2\alpha)V(2D)^{-1}$. Portanto, o vetor de parâmetros ϕ obedece uma distribuição a posteriori t -Student, p -dimensional, com $\nu = (N-p+2\alpha)$ graus de liberdade, vetor de localização ϕ_b e matriz de precisão W .

O vetor de parâmetros ϕ pode ser estimado tomando-se o valor esperado da densidade a posteriori (3.13), e a matriz de covariância dos parâmetros pode ser obtida diretamente da matriz de precisão W . Ou seja,

$$E(\phi|Z) = \phi_b = (X'X + P)^{-1}(X'Z + \mu P) \quad (3.14)$$

$$Var(\phi|Z) = \frac{\nu}{\nu - 2} W^{-1} = \frac{(X'X + P)^{-1}(2D)}{(N - p + 2\alpha - 2)} \quad (3.15)$$

A Equação (3.14) apresenta a estimativa bayesiana do vetor de parâmetros ϕ_b como uma média ponderada da estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\phi}$ e do parâmetro de localização, μ , da densidade a priori. Ou seja:

$$\phi_b = (X'X + P)^{-1}(X'Z + \mu P) = (X'X + P)^{-1}[(X'X)\hat{\phi} + \mu P] \quad (3.16)$$

A Equação (3.16) pode ter seus termos reagrupados de modo a ser rescrita como:

$$\phi_b = \hat{\phi} + (X'X + P)^{-1}P(\mu - \hat{\phi}) \quad (3.17)$$

Escrita dessa forma, conforme sugerido por Pericchi & Smith (1992), a Equação (3.17) pode ser usada para avaliar a influência do parâmetro de localização da priori no valor final da estimativa bayesiana ϕ_b . Como pode-se averiguar, a diferença $(\phi_b - \hat{\phi})$ é linearmente proporcional à diferença $(\mu - \hat{\phi})$. Esta propriedade será confirmada numericamente na seção de resultados através de simulações usando MCMC.

3.3 Priori Informativa *t*-Student para ϕ e Priori Gama para τ

Considera-se agora, para o vetor de parâmetros ϕ , uma densidade a priori *t*-Student, p -dimensional, com k graus de liberdade, vetor de localização μ e matriz de precisão P . Para o parâmetro τ , atribui-se uma densidade a priori gama com hiperparâmetros α e β . Desta forma, tem-se:

$$\Pi_0(\phi|\tau) = \Pi_1(\phi|\tau)\Pi_2(\tau) \quad (3.18)$$

onde

$$\Pi_1(\phi) \propto \left[1 + \frac{(\phi - \mu)'P(\phi - \mu)}{k} \right]^{-\frac{(k+p)}{2}} \quad (3.19)$$

$$\Pi_2(\tau) \propto \tau^{\alpha-1} \exp\{-\beta\tau\} \quad (3.20)$$

Os coeficientes ϕ podem ser considerados independentes com uma matriz de correlação dada por $\Sigma = kP^{-1}/(k-2)$. A priori $\Pi_0(\phi|\tau)$ resultante do produto de (3.14) e (3.15) será doravante chamada de priori *t*-gama. Assumindo-se independência entre ϕ e τ , a análise a posteriori é feita multiplicando-se a verossimilhança em (3.1) com as densidades a priori em (3.14) e (3.15):

$$\Pi(\phi, \tau|Z) \propto \tau^{\frac{N-p+2\alpha}{2}-1} \exp\left\{-\tau\left[\beta + \frac{B(\phi)}{2}\right]\right\} \Pi_1(\phi) \quad (3.21)$$

onde $B(\phi) = (\phi - \hat{\phi})'X'X(\phi - \hat{\phi}) + (Z - \hat{Z})'(Z - \hat{Z})$. Percebe-se que a densidade conjunta a posteriori não tem uma forma padrão. Portanto, a avaliação das densidades marginais a posteriori pode ser feita por meio de métodos de simulação estocástica do tipo Monte Carlo em Cadeia de Markov, usando algoritmos como o Amostrador de Gibbs (Casella & George, 1992) e Metropolis-Hastings (Chib & Greenberg, 1995). Além disso, não é

possível chegar a uma equação semelhante à (3.12) que estabelece a relação entre ϕ_b , $\hat{\phi}$ e μ , portanto esta relação será analisada também via simulação MCMC.

4. Critérios de Seleção de Modelos

Uma vez escolhido vários modelos e calculado seus parâmetros, o passo seguinte é escolher o modelo mais “parcimonioso”, ou seja, aquele que tem o menor número de parâmetros possível e menor variância dos resíduos. A seleção do modelo é de extrema importância pois a escolha de um valor “pequeno” demais para p pode levar a uma representação inadequada da série, enquanto que um valor “grande” pode levar a um grau de complexidade desnecessário.

Critérios AIC e BIC

Dentre os critérios mais utilizados para seleção de modelos estão o critério de informação de Akaike (AIC) e o critério de informação bayesiano de Schwarz (BIC). Estes critérios têm as seguintes formulações (Akaike, 1974; Schwarz, 1978):

$$AIC = \ln(\hat{\sigma}_a^2) + \frac{2M}{N} \quad (4.1)$$

$$BIC = \ln(\hat{\sigma}_a^2) + \frac{M \ln(N)}{N} \quad (4.2)$$

onde $M = p+1$ é o número de parâmetros e N é o tamanho da série em questão. Portanto, nota-se que as equações (11) e (12) quantificam o chamado “critério da parcimônia”. Escolhendo M e $\hat{\phi}$ para minimizar o AIC e o BIC, estamos obtendo um compromisso entre um ajuste acurado (pequeno $S(\hat{\phi})$ e conseqüentemente pequeno $\hat{\sigma}_a^2$) e parcimônia na parametrização (número adequado M de parâmetros).

Densidade Preditiva Ordenada

Outra possibilidade está no uso de critérios bayesianos para seleção de modelos via simulação MCMC (Gelfand & Dey, 1994; Carlin & Chib, 1995). Bastante comuns são aqueles baseados na densidade preditiva ordenada a posteriori (Chang, 1995; Oliveira, 1998). A densidade preditiva para Z_{N+k} dado $Z_{N+k-1} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N, \dots, Z_{N+k-1})'$ e os parâmetros ϕ e τ dada por:

$$c_k = \Pi(Z_{N+k} | Z_{N+k-1}) \propto \int_{\phi} \int_{\tau} \tau^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \left(Z_{N+k} - \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{N+k-i} \right)^2 \right\} \Pi(\phi, \tau | Z) d\phi d\tau \quad (4.3)$$

onde $\Pi(\phi, \tau | Z)$ é a densidade a posteriori para os parâmetros ϕ e τ .

A Equação (4.3) pode também ser calculada usando as observações $\phi_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, p$ e $\tau^{(j)}$ obtida por simulação MCMC. Neste caso, a densidade preditiva é estimada por $\hat{c}_k = \hat{\Pi}(Z_{N+k} | Z_{N+k-1})$:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tau^{(j)})^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\tau^{(j)}}{2} \left[Z_{N+k} - \sum_{i=1}^p \phi_i^{(j)} Z_{N+k-i} \right]^2 \right\} \quad (4.4)$$

Procede-se da seguinte forma: 1) Determina-se o gráfico de $\hat{c}_k(l) \times k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) para l diferentes modelos; 2) Calcula-se $\hat{c}(l) = \prod_{k=1}^n \hat{c}_k(l)$ para cada modelo l , e escolhe-se o modelo que produza o maior valor para $\hat{c}(l)$.

Fator de Bayes

Pode-se ainda determinar o modelo via fator de Bayes, definido como:

$$B_{ij} = \frac{\Pi(Z | M_i)}{\Pi(Z | M_j)} \quad (4.5)$$

onde $\Pi(Z|M_i)$ é a função de verossimilhança marginal para todo o conjunto de dados Z (Raftery, 1996), definida como:

$$\Pi(Z | M_p) = \int_{\phi} \int_{\tau} L(Z | \phi, \tau, M_p) \Pi(\phi, \tau | M_p) d\phi d\tau \quad (4.6)$$

onde M_p é o modelo AR(p) sendo analisado, $\Pi(\phi, \tau | M_p)$ é a densidade a priori e $L(Z | \phi, \tau, M_p)$ é a função de verossimilhança dada por (Box & Jenkins, 1976; Oliveira, 1998):

$$L(Z | \phi, \tau, M_p) \propto \tau^{\frac{N-p}{2}} \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} \sum_{t=p+1}^N (Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p})^2 \right\} \quad (4.7)$$

A verossimilhança marginal pode ser estimada, usando as amostras geradas por simulação MCMC, da seguinte maneira (Raftery, 1996):

$$\hat{\Pi}(Z | M_p) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m L(Z | \phi^{(j)}, \tau^{(j)}, M_p) \quad (4.8)$$

$$\hat{\Pi}(Z | M_p) = \left[\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{L(Z | \phi^{(j)}, \tau^{(j)}, M_p)} \right]^{-1} \quad (4.9)$$

De acordo com o critério do fator de Bayes, prefere-se o modelo M_j ao modelo M_i se:

$$\hat{B}_{ij} = \frac{\hat{\Pi}(Z | M_i)}{\hat{\Pi}(Z | M_j)} < 1 \quad (4.10)$$

5. Previsão k passos a frente

O ajuste de modelos AR(p) tem como um dos objetivos finais a predição de valores futuros para a série temporal em questão. Denota-se por Z_f os k valores da série a serem previstos e por Z_p as p últimas observações, isto é:

$$\begin{aligned} Z_f &= (Z_{(N+1)}, Z_{(N+2)}, \dots, Z_{(N+k)}) \\ Z_p &= (Z_{N-(p-1)}, Z_{N-(p-2)}, \dots, Z_N) \end{aligned}$$

Seja $\Pi(\phi, \tau|Z)$ a densidade conjunta a posteriori para os parâmetros de interesse ϕ e τ . A densidade preditiva pode ser calculada por:

$$\Pi(Z_f|Z) = \int_{\phi} \int_{\tau} \Pi(Z_f|\phi, \tau, Z_p) \Pi(\phi, \tau|Z_p) d\tau d\phi$$

onde \int_{ϕ} corresponde a p integrais $\int_{\phi_1} \dots \int_{\phi_p}$. A previsão dos valores futuros Z_f pode ser obtida através da resolução da seguinte integral múltipla:

$$E(Z_f|Z) = \int Z_f \Pi(Z_f|Z) dZ_f$$

$$E(Z_f|Z) = \int Z_f \left[\int_{\phi} \int_{\tau} \Pi(Z_f|\phi, \tau, Z_p) \Pi(\phi, \tau|Z_p) d\tau d\phi \right] dZ_f$$

Alterando a ordem das integrais tem-se:

$$E(Z_f|Z) = \int_{\phi} \int_{\tau} E(Z_f|\phi, \tau, Z_p) \Pi(\phi, \tau|Z_p) d\tau d\phi \quad (5.1)$$

Usando o modelo AR(p), tem-se:

$$Z_{N+k} = \phi_1 Z_{N+k-1} + \dots + \phi_p Z_{N-(p-k)} + a_{N+k}$$

Esta expressão na forma matricial fica:

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\phi_2 & -\phi_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi_{k-1} & -\phi_{k-2} & -\phi_{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}_{k \times k} \quad B(\phi) = \begin{pmatrix} -\phi_p & -\phi_{p-1} & -\phi_{p-2} & \dots & -\phi_1 \\ 0 & -\phi_p & 0 & \dots & -\phi_2 \\ 0 & 0 & -\phi_p & \dots & -\phi_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\phi_{k-3} & \dots & -\phi_k \end{pmatrix}_{k \times p}$$

Pode-se escrever, portanto:

$$A(\phi)Z_f + B(\phi)Z_p = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad Z_f = -A^{-1}(\phi)B(\phi)Z_p + A^{-1}(\phi)\mathbf{a}$$

em que \mathbf{a} é um vetor de variáveis aleatórias i.i.d, $N(0, \tau^{-1})$. Tem-se que Z_f também é um vetor de variáveis aleatórias que obedece a uma distribuição $N[E(Z_f|\phi, \tau, Z), \text{Var}(Z_f|\phi, \tau, Z)]$, tal que:

$$E(Z_f|\phi, \tau, Z) = -A^{-1}(\phi)B(\phi)Z_p \quad (5.2)$$

$$\text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z) = \tau^{-1} (A^{-1}(\phi)) (A^{-1}(\phi))' \quad (5.3)$$

Substituindo-se (5.2) em (5.1) pode-se calcular a previsão dos valores futuros Z_f resolvendo-se a seguinte integral:

$$E(Z_f | Z) = \int_{\phi} \int_{\tau} (-A^{-1}(\phi) B(\phi) Z_p) \Pi(\phi, \tau | Z_p) d\tau d\phi \quad (5.4)$$

A variância é calculada como:

$$\text{Var}(Z_f | Z) = E_{\phi, \tau} [\text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z)] + \text{Var}_{\phi, \tau} [E(Z_f | \phi, \tau, Z)] \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} E_{\phi, \tau} [\text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z)] &= \int_{\phi} \int_{\tau} \text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z) \Pi(\phi, \tau | Z) d\tau d\phi \\ &= \int_{\phi} \int_{\tau} [\tau^{-1} (A^{-1}(\phi)) (A^{-1}(\phi))'] \Pi(\phi, \tau | Z) d\tau d\phi \end{aligned} \quad (5.6)$$

Em geral, devido a complexidade das expressões (5.4) e (5.5) para $p \geq 2$, essas integrais só podem ser calculadas de forma aproximada. Uma alternativa bastante viável e que simplifica consideravelmente o tratamento do problema da predição consiste no uso de métodos de simulação de Monte Carlo.

5.1. Previsão usando MCMC

Retomando a Equação (5.4), afirma-se que o valor esperado $E(Z_f | Z)$ pode ser calculado usando algoritmos de simulação de Monte Carlo. Para isso, considera-se uma amostra $\phi^{(j)} = (\phi_1^{(j)}, \phi_2^{(j)}, \dots, \phi_p^{(j)})$, $j = 1, \dots, m$ gerada por simulação MCMC. Pode-se, portanto, calcular o estimador de Monte Carlo para $E(Z_f | Z)$ usando essa amostra através da seguinte expressão:

$$\hat{E}(Z_f | Z) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m -A^{-1}(\phi^{(j)}) B(\phi^{(j)}) Z_p \quad (5.7)$$

Tomando-se agora a expressão (5.5), dada por:

$$\text{Var}(Z_f | Z) = E_{\phi, \tau} [\text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z)] + \text{Var}_{\phi, \tau} [E(Z_f | \phi, \tau, Z)] \quad (5.8)$$

Pode-se escrever cada termo da Equação (5.8) usando a amostra gerada por simulação de Monte Carlo, ou seja:

$$\hat{E}_{\phi, \tau} [\text{Var}(Z_f | \phi, \tau, Z)] = \text{diag} \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\tau^{(j)})^{-1} [A^{-1}(\phi^{(j)})] [A^{-1}(\phi^{(j)})]' \right) \quad (5.9)$$

e, usando (5.7),

$$\begin{aligned} \hat{\text{Var}}_{\phi, \tau} [E(Z_f | \phi, \tau, Z)] &= E(Z_f^2 | \phi, \tau, Z) + [E(Z_f | \phi, \tau, Z)]^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(A^{-1}(\phi^{(j)}) B(\phi^{(j)}) Z_p \right)^2 + \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m A^{-1}(\phi^{(j)}) B(\phi^{(j)}) Z_p \right)^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde $E(Z_j|\phi^{(j)}, \tau^{(j)}, Z) = -A^{-1}(\phi^{(j)})B(\phi^{(j)})Z_j$, $j = 1, \dots, m$.

Assim, substituindo as Equações (5.9) e (5.10) na Equação (5.8), tem-se o estimador de Monte Carlo para $Var(Z_j|Z)$ obtido por simulação MCMC.

6. Algoritmos MCMC - Amostrador de Gibbs & Metropolis-Hastings

Nesta seção serão apresentados os procedimentos necessários à aplicação de simulação MCMC para a análise bayesiana apresentada na Seção 3.

Algoritmo do Amostrador de Gibbs

O amostrador de Gibbs (Gelfand & Smith, 1990; Casella & George, 1992) é basicamente um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo o núcleo de transição é formado pela densidade conjunta a posteriori. Para o modelo com priori informativa normal-gama, tem-se que a posteriori conjunta é dada por (3.3):

$$\Pi(\phi, \tau|Z) \propto \tau^{\frac{(N+2\alpha)}{2}-1} \exp \left\{ -\tau D - \frac{\tau}{2} (\phi - \phi_b)' V (\phi - \phi_b) \right\}$$

As densidades condicionais são facilmente obtidas devido à conjugação:

$$\Pi(\phi|\tau, Z) \sim N(\phi_b, (\tau V)^{-1}) \quad (6.1)$$

$$\Pi(\tau|\phi, Z) \sim \Gamma\left(\frac{N+2\alpha}{2}, D + \frac{1}{2}(\phi - \phi_b)' V (\phi - \phi_b)\right) \quad (6.2)$$

onde, $V = (X'X + P)$

$$D = \beta + \frac{1}{2}[(Z'Z + \mu' P \mu) - (X'Z + P\mu)'(X'X + P)^{-1}(X'Z + P\mu)]$$

As Equações (6.1) e (6.2) são usadas para gerar os valores dos parâmetros como segue:

Passo 1: Atribua valores iniciais aos parâmetros e inicie o contador de iterações $j = 0$.

$$\phi^{(0)} = (\phi_1^{(0)}, \dots, \phi_p^{(0)}) \text{ e } \tau^{(0)}$$

Passo 2: Obtenha um novo valor $\phi^{(j+1)}$ a partir da densidades condicional.

$$\phi^{(j+1)} \sim \Pi(\phi|\tau^{(j)}, Z)$$

Passo 3: Obtenha um novo valor $\tau^{(j+1)}$ a partir da densidade condicional.

$$\tau^{(j+1)} \sim \Pi(\tau|\phi^{(j+1)}, Z)$$

Passo 4: Verifique se houve convergência. Caso contrário, faça $j=j+1$ e repita passo 2.

Após um número suficientemente grande de iterações, as observações geradas $(\phi^{(j)}, \tau^{(j)})$ convergirão para uma amostra aleatória da densidade conjunta $\Pi(\phi, \tau | Z)$ a posteriori. Existem diversos métodos para diagnosticar a convergência (Cowles & Carlin, 1996; Brooks & Roberts, 1998). Na Seção 7 serão discutidos alguns aspectos relacionados à análise de convergência em simulação MCMC e os métodos usados neste trabalho.

Algoritmo do Metropolis-Hastings + Amostrador de Gibbs

Quando as distribuições condicionais não são facilmente identificadas, de forma tal que não podemos gerar amostras dessas distribuições diretamente, utiliza-se o algoritmo Metropolis-Hastings (Tierney, 1994; MacKay, 1997). Para este caso, a posteriori conjunta é dada por (3.15):

$$\Pi(\phi, \tau | Z) \propto \tau^{\frac{N-p+2\alpha}{2}-1} \exp \left\{ -\tau \left[\beta + \frac{B(\phi)}{2} \right] \right\} \Pi_1(\phi)$$

onde

$$B(\phi) = (\phi - \hat{\phi})' X' X (\phi - \hat{\phi}) + (Z - \hat{Z})' (Z - \hat{Z})$$

$$\Pi_1(\phi) \propto \left[1 + \frac{(\phi - \mu)' P (\phi - \mu)}{\kappa} \right]^{-\frac{(\kappa+p)}{2}}$$

As densidades condicionais a posteriori são dadas por:

$$\Pi(\phi | \tau, Z) \propto \exp \left\{ -\frac{\tau}{2} [(\phi - \hat{\phi})' (X' X) (\phi - \hat{\phi})] \right\} \Pi_1(\phi) = \Psi(\phi) \cdot \Pi_1(\phi) \quad (6.3)$$

$$\Pi(\tau | \phi, Z) \sim \Gamma \left(\frac{N-p+2\alpha}{2}, \beta + \frac{1}{2} B(\phi) \right) \quad (6.4)$$

Este algoritmo é implementado a seguir.

Passo 1: Atribua valores iniciais aos parâmetros e inicie o contador de iterações $j = 0$.

$$\phi^{(0)} = (\phi_1^{(0)}, \dots, \phi_p^{(0)}) \text{ e } \tau^{(0)}$$

Passo 2: Obtenha novos valores a partir da função de transição: $\phi^{(j+1)} \sim \Pi_1(\phi^{(j)})$

Passo 3: Calcule a probabilidade de aceitação do novo valor.

$$\alpha(\phi^{(j+1)}, \phi^{(j)}) = \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{\Psi(\phi^{(j+1)})}{\Psi(\phi^{(j)})} \right\}, & \text{se } \Psi(\phi^{(j)}) > 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Passo 4: Gere u de Uniforme[0,1] e faça $\phi^{(j+1)} = \phi^{(j)}$ se $u > \alpha(\phi^{(j+1)}, \phi^{(j)})$

Passo 5: Gerar $\tau^{(j+1)} \sim \Pi(\tau | \phi, Z)$ a partir da expressão (5.4).

Passo 6: Verifique se houve convergência. Caso contrário, faça $j=j+1$ e repita passos 2-6.

7. Procedimentos de Simulação e Diagnóstico de Convergência

Simulando uma longa cadeia ou várias mais curtas

Os partidários da simulação de uma cadeia apenas argumentam que uma única e longa cadeia simulada estará mais “próxima” da distribuição de equilíbrio visto que estimativas dos parâmetros por médias ergódicas são tanto melhores quanto maior for o tamanho da amostra. Além disso, a simulação de várias cadeias mais curtas resulta em desperdício pelo descarte das observações iniciais (Brooks, 1998). Por sua vez, os defensores da simulação de várias cadeias, advogam que este procedimento evita que uma parte significativa do espaço de parâmetros não seja explorado e que o descarte da parte inicial da cadeia protege contra estimativas viciadas devido a influência dos valores iniciais (Gelman et al, 1995). Neste trabalho, as duas possibilidades são testadas.

Atribuição de valores iniciais aos parâmetros

A atribuição de valores iniciais aos parâmetros para cada cadeia simulada é de fundamental importância para uma convergência adequada. Para simulação de uma cadeia sugere-se o uso de outros estimadores como, por exemplo, aqueles obtidos pelos métodos de Yule-Walker ou de máxima verossimilhança (Brooks, 1998). Para várias cadeias o ideal é atribuir valores iniciais bem dispersos de modo a cobrir o máximo possível do espaço de parâmetros. Gelman & Rubin (1992) propõem um simples algoritmo de detecção de moda para encontrar regiões de alta densidade e amostrar a partir de misturas de distribuições *t*-Student centradas nestas modas. Gelman et al (1995) sugerem o uso de simulação estocástica via *Importance Resampling* para obter estimativas iniciais. Pode-se também obter uma amostra inicial através do método *adaptive rejection sampling* (Gilks & Wild, 1992; Gilks & Best, 1995). Neste trabalho, os valores iniciais para ϕ e τ serão gerados a partir do método de Yule-Walker.

Descartando Parte Inicial das Cadeias (Burn-in)

Um ponto de fundamental importância em simulação MCMC após a verificação da convergência das cadeias é a maneira como as amostras são obtidas. Para cada caso simulado neste trabalho são simuladas 5 cadeias independentes, cada uma de tamanho 8000. As 4000 primeiras observações (*burn-in*) são desprezadas e das 4000 restantes, as observações são tomadas de 20 em 20, gerando-se uma amostra de tamanho 1000 no final. Este procedimento de obtenção de amostras, particularmente útil para o algoritmo Metropolis-Hastings, pois diminui a correlação entre valores repetidos devido a rejeição.

Diagnóstico de Convergência

Existem diversos métodos de diagnóstico de convergência em simulação MCMC (Cowles & Carlin, 1996; Gamerman, 1997; Brooks & Roberts, 1998, 1999). Há técnicas para avaliar o diagnóstico de uma cadeia apenas como, por exemplo, os métodos descritos em Heidelberger & Welch (1983), Geweke (1992) e em Raftery & Lewis (1992). Bastante populares são também os métodos que baseiam-se na simulação de várias cadeias como aqueles propostos por Gelman & Rubin (1992) & Brooks & Gelman (1998). Todos estes métodos serão usados neste trabalho para avaliar a convergência das cadeias geradas.

8. Estudo de Casos

Neste trabalho são consideradas duas séries geradas artificialmente e duas séries reais cujos dados são referentes às vazões médias mensais que chegaram ao reservatório de Furnas e Itumbiara, no período de Janeiro de 1960 a Dezembro de 1990. Uma descrição das três séries é apresentada na Tabela 1.

Tabela 1. Séries usadas para ajuste dos modelos

	Descrição	ϕ_1	ϕ_2	τ	N
Série 1	AR(1)	0,8	----	2	400
Série 2	AR(2)	0,5	0,3	2	400
Itumbiara	real	----	----	----	720
Furnas	real	----	----	----	720

As observações reais das medidas de vazão média são denotadas y_t . Assume-se para estas uma distribuição log-normal, ou seja, $y_t \sim \log\text{-}N(\mu_m, \sigma_m)$ onde $m = 1, 2, \dots, 12$, representa o número de meses, e μ_m e σ_m são as médias e desvios-padrão amostrais para cada mês do ano. Desta forma, tem-se que:

$$\log y_t \sim N(\mu_m, \sigma_m) \quad (8.1)$$

$$Z_t = \frac{\log y_t - \mu_m}{\sigma_m} \sim N(0,1) \quad (8.2)$$

Para as componentes Z_t em (8.2) ajusta-se um modelo AR(p): $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$. As Figuras 1 e 2 mostram as séries reais e seus respectivos histogramas antes e depois da transformação. As séries artificiais (geradas por computador) estão na Figura 3.

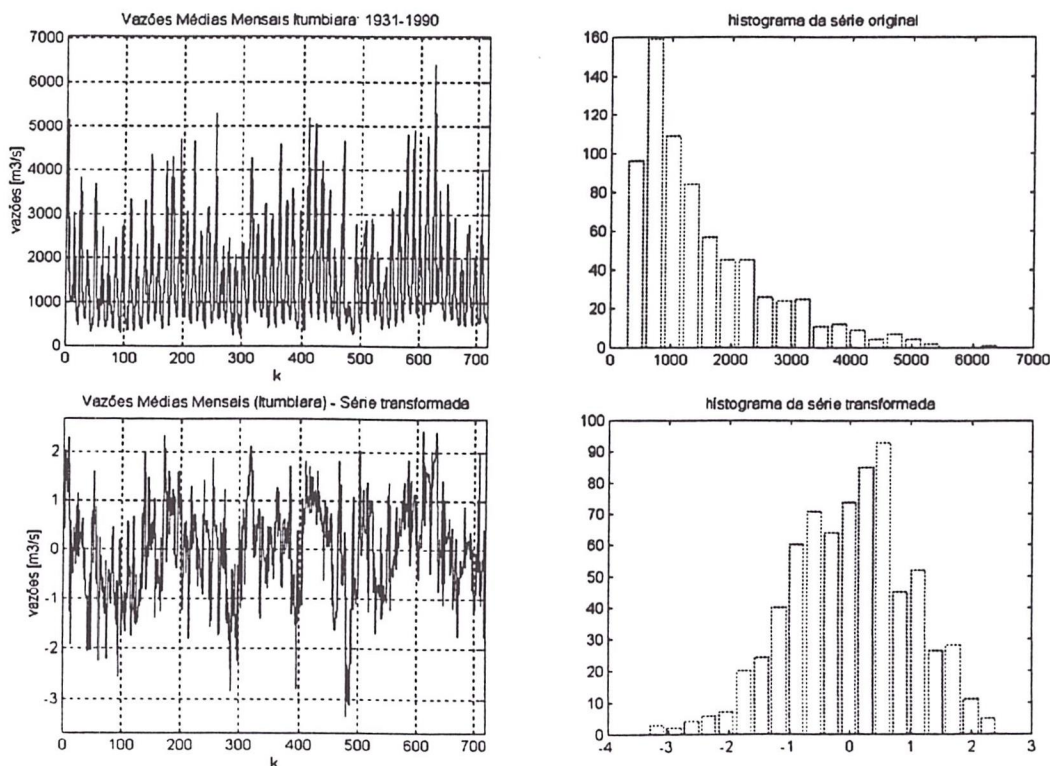


Figura 1. Série de vazões para a usina de Itumbiara

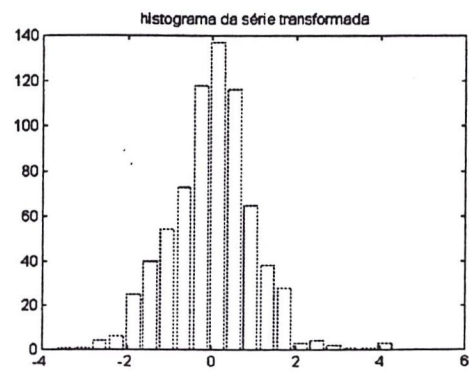
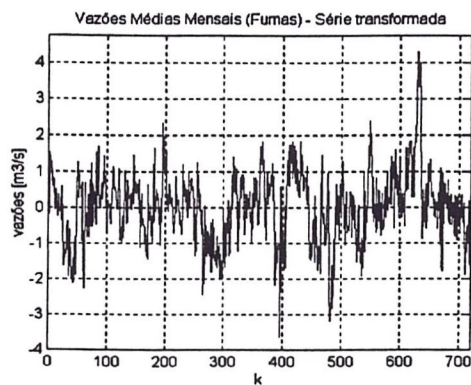
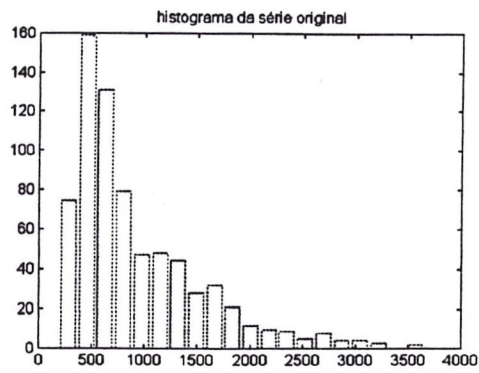
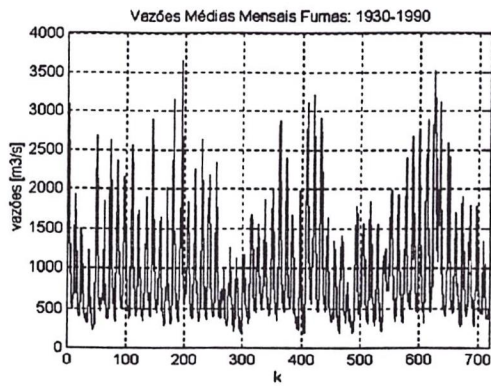


Figura 2. Série de vazões para a usina de Furnas

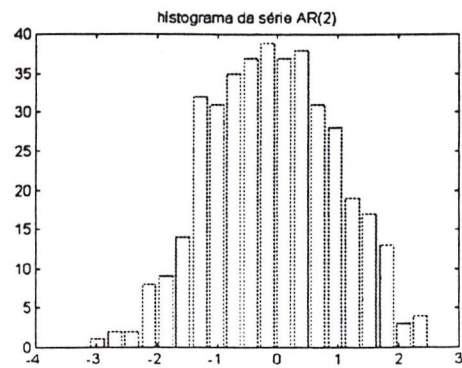
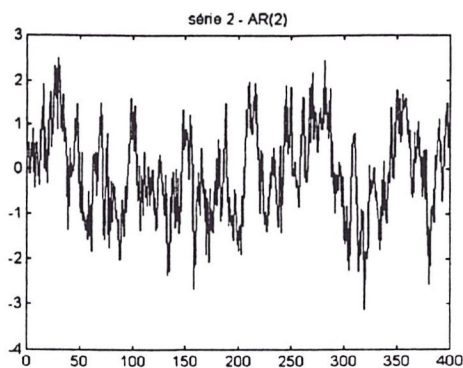
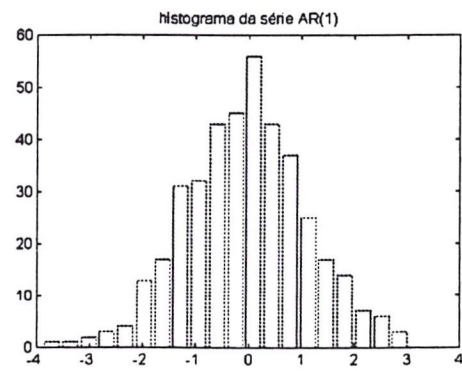
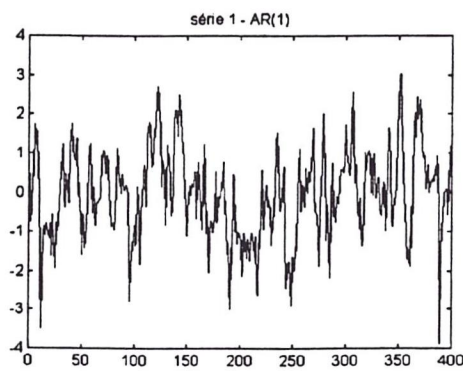


Figura 3: Séries temporais geradas por computador.

A Figura 4 mostra a função de autocorrelação (FAC) e a função de autocorrelação parcial (FACP) para as 4 séries estudadas.

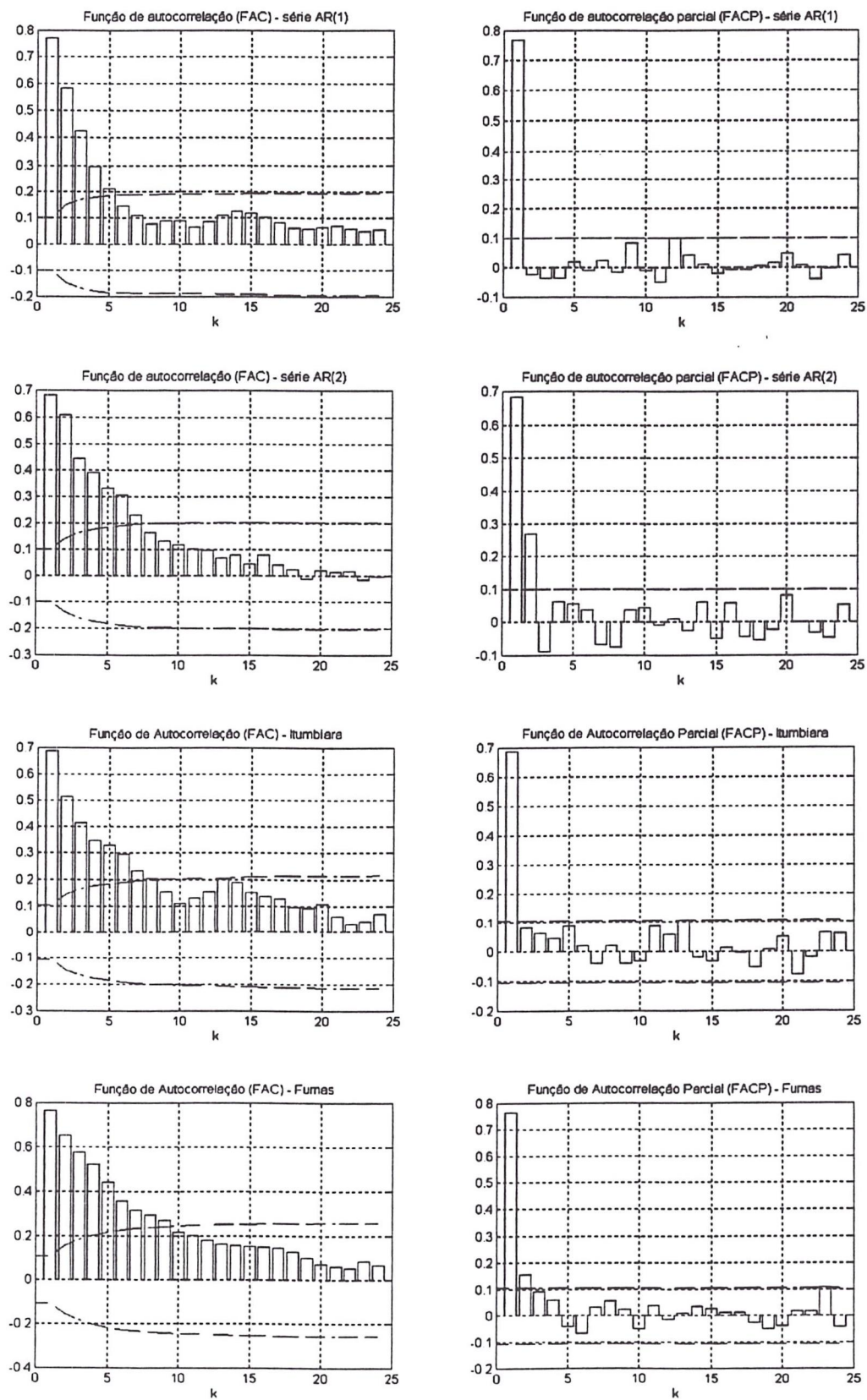


Figura 4: FAC e FACP para as séries estudadas neste trabalho.

Através da análise da FAC e FACP pode-se determinar o modelo e a ordem do mesmo para uma dada série. Pelos resultados mostrados na Figura 1, escolhe-se um modelo AR(1) para as séries Itumbiara e um modelo AR(2) para a série Furnas. Estas escolhas serão confirmadas na Seção 8.1 quando serão usados os critérios AIC, BIC, densidade preditiva ordenada (DPO) e Fator de Bayes.

8.1. Inferência Bayesiana para Estimação Paramétrica

Nesta seção são mostrados os histogramas e distribuições acumuladas obtidos quando é utilizada simulação MCMC para realizar inferências bayesianas a cerca dos parâmetros do modelo AR(p) ajustados as séries Itumbiara e Furnas. Mostra-se também que a inferência via simulação MCMC é útil na determinação da ordem p do modelo auto-regressivo.

Determinação da Ordem dos Modelos

As sugestões fornecidas pela análise gráfica da FAC e FACP as cerca da ordem do modelo são confrontadas com técnicas numéricas. Os resultados estão apresentados na Tabela 2. O critério Fator de Bayes 1 corresponde àquele da Equação (4.8), enquanto o Fator de Bayes 2 corresponde àquele da Equação (4.9). Os parâmetros para os critérios da DPO ($k = 20$) e Fator de Bayes foram estimados via MCMC usando priori não-informativa devido aos critérios de AIC e BIC.

Tabela 2. Seleção do Modelo via AIC, BIC, DPO e Fator de Bayes - priori não-informativa

Série 1		AR(1)	AR(2)	AR(3)
Série 1	AIC	-0.7196	-0.7146	-0.7049
	BIC	-0.6997	-0.6846	-0.6649
	DPO - $c(l)$	0.3020	0.1344	0.2083
	Fator de Bayes 1	0.3497×10^{-8}	0.2367×10^{-8}	0.4950×10^{-8}
	Fator de Bayes 2	0.1995×10^{-8}	0.0790×10^{-8}	0.0908×10^{-8}
	Série 2	AIC	-0.5236	-0.6329
BIC		-0.5072	-0.6008	-0.5765
DPO - $c(l)$		0.0521	0.0552	0.0366
Fator de Bayes 1		0.2962×10^{-8}	0.5025×10^{-7}	0.3467×10^{-7}
Fator de Bayes 2		0.1087×10^{-8}	0.2141×10^{-7}	0.1361×10^{-7}
Itumbiara		AIC	-0.8615	-0.8563
	BIC	-0.8508	-0.8351	-0.8297
	DPO - $c(l)$	7.0176	5.0282	3.5863
	Fator de Bayes 1	0.0098	0.0077	0.0051
	Fator de Bayes 2	0.0089	0.0071	0.0046
	Furnas	AIC	-1.0350	-1.0467
BIC		-1.0243	-1.0255	-1.0141
DPO - $c(l)$		2.4215	6.4706	1.8854
Fator de Bayes 1		0.0107	0.5581	0.1636
Fator de Bayes 2		0.0026	0.0441	7.32×10^{-66}

Os resultados na Tabela 2 confirmam a seleção de um modelo AR(1) para Itumbiara e AR(2) para Furnas. Os histogramas das simulações realizadas com esses modelos são mostrados na seqüência apenas para as séries de vazões, visto que o procedimento é semelhante para as séries AR(1) e AR(2) geradas artificialmente. A Figura 5 apresenta os resultados obtidos para o caso de uma priori normal-gama para os parâmetros ϕ_1 e τ da série de vazões de Itumbiara. Na Figura 6 são mostrados os histogramas estimados por simulação para os parâmetros ϕ_1 e τ , quando se considera uma priori t -gama.

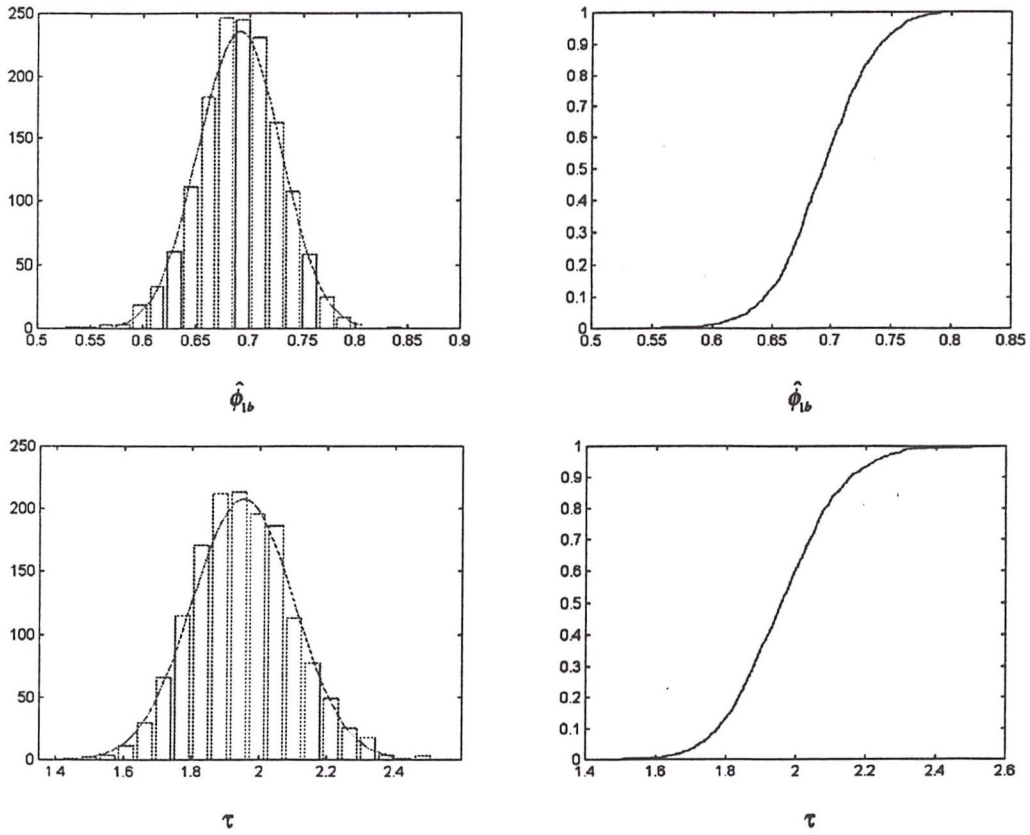


Figura 5: Histograma da série Itumbiara usando priori normal-gama para os parâmetros ϕ_1 e τ .

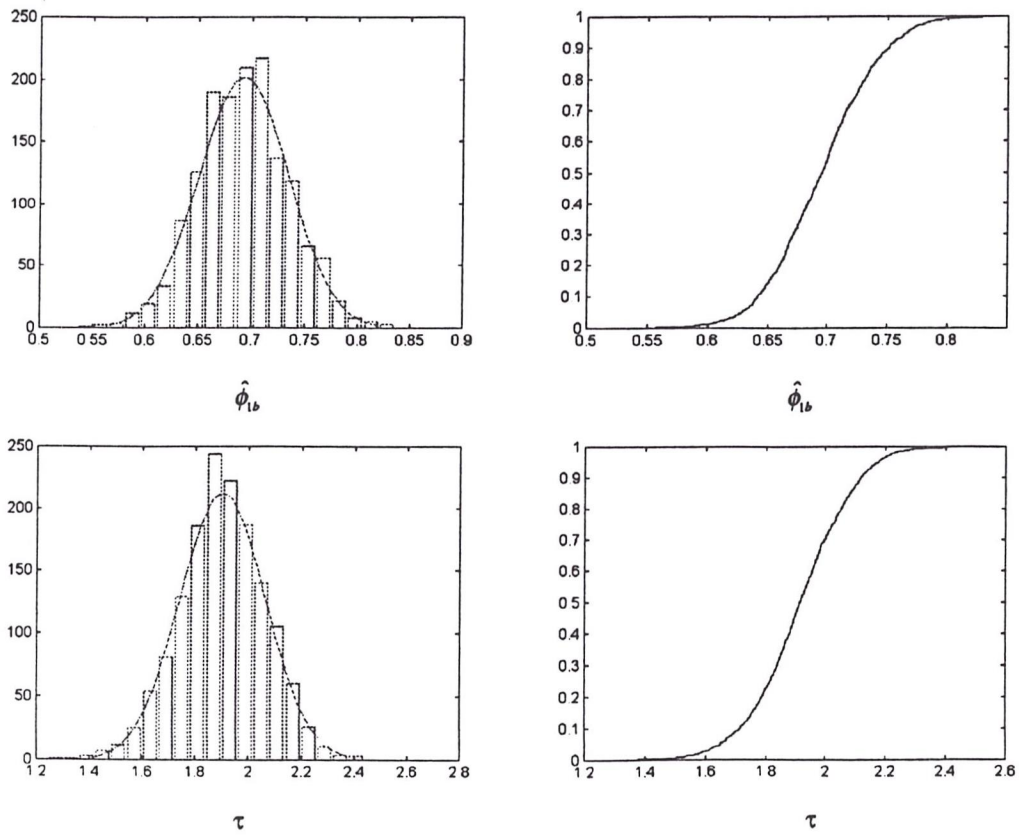


Figura 6: Histograma para a série Itumbiara considerando priori t -gama para os parâmetros ϕ_1 e τ .

Observa-se na Figura 5 que a forma simétrica da posteriori coincide com a forma teórica conforme foi deduzido na Seção 3.2, onde mostrou-se que a distribuição conjunta para (ϕ_1, τ) a posteriori é uma normal-gama. No caso da Figura 6, as amostras obtidas sugerem que as distribuições a posteriori são simétricas, fato este que só pode ser inferido por simulação já que não é possível deduzir analiticamente as expressões correspondentes.

A Figura 7 traz os resultados obtidos para o caso de uma priori normal-gama para os parâmetros (ϕ_1, ϕ_2, τ) da série de vazões de Furnas.

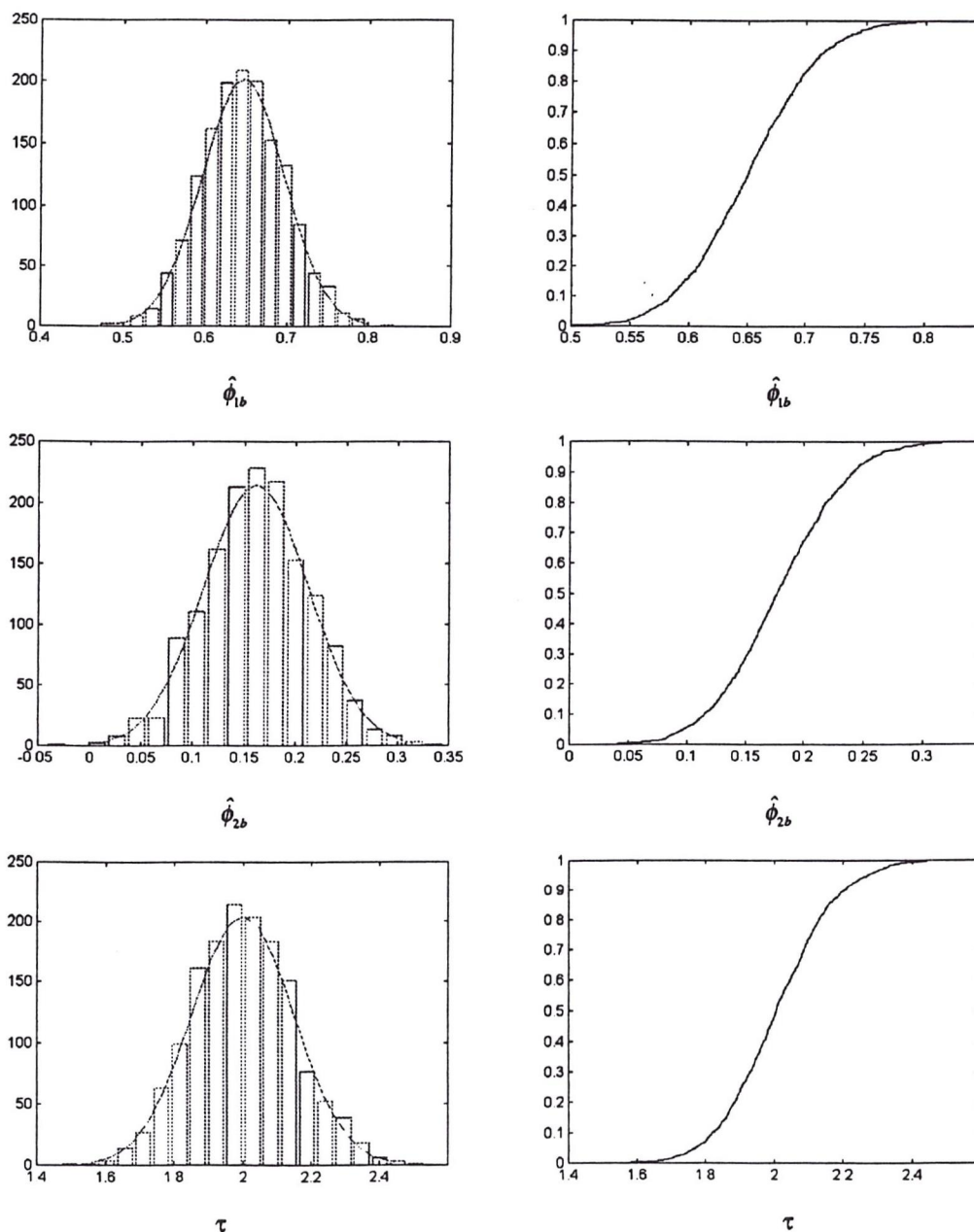


Figura 7: Histograma para série Furnas usando priori normal-gama para os parâmetros ϕ_1, ϕ_2 e τ .

A Figura 8 traz os resultados obtidos para o caso de uma priori t -gama para os parâmetros (ϕ_1, ϕ_2, τ) da série de vazões de Furnas.

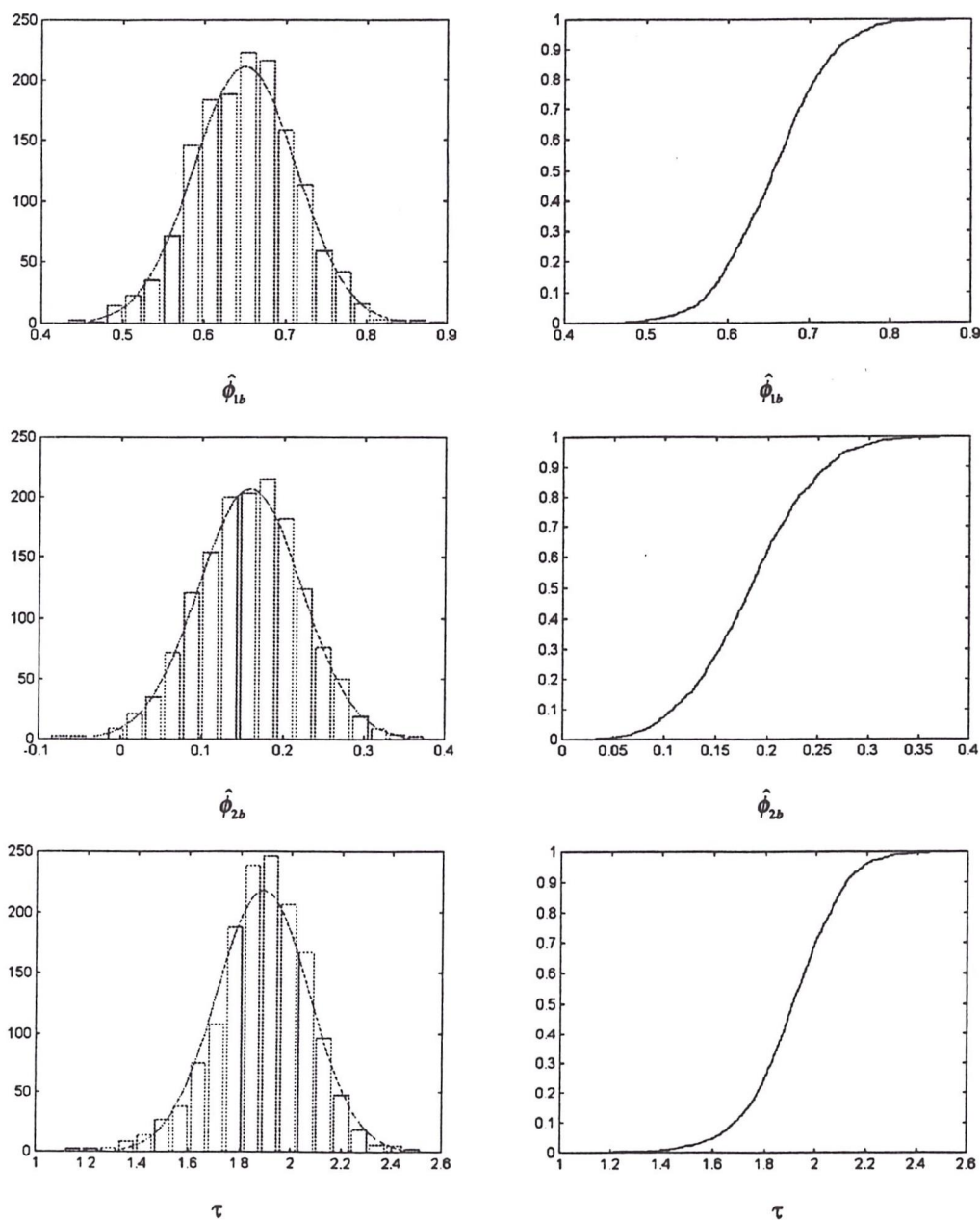


Figura 8: Histograma para série Furnas considerando priori t -gama para os parâmetros ϕ_1, ϕ_2 e τ .

Como resultado geral observa-se que o comportamento das distribuições a posteriori reflete o resultado teórico desenvolvido nas Seções 3.1 e 3.2. Em particular, a utilidade da simulação MCMC fica evidente, pois permite obter os histogramas e inferir a forma simétrica da distribuição a posteriori para o caso da priori t -gama.

As seguintes considerações foram feitas para fins de simulação. Foi especificado um número inicial, arbitrário, de 500 iterações. Após simulação, foi verificado se todos os métodos de diagnóstico indicavam convergência. Apenas o de Heidelberger-Welch e o de Gelman-Rubin o fizeram (Tabela 3, usando a priori t -gama). Foram, então, simuladas mais 2500 iterações, totalizando 3000. Novamente, foi verificado se houve

convergência. Neste caso, o critério de Brooks & Gelman passou também a indicar convergência. Foram simuladas mais 3000 iterações, totalizando 6000. Para este número de iterações todos os métodos indicaram convergência. Assim, o *burn-in* ficou em 3000 iterações (pois até 3000, as cadeias não haviam ainda convergido para todos os métodos) e das 3000 observações restantes, tomou-se de 3 em 3 conforme sugerido pelo método de Raftery-Lewis. O tamanho final da amostra varia de acordo com o método de diagnóstico escolhido. Optou-se por cadeias de tamanho 1000 segundo sugerido pelo método de Raftery-Lewis.

Tabela 3. Resumo do diagnóstico de convergência para vários métodos

Método	Número cadeias	Iterações			Burn-in	Iterações a mais	Salto	Tamanho amostra
		500	3000	6000				
Raftery-Lewis	1	NC*	NC*	C	3000	3000	3	1000
Geweke	1	NC	NC	C	3000	3000	---	3000
Heidelberger-Welch	1	C**	C	C	0	0	---	500
Gelman-Rubin	5	C	C	C	0	0	---	500x5
Brooks-Gelman	5	NC	C	C	500	3000	---	2500x5

* NC = não convergiu, ** C = convergiu

A Figura 9 ilustra de forma gráfica a convergência das observações geradas para as séries Itumbiara e Furnas, partindo-se de uma condição inicial arbitrária para a priori normal-gama. Nota-se a concentração dos valores gerados em torno de uma certa área do espaço de parâmetros.

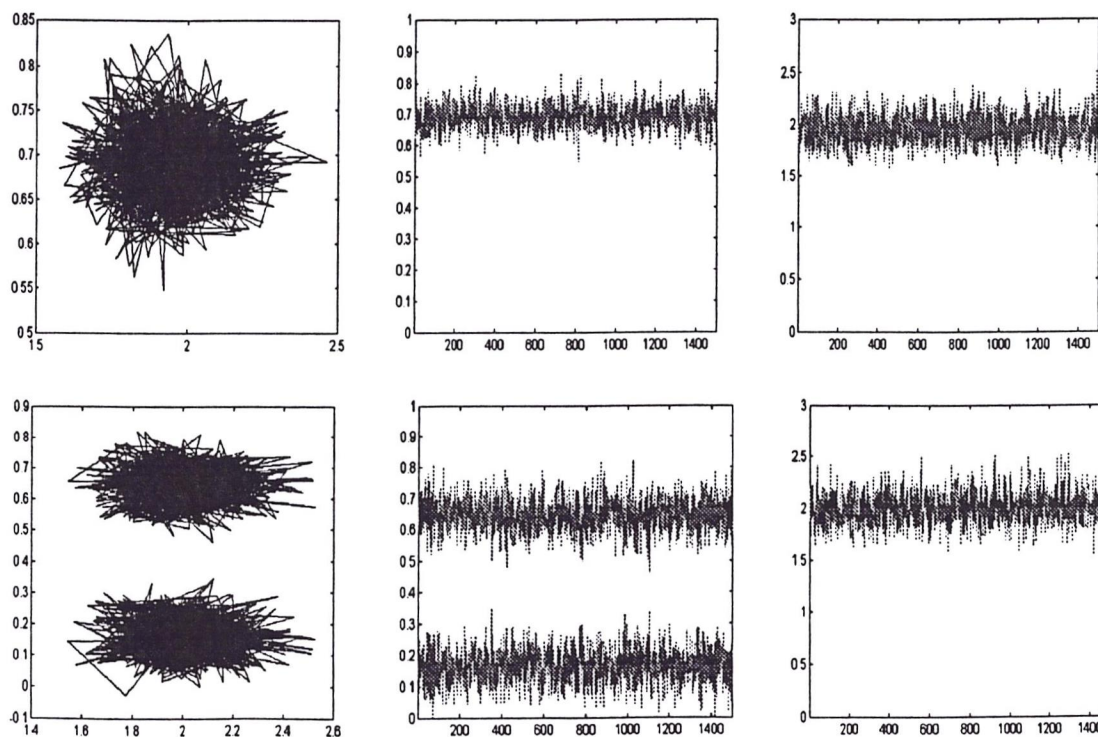


Figura 9: Convergência para os parâmetros ϕ_1 , ϕ_2 para a série Itumbiara (gráfico superior) e Série Furnas (gráfico inferior). Esquerda: $\phi \times \tau$, Centro: $\phi \times k$, Direita: $\tau \times k$, onde k é a iteração.

As tabelas a seguir trazem os valores numéricos para as estimativas dos parâmetros para cada uma das quatro séries analisadas neste trabalho. As siglas tem os seguintes significados: EMV corresponde à estimativa de máxima verossimilhança; PNI(.) corresponde à estimativa obtida para uma densidade priori não-informativa, EX

significa que esse é a estimativa exata obtida pela expressão analítica do valor esperado da densidade a posteriori e GS corresponde à estimativa obtida por simulação usando-se o algoritmo do amostrador de Gibbs; PNG(.) são as estimativas obtidas usando densidade a priori conjugada normal-gama; PTS corresponde as estimativas obtidas quando se usa a densidade a priori t -gama com o algoritmo Metropolis-Hastings. Nestas tabelas também são mostradas a variância da estimativa e o valor do fator de redução potencial de escala, R , calculado segundo o critério de diagnóstico de convergência de Gelman & Rubin (1992), R_{gr} , e de Brooks & Gelman (1998), R_{bg} . Segundo esses critérios, a convergência está assegurada para $R \approx 1$.

Tabela 4: Valores estimados dos parâmetros ϕ_1 e τ para série 1

Método	ϕ_1	Var(ϕ_1)	R_{gr}/R_{bg}	τ	Var(τ)	R_{gr}/R_{bg}
EMVA	0,7798	0,0020	----	2,0484	----	----
PNI(EX)	0,7798	0,0020	----	2,0381	0,0420	----
PNI(GS)	0,7808	0,0020	0,9999	2,0395	0,0425	1,0003
PNG(EX)	0,7766	0,0021	----	1,9950	0,0392	----
PNG(GS)*	0,7801	0,0020	1,0002	2,0106	0,0413	1,0015
PTS(MH)**	0,7776	0,0024	1,0034	1,9384	0,0451	1,0004

* Parâmetros priori's normal-gama: $\mu = 0$, $P = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

** Parâmetros priori's t -gama: $\mu = \hat{\phi}_{yw}$, $P = 10$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Tabela 5: Valores estimados dos parâmetros ϕ_1 , ϕ_2 e τ para série 2

Método	ϕ_1	Var(ϕ_1)	R_{gr}/R_{br}	ϕ_2	Var(ϕ_2)	R_{gr}/R_{bg}	τ	Var(τ)	R_{gr}/R_{bg}
EMVA	0,4568	0,0045	----	0,2961	0,0045	----	1,7396	----	----
PNI(EX)	0,4568	0,0047	----	0,2961	0,0047	----	1,7220	0,0303	----
PNI(GS)	0,4553	0,0046	1,0000	0,2988	0,0051	0,9999	1,7203	0,0297	0,9999
PNG(EX)	0,4546	0,0048	----	0,2960	0,0048	----	1,7102	0,0290	----
PNG(GS)*	0,4535	0,0047	0,9999	0,2973	0,0048	1,0013	1,7055	0,0310	0,9999
PTS(MH)**	0,4573	0,0047	1,0005	0,2945	0,0046	1,0088	1,6409	0,0380	1,0013

* Parâmetros priori's normal-gama: $\mu = (0\ 0)'$, $P = I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

** Parâmetros priori's t -gama: $\mu = \hat{\phi}_{yw}$, $P = 45I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Tabela 6: Estimativas dos parâmetros ϕ_1 e τ para série Itumbiara

Método	ϕ_1	Var(ϕ_1)	R_{gr}/R_{bg}	τ	Var(τ)	R_{gr}/R_{bg}
EMVA	0,6925	0,0015	---	1,9780	----	---
PNI(EX)	0,6925	0,0015	---	1,9724	0,0224	---
PNI(GS)	0,6929	0,0015	0,9999	1,9745	0,0220	1,0000
PNG(EX)	0,6904	0,0015	---	1,9512	0,0216	---
PNG(GS)*	0,6899	0,0015	1,0003	1,9486	0,0210	0,9999
PTS(MH)**	0,6922	0,0020	1,0000	1,9062	0,0259	1,0001

* Parâmetros priori's normal-gama: $\mu = (0\ 0)'$, $P = I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

** Parâmetros priori's t -gama: $\mu = \hat{\phi}_{yw}$, $P = 45I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Tabela 7: Valores estimados dos parâmetros ϕ_1 , ϕ_2 e τ para a série Furnas

Método	ϕ_1	Var(ϕ_1)	R_{gr}/R_{br}	ϕ_2	Var(ϕ_2)	R_{gr}/R_{bg}	τ	Var(τ)	R_{gr}/R_{bg}
EMVA	0,6478	0,0027	---	0,1623	0,0027	---	2,0285	---	---
PNI(EX)	0,6478	0,0027	---	0,1623	0,0027	---	2,0172	0,0228	---
PNI(GS)	0,6484	0,0029	1,0000	0,1621	0,0029	1,0001	2,0178	0,0222	1,0000
PNG(EX)	0,6467	0,0028	---	0,1613	0,0028	---	1,9985	0,0220	---
PNG(GS)*	0,6435	0,0026	1,0000	0,1644	0,0028	1,0003	1,9987	0,0217	0,9999
PTS(MH)**	0,6480	0,0025	1,0005	0,1619	0,0027	1,0001	1,9488	0,0317	1,0011

* Parâmetros priori's normal-gama: $\mu = (0\ 0)'$, $P = I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

** Parâmetros priori's t -gama: $\mu = \hat{\phi}_{yw}$, $P = 75I_2$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

É importante perceber que a especificação dos parâmetros das densidades a priori normal-gama e t -gama, que a princípio pode parecer uma dificuldade adicional, permite um maior controle sobre a variabilidade das estimativas bayesianas. Ou seja, o grau de variabilidade da estimativa passa a ser um parâmetro de projeto, ficando a cargo do interessado a sua especificação. A determinação de intervalos de credibilidade é uma outra fonte de informação útil quando se utiliza simulação MCMC. A Tabela 8 traz os vários resultados obtidos para as quatro séries, juntamente o a estimativa pontual.

Tabela 8: Intervalos de Credibilidade com 95% para as estimativas de ϕ_1 , ϕ_2 , e τ .

	Série 1	Série 2	Itumbiara	Furnas
ϕ_1 IC - PNI(GS)	0,7798 [0,6879; 0,8679]	0,4553 [0,3156; 0,5929]	0,6929 [0,6187; 0,7698]	0,6484 [0,5456; 0,7569]
ϕ_1 IC - PNG(GS)	0,7801 [0,6877; 0,8700]	0,4535 [0,3195; 0,5882]	0,6899 [0,6122; 0,7674]	0,6435 [0,5481; 0,7428]
ϕ_1 IC - PTS(MH)	0,7776 [0,6823; 0,8764]	0,4573 [0,3253; 0,5916]	0,6922 [0,6078; 0,7798]	0,6480 [0,5525; 0,7518]
ϕ_2 IC - PNI(GS)	----	0,2988 [0,1615; 0,4367]	---	0,1621 [0,0542; 0,2692]
ϕ_2 IC - PNG(GS)	----	0,2973 [0,1553; 0,4298]	---	0,1644 [0,0624; 0,2661]
ϕ_2 IC - PTS(MH)	----	0,2945 [0,1593; 0,4293]	---	0,19488 [0,0590; 0,2630]
τ IC - PNI(GS)	2,0395 [1,6405; 2,4642]	1,7203 [1,3922; 2,0814]	1,9745 [1,7014; 2,2692]	2,0178 [1,7377; 2,3207]
τ IC - PNG(GS)	1,9741 [1,6267; 2,4389]	1,7055 [1,3820; 2,0724]	1,9062 [1,5636; 2,2128]	1,9987 [1,7230; 2,2854]
τ IC - PTS(MH)	1,9384 [1,5110; 2,3396]	1,6409 [1,2697; 2,0323]	1,9486 [1,6679; 2,2425]	1,9488 [1,6711; 2,2641]

No caso particular de densidades a priori não-informativa e conjugada normal-gama, que possuem formas analíticas conhecidas para a densidade a posteriori dos parâmetros $\hat{\phi}_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, pode-se usar a variância estimada $\text{Var}(\hat{\phi}_i)$ para construir intervalos de confiança ou testar hipóteses $H_0: \phi_i = 0$, $i = 1, 2$. Entretanto, para o caso da priori t -Gama a posteriori dos parâmetros não possui forma padrão, daí a utilidade de técnicas bayesianas e MCMC na determinação dos intervalos de credibilidade.

Teste de Hipóteses Bayesiano

O objetivo desse teste é saber se as estimativas bayesianas dos parâmetros, calculadas usando diferentes densidades a priori, diferem significativamente entre si. Maiores detalhes em Basu (1996) e Gregurich & Broemeling (1997). Assim, se quer verificar se a amostra gerada por simulação MCMC usando a priori normal-gama (PNG) produz a mesma estimativa que a priori t -gama (PTG). O teste consiste confrontar a hipótese nula $H_0: \theta_{\text{PNG}} - \theta_{\text{PTG}} = 0$ com a alternativa $H_A: \theta_{\text{PNG}} - \theta_{\text{PTG}} \neq 0$, onde θ é o parâmetro em questão. Se o intervalo de credibilidade (95%) de $(\theta_{\text{PNG}} - \theta_{\text{PTG}})$ não contém o zero, então rejeita-se H_0 . Tomando-se por exemplo, a série de vazões de Itumbiara e as observações geradas por MCMC, o intervalo para obtido foi $[-0,11; 0,12]$ para ϕ_1 e $[-0,49; 0,37]$ para τ . Como ele contém o zero, aceita-se a hipótese nula. Os histogramas para para $(\phi_{\text{PNG}} - \phi_{\text{PTS}})$ e estão mostrados na Figura 10.

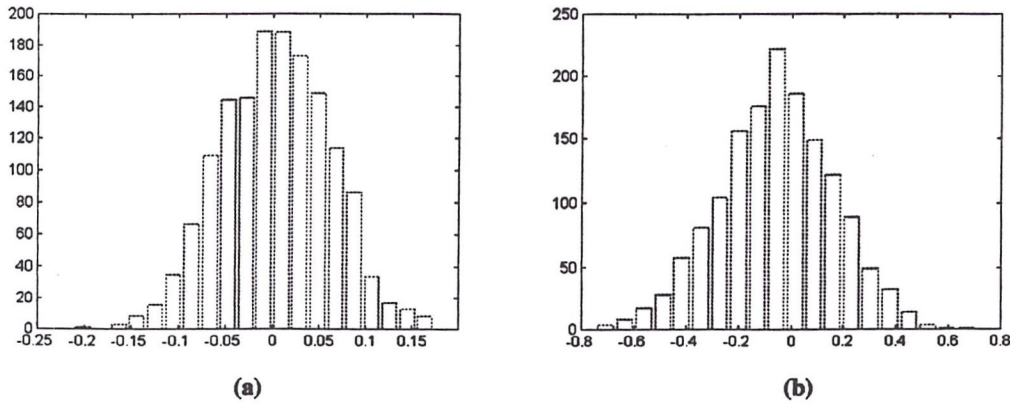


Figura 10: Teste de hipótese bayesiano. (a) Parâmetro ϕ_1 , (b) Parâmetro τ .

Ambas densidades a priori produzem estimativas estatisticamente iguais. Assim a escolha do método de estimação deve ser feita avaliando-se outras propriedades, tais como predição e robustez.

8.2. Previsão k Passos a Frente

As simulações de previsão de vazão a seguir necessitam dos dados de vazões médias e desvios-padrões mensais das séries de Itumbiara e Furnas, mostrados na Tabela 9.

Tabela 9. Previsão 12 passos a frente: série Itumbiara

Mês (m)	Itumbiara		Furnas	
	Vazão média	Desvio-padrão	Vazão média	Desvio-padrão
Janeiro	2642,3	929,9	1719,3	687,9
Fevereiro	2810,3	1208,2	1669,2	671,3
Março	2653,1	1093,8	1518,0	645,9
Abril	1988,8	722,1	1019,6	358,6
Mai	1296,0	384,4	743,5	238,9
Junho	997,2	289,6	623,0	278,6
Julho	788,7	215,6	515,5	164,7
Agosto	620,0	177,3	431,2	135,0
Setembro	535,0	163,0	447,4	252,0
Outubro	686,1	223,5	532,4	242,1
Novembro	1115,5	447,0	747,8	314,3
Dezembro	1912,2	750,2	1268,2	499,4

Foram consideradas três critérios de performance para os valores de previsão de vazões fornecidas pelo método clássico e bayesiano. São eles:

$$\text{Erro médio quadrático (MSE)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i^o - y_i^p)^2$$

$$(\text{MAD}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y_i^o - y_i^p|$$

$$\text{Erro médio relativo (MRE\%)} = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|y_i^o - y_i^p|}{y_i^p}$$

onde y_i^o e y_i^p são os valores de vazão observados e previstos, respectivamente. As Tabelas 10 e 11 apresentam as previsões num horizonte de 12 passos à frente fornecidas pela abordagem clássica - AR(p) com parâmetros determinados pelo estimador de

máxima verossimilhança, ver Box & Jenkins (1976) - e pela bayesiana em que foi utilizada uma densidade a priori t -gama para as séries Itumbiara e Furnas.

Tabela 10. Previsão 12 passos a frente: série Itumbiara

Valor observado	Previsão clássica	Previsão bayesiana	IC (95%)
2340	2081,4	2083,9	[2035,6; 2131,5]
2800	2326,4	2329,2	[2238,2; 2413,3]
2960	2360,1	2361,5	[2270,0; 2439,4]
1950	1859,6	1859,7	[1801,8; 1904,8]
1420	1247,8	1247,5	[1217,5; 1268,9]
1010	972,2	971,9	[951,5; 985,2]
784	776,2	775,8	[762,5; 783,9]
588	613,1	612,7	[603,6; 617,8]
429	530,2	529,9	[523,5; 533,2]
545	682,5	682,1	[674,6; 685,7]
1230	1108,0	1107,3	[1096,1; 1112,3]
2340	1912,7	1911,5	[1894,8; 1918,5]
Erro médio relativo	12,58%	12,51%	----
MAD	204,45	204,03	----
Erro médio quadrático	79,83	79,63	----

Tabela 11. Previsão 12 passos a frente: série Furnas

Valor observado	Previsão clássica	Previsão bayesiana	IC (95%)
1450	1264,7	1270,2	[1223,4; 1320,8]
1512	1269,1	1275,4	[1224,8; 1322,7]
1977	1246,4	1253,5	[1202,1; 1300,3]
971	896,2	899,9	[864,4; 930,6]
839	677,5	679,7	[655,1; 700,1]
639	571,2	572,7	[552,2; 589,1]
624	487,4	488,3	[473,9; 499,1]
513	411,4	412,0	[400,5; 420,2]
354	416,3	417,0	[402,4; 426,8]
421	506,4	506,9	[492,9; 515,7]
587	715,0	715,7	[695,2; 727,6]
1447	1224,4	1225,3	[1191,8; 1243,5]
Erro médio relativo (%)	18,34%	18,18%	
MAD	183,28	181,05	
Erro médio quadrático	73,10	72,27	-----

Note que os valores mostrados nas Tabelas 10 e 11 correspondem aos valores no domínio original de medidas de vazões (e não àquele sob a transformação em (8.2)) que devem ser obtidos a partir da seguinte transformação inversa (Mood *et al*, 1974):

$$E(y_t|\phi, \tau) = \exp \left\{ \mu_m + \frac{\sigma_m}{2} [2E(Z_t|\phi, \tau) + \sigma_m V(Z_t|\phi, \tau)] \right\} \quad (8.3)$$

onde $E(Z_t|\phi, \tau)$ e $V(Z_t|\phi, \tau)$ são, respectivamente, o valor esperado e a variância gerados pela previsão clássica e bayesiana calculados na Seção 5.1, e μ_m e σ_m são as médias e desvios-padrões mensais das séries de vazões estudadas (Tabela 9). Percebe-se que o desempenho da técnica bayesiana é ligeiramente melhor que o da técnica clássica. A Figura 11 mostra os valores das previsões fornecidos pela técnica bayesiana mostrados nas Tabelas 9 e 10, juntamente com os valores das reais para uma determinada parte das séries Itumbiara e Furnas.

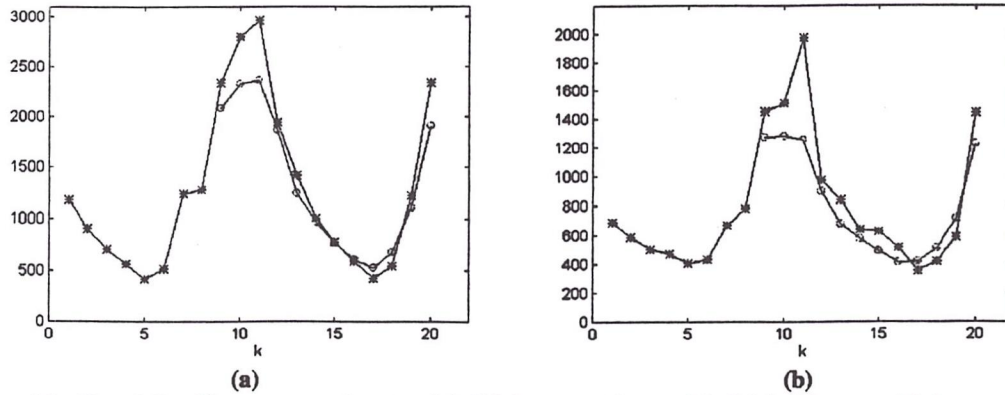


Figura 11: Previsão 12 passos a frente. (a) Série Itumbiara, (b) Série Furnas. Valores previstos (círculo) e valores reais observados (asterisco).

6.3. Análise de Robustez das Estimativas Bayesianas

De fundamental interesse na escolha da técnica de estimação a ser utilizada é o estudo de sua robustez, aqui caracterizada pela influência do parâmetro de localização μ da densidade a priori no valor pontual da estimativa bayesiana.

Nos testes a seguir, foram calculados diversos valores pontuais das estimativas bayesianas correspondendo a uma determinada faixa de variação do parâmetro de localização da priori. A matriz de precisão P é mantida em um valor constante e alto para reduzir a variabilidade de modo a facilitar a visualização. São contemplados tanto as estimativas obtidas quando se usa a priori conjugada normal-gama, quanto aquelas geradas pelo uso da priori t -gama. O valor teórico da estimativa normal-gama dado pelas Equações (3.14) e (3.16) são também mostrados nos gráficos para efeito de comparação. Nas figuras a seguir μ é o parâmetro de localização da priori, $\hat{\phi}_1$ é o estimador de máxima verossimilhança e $\hat{\phi}_{1b}$ é o estimador bayesiano. A Figura 12 mostra o resultado da análise da robustez da estimativa bayesiana de ϕ_1 para a série 1.

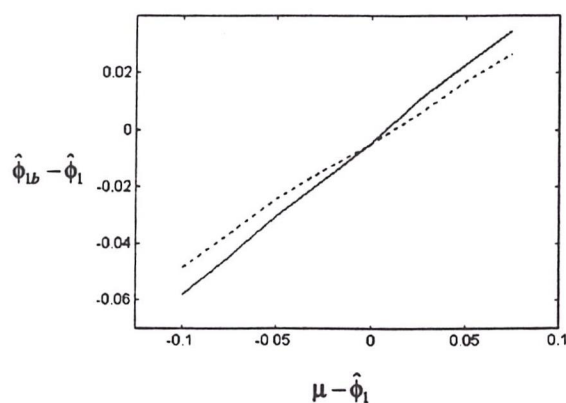


Figura 12: Análise de Robustez para a série 1. Densidade a priori normal-gama (linha tracejada) e densidade a priori t -gama (linha contínua).

A Tabela 12 apresenta os valores numéricos das estimativas bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$, quando se considera densidades a priori normal-gama e t -gama, para a série 1.

Tabela 12. Valores de $\hat{\phi}_{1b}$ para a série 1.

normal-gama			t-gama		
$\hat{\phi}_b$	Int. Cred. 95%		$\hat{\phi}_b$	Int. Cred. 95%	
0,7217	0,6562	0,7875	0,7313	0,6564	0,8147
0,7352	0,6748	0,8077	0,7433	0,6695	0,8239
0,7493	0,6861	0,8176	0,7556	0,6829	0,8374
0,7622	0,7029	0,8287	0,7655	0,6877	0,8427
0,7753	0,7170	0,8397	0,7749	0,7059	0,8548
0,7905	0,7293	0,8571	0,7857	0,7109	0,8668
0,8026	0,7416	0,8654	0,7969	0,7194	0,8815
0,8147	0,7592	0,8782	0,8066	0,7291	0,8855

A Figura 13 traz o resultado da avaliação da robustez das estimativa bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$ e $\hat{\phi}_{2b}$ para a série 2.

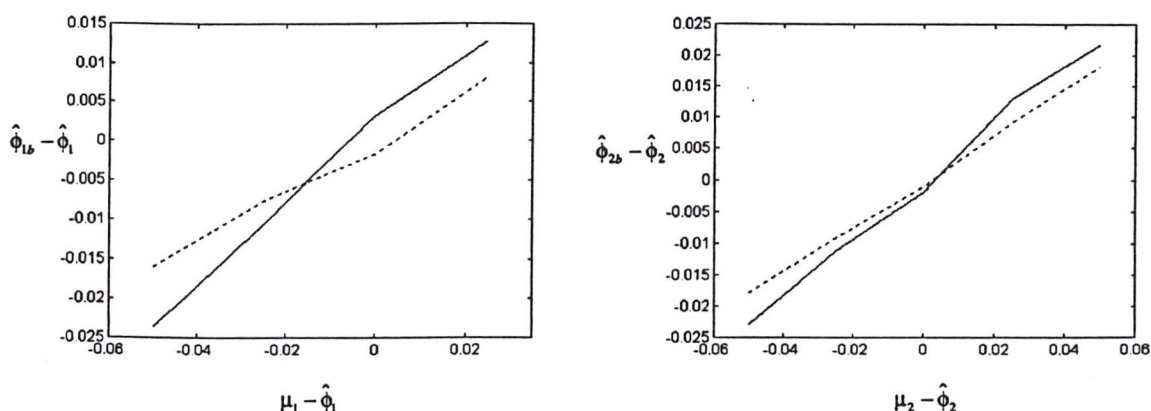


Figura 13: Análise de robustez para a série 2. Priori normal-gama (tracejado) e t-gama (contínua).

A Tabela 13 apresenta os valores numéricos das estimativas bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$ e $\hat{\phi}_{2b}$ quando se considera densidades a priori normal-gama e t-gama, para série 2.

Tabela 13. Valores de $\hat{\phi}_{1b}$ e $\hat{\phi}_{2b}$ para a série 2.

	$\hat{\phi}_{1b}$	Int. Cred. 95%		$\hat{\phi}_{2b}$	Int. Cred. 95%	
normal-gama	0,4127	0,3407	0,4830	0,2507	0,1813	0,3203
	0,4195	0,3452	0,4940	0,2615	0,1870	0,3393
	0,4332	0,3643	0,5093	0,2731	0,1929	0,3453
	0,4462	0,3751	0,5170	0,2848	0,2207	0,3486
	0,4599	0,3937	0,5273	0,2940	0,2288	0,3640
	0,4696	0,4018	0,5424	0,3090	0,2360	0,3784
	0,4803	0,4116	0,5505	0,3178	0,2480	0,3850
	0,4933	0,4282	0,5604	0,3308	0,2638	0,4064
t-gama	0,4184	0,3344	0,5204	0,2542	0,1705	0,3386
	0,4244	0,3387	0,5165	0,2690	0,1852	0,3531
	0,4408	0,3557	0,5283	0,2783	0,1928	0,3645
	0,4491	0,3648	0,5345	0,2869	0,1928	0,3648
	0,4550	0,3566	0,5466	0,2950	0,1992	0,3710
	0,4649	0,3775	0,5503	0,3052	0,2232	0,3907
	0,4784	0,3929	0,5737	0,3143	0,2155	0,4057
	0,4856	0,3986	0,5784	0,3257	0,2421	0,4211

A Figura 14 mostra o resultado da avaliação da robustez da estimativa bayesiana $\hat{\phi}_{1b}$ para a série Itumbiara.

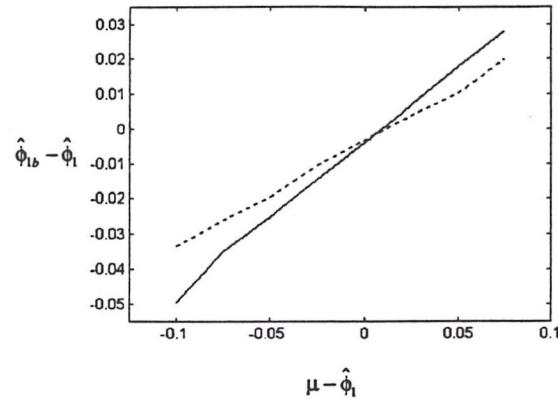


Figura 14: Análise de robustez. Usando priori normal-gama (linha tracejada) e t -gama (linha contínua) para a série Itumbiara.

A Tabela 14 traz os valores das estimativas bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$ para série Itumbiara.

Tabela 14. Valores de $\hat{\phi}_{1b}$ para a série Itumbiara.

normal-gama		t -gama	
$\hat{\phi}_b$	Int. Cred. 95%	$\hat{\phi}_b$	Int. Cred. 95%
0,6448	0,5873 0,7044	0,6512	0,5863 0,7258
0,6539	0,6032 0,7134	0,6602	0,5921 0,7312
0,6662	0,6121 0,7273	0,6727	0,6122 0,7450
0,6762	0,6174 0,7390	0,6798	0,6135 0,7521
0,6873	0,6315 0,7518	0,6858	0,6225 0,7575
0,6992	0,6442 0,7640	0,6966	0,6264 0,7699
0,7119	0,6574 0,7733	0,7060	0,6385 0,7786
0,7228	0,6672 0,7821	0,7147	0,6434 0,7868

A Figura 15 mostra o resultado da avaliação da robustez das estimativa bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$ para a série Furnas.

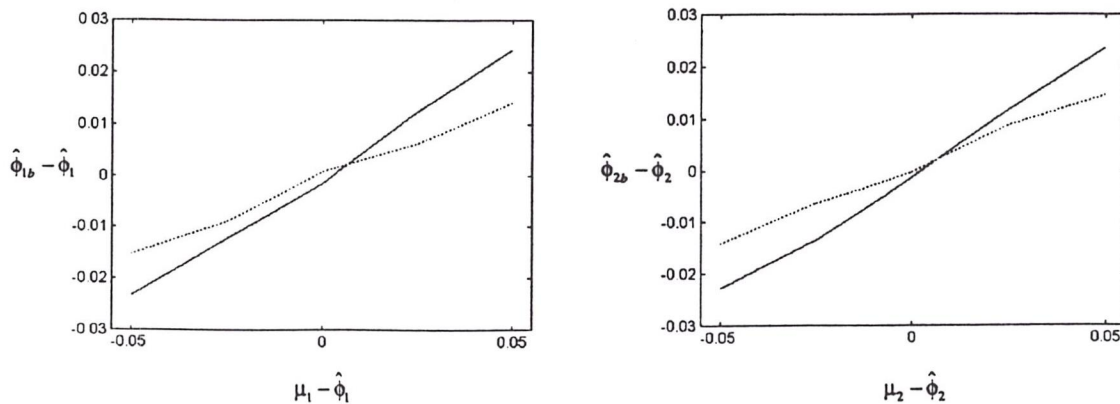


Figura 15: Análise de Robustez. Usando priori normal-gama (linha tracejada) e t -gama (linha contínua) para a série Furnas.

A Tabela 15 apresenta os valores numéricos das estimativas bayesianas $\hat{\phi}_{1b}$ quando se considera densidades a priori normal-gama e t -gama, para série Furnas.

Tabela 15. Valores de $\hat{\phi}_{1b}$ e $\hat{\phi}_{2b}$ para a Furnas.

	$\hat{\phi}_{1b}$	Int. Cred. 95%		$\hat{\phi}_{2b}$	Int. Cred. 95%	
	normal-gama	0,5699	0,5211	0,6205	0,0822	0,0366
0,5811		0,5320	0,6301	0,0943	0,0467	0,1430
0,5932		0,5416	0,6473	0,1062	0,0571	0,1592
0,6042		0,5584	0,6517	0,1157	0,0674	0,1666
0,6149		0,5663	0,6618	0,1278	0,0805	0,1838
0,6288		0,5763	0,6746	0,1410	0,0948	0,1882
0,6408		0,5876	0,6916	0,1527	0,1068	0,2016
0,6521		0,6017	0,6978	0,1653	0,1167	0,2107
t -gama	0,5780	0,5100	0,6535	0,0976	0,0213	0,1775
	0,5959	0,5261	0,6713	0,1028	0,0333	0,1747
	0,6012	0,5373	0,6680	0,1149	0,0443	0,1803
	0,6076	0,5317	0,6745	0,1229	0,0517	0,1891
	0,6172	0,5476	0,6816	0,1289	0,0555	0,1967
	0,6227	0,5538	0,6901	0,1379	0,0671	0,2146
	0,6306	0,5588	0,7100	0,1438	0,0767	0,2103
	0,6434	0,5774	0,7076	0,1495	0,0785	0,2247

Os resultados da análise da robustez apresentados nesta seção permitem inferir que a estimativa bayesiana quando se usa priori t -gama também é influenciada de forma aproximadamente linear pelo parâmetro de localização μ . Entretanto, a curva resultante tem uma inclinação menos acentuada que aquela obtida quando se usa priori normal-gama, indicando de uma modo geral que as estimativas para uma priori t -gama são mais robustas.

9. Conclusão

Este trabalho tratou da utilização de técnicas bayesianas em séries temporais ajustadas por modelos autoregressivos de ordem p , $AR(p)$. De particular interesse foram os estudos sobre predição e robustez das estimativas bayesianas, utilizando para isso simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC).

Em resumo, este trabalho apresenta uma seqüência lógica completa de procedimentos para análise de modelos autoregressivos de ordem p , $AR(p)$ através de técnicas de inferência bayesiana e simulação de Monte Carlo em Cadeias de Markov. Os procedimentos envolvidos são:

- Determinação da função de verossimilhança dos dados, especificação da densidade a priori dos parâmetros, e cálculo da densidade a posteriori via teorema de Bayes.
- Análise inicial da série buscando observar propriedades particulares da mesma como tendências, sazonalidades, etc. e posterior determinação da FAC e FACP.
- Seleção da ordem do modelo via métodos clássicos como AIC e BIC, bem como através de simulação MCMC via densidade preditiva ordenada e fator de Bayes.

- Estimacão dos parâmetros via métodos clássicos como o de máxima verossimilhança, e através de técnicas bayesianas + simulao MCMC.
- Previsão de valores para a série sendo analisada por meio técnicas clássicas e bayesianas + simulao MCMC.
- Análise da robustez dos estimadores bayesianos via simulao MCMC.

Estes dois últimos procedimentos são de particular importância e compreendem os principais resultados deste trabalho. A previsão para a série de vazões permite estimar custos ligados ao processamento de energia elétrica durante um determinado período que pode ser de meses ou anos. O estudo da robustez do estimador via simulao MCMC  um resultado teórico importante, pois robustez  um critério forte para a escolha final do estimador que será utilizado. Técnicas de simulao MCMC (como o amostrador de Gibbs e o Metropolis-Hastings) permitem a verificao da robustez do estimador seja feita mesmo quando a densidade a posteriori não tem uma forma padrão e, conseqüentemente, não pode ser amostrada diretamente. Mostrou-se que o uso da densidade a priori t -gama leva a estimativas mais robustas, ou seja, menos sensíveis a especificao do parâmetro de localizao da priori, do que aquelas resultantes do uso de priori normal-gama.

Por fim, deve-se enfatizar que o uso de técnicas de simulao MCMC torna o processo de inferência bayesiana mais poderoso e flexível. Além disso, pode ser facilmente estendido para problemas de dimensão/ordem maior, sem dificuldade adicional. Als, este  um dos principais argumentos a favor de técnicas de simulao MCMC e uma das principais responsáveis por sua popularizao (Casella & George, 1992; Gelman et al, 1995; Brooks, 1999).

Referências

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical identification model. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 19, 716-723.
- Basu, S. (1996). Bayesian hypothesis testing using posterior density ratios. *Statistics & Probability Letters*, vol. 30, 79-86.
- Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*. Prentice Hall.
- Broemeling, L. D. & Land, M. (1984). On forecasting with univariate autoregressive processes. *Comm. Statist.-Theor. Meth.*, vol. 13, no. 11, 1305-1320.
- Brooks, S.P. (1998). Markov chain Monte Carlo method and its application. *The Statistician*, vol. 47, 69-100.
- Brooks, S.P. & Gelman, A. (1998). Alternative methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 7, 434-455.
- Brooks, S.P. & Roberts, G.O. (1998). Convergence assessment techniques for Markov chain Monte Carlo. *Statistics and Computing*, vol. 8, 319-335.
- Brooks, S.P. & Roberts, G.O. (1999). On quantile estimation and MCMC convergence. *Biometrika*, vol. 86, 710-717.
- Carlin, B.P. & Chib, S. (1995). Bayesian model choice via Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, vol. 57, no. 3, 473-484.
- Casella, G. & George, E.J. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician*, vol. 46, no. 3, 167-174.
- Chib, S. & Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *The American Statistician*, vol. 49, no. 4, 327-335.
- Choy, S. T. B. & Smith, A. F. M. (1997). On robust analysis of a normal location parameter. *Journal of Royal Statistical Society, B*, vol. 59, no. 2, 463-474.
- Cowles, M. K. & Carlin, B. P. (1996). Markov Chain Monte Carlo convergence diagnostics: A comparative review. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 91, 883-904.
- Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. CRC Press.
- Gelfand, A.E. & Smith, A.F.M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 85, 398-409.
- Gelfand, A.E. & Dey, D.K. (1994). Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, vol. 56, 501-514.
- Gelman, A. E. & Rubin, D. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences, *Statistical Science*, vol. 7, 457-511.
- Gelman, R., Carlin, J.B., Stern, H.S. & Rubin, D.B. (1995). *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall.

- Gilks, W.R. & Best N.G. (1992). Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling. *Appl. Statist.*, vol. 41, no. 2, 337-348.
- Gilks, W.R. & Wild, P. (1995). Adaptive Rejection Metropolis Sampling within Gibbs Sampling. *Appl. Statist.*, vol. 44, no. 4, 455-472.
- Gregurich, M.A. & Broemeling, L.D. (1997). A Bayesian analysis for estimating the common mean of independent normal populations using the gibbs sampler. *Commun. Statist.-Simula.*, vol. 26, no. 1, 35-51.
- MacKay, D.J.C. (1997). Introduction to Monte Carlo Methods. *Technical Report*, Cambridge University, Department of Physics, Cambridge, United Kingdom.
- Mood, A.M., Graybill, F.A. & Boes, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. 3ª edição, McGraw-Hill Series in Probability and Statistics.
- Oliveira, J. R. T. (1998). Uso do amostrador de Gibbs e Metropolis-Hastings em análise bayesiana de modelos AR(p). *Dissertação de Mestrado*, ICMC, Universidade de São Paulo, Campus São Carlos.
- Pericchi, L.R. & Smith, A.F.M. (1992). Exact and approximate posterior moments for a normal location parameter, *Journal of Royal Statistical Society*, vol. 54, no. 3, 793-804.
- Raftery, A. E. & Lewis, S. (1992). How many iterations in the Gibbs Sampler? In: *Bayesian Statistics*, J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Davied & A. F. M. Smith (Eds.), vol. 4, pp. 763-773, Oxford, UK: Oxford University Press.
- Raftery, A. E. (1996). Hypothesis testing and model selection. In: *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, W.R. Gilks, E. Richardson e D.J. Spiegelhalter (Ed.), London: Chapman & Hall.
- Rodrigues, J. & Baba, M. Y. (1994). Bayesian estimation of a simple regression model with measurement errors. *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística*, vol. 2, 107-118.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, vol. 6, no. 2, 461-464.
- Tierney, L. (1994). Markov chains for exploring posterior distributions. *Annals of Statistics*, vol. 22, 1701-1762.