UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Dimension de Krull des algèbres graduées II

ARTIBANO MICALI

RACHID CHIBLOUN

Nº 001

NOTAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2577

Dimension de Krull des algèbres graduées II

ARTIBANO MICALI

RACHID CHIBLOUN

Nº 001

NOTAS DO ICMSC

Série Matemática

São Carlos

mar. / 1993

Dimension de Krull des algèbres graduées II

Artibano MICALI(*)
Département des Sciences Mathématiques
Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 05, France
et
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques
Université de Ouagadougou
03 B.P. 7021 Ouagadougou 03, Burkina Faso

Rachid CHIBLOUN
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Meknès, Maroc

Le premier pas dans ce long chemin en vue de calculer la dimension, que nous appelons désormais *dimension de Krull*, d'une algèbre graduée a été donné par W. Krull (1935) montrant que si A est un anneau (dans cet article, tout anneau est commutatif à élément unité), la dimension de l'anneau de polynômes $A[X]$ vérifie $dim(A[X]) \geq dim(A) + 1$ (cf. [6]) et, par récurrence sur le nombre entier $n \geq 1$, $dim(A[X_1, \ldots, X_n] \geq dim(A) + n$. Il va de soi que les germes de cette construction de Krull se trouvent déjà dans les travaux de D. Hilbert du début du siècle concernant les idéaux dans les anneaux de polynômes ainsi que dans le livre de F.S. Macaulay (cf. [7]).

Par la suite, on a cherché des majorations pour la dimension des anneaux de polynômes et ce fut probablement P. Jaffard (cf. [4]) le premier a avoir montré que $dim(A[X]) \leq 2dim(A) + 1$ donc par récurrence sur le nombre entier $n \geq 1$, $dim(A[X_1, \ldots, X_n]) \leq 2^n(dim(A) + 1) - 1$ et ceci, pour tout anneau A. Ultérieurement, P. Jaffard (cf. [4]) a amélioré cette inégalité en montrant que $dim(A[X_1, \ldots, X_n]) \leq n(dim(A) + 1) - 1$.

Le premier résultat précis dans cette direction est le *théorème de Krull* (cf. [6]) qui nous dit que si A est un anneau noethérien, alors $dim(A[X_1, \ldots, X_n]) = dim(A) + n$. Quelques années plus tard, A. Seidenberg (cf. [12], [13]) a montré que si A est un anneau de Prüfer, non nécessairement noethérien, on a aussi $dim(A[X_1, \ldots, X_n]) = dim(A) + n$. La parenté entre ces deux résultats est restée,

(*) Partially supported by FAPESP, Processo n^0 92/1735-6

à notre avis, sans explication jusqu'à une date toute récente (cf. [1], [2]). Dans le paragraphe 1., nous nous occuperons de cette question.

Dans les années 1970/1971, en collaboration avec J.P. Olivier, nous avons bâti, à l'instar de P. Jaffard (cf. [4]), une théorie de la dimension dans les algèbres symétriques, dans un article malheureusement non publié (cf. [9], [11]). Dans cet article les auteurs démontrent, dans le cas local, la formule de la dimension de Krull pour l'algèbre symétrique d'un module, formule retrouvée plus tard par C. Hunecke et M.E. Rossi (cf. [3]) sous des hypothèses de caténarité, à savoir, que si A est un anneau noethérien et M est un A-module de type fini, alors la dimension de Krull de l'algèbre symétrique $S_A(M)$ du A-module M s'écrit

$$dim(S_A(M) = \sup_{P\in Spec(A)} (dim(A/P) + \mu(M_P)),$$

où $\mu(M_P)$ est le nombre d'un système minimal de générateurs du A_P-module M_P (cf. [1]). Nous allons montrer, ci-dessous, que cette formule est encore vraie pour toute algèbre graduée (sur $\mathbb{N}$) de type fini, à condition que l'anneau de base vérifie l'inégalité de la dimension.

1. L'inégalité de la dimension. Si A et B sont deux anneaux intègres tels que A soit un sous-anneau de B, on notera $deg.tr_A(B)$ le degré de transcendance du corps de fractions de B sur le corps de fractions de A. On dira que le couple (A, B) vérifie l'*inégalité de la dimension* si pour tout idéal premier Q de B, si l'on pose $P = Q \cap A$, alors $ht(Q) + deg.tr_{A/P}(B/Q) \leq ht(P) + deg.tr_A(B)$ et que le couple (A, B) vérifie la *formule de la dimension* si l'inégalité ci-dessus est une égalité, où $ht(Q)$ désigne la *hauteur* de l'idéal Q. On dit encore que un anneau intègre A vérifie l'*inégalité de la dimension* (resp. la *formule de la dimension*) si pour tout anneau intègre B contenant A comme sous-anneau et tel que B soit une A-algèbre de type fini, le couple (A, B) vérifie l'inégalité de la dimension (resp. la formule de la dimension). Nous avons montré, dans [1], que l'*hypothèse fondamentale* qui permet l'établissement de la formule de le dimension pour l'algèbre symétrique d'un module est la suivante :

(HF) *On supposera que A soit un anneau commutatif à élément unité tel que pour tout idéal premier P de A, l'anneau quotient A/P vérifie l'inégalité de la dimension.*

Parmi les anneaux qui vérifient la condition (HF) on peut citer les anneaux noethériens, les anneaux de Prüfer non nécessairement noethériens (cf. [12], [13]), les S-domaines forts dans le sense de Kaplansky (cf. [5], [8]) ou encore les anneaux universellement caténaires non nécessairement noethériens.

Dans le cas de l'algèbre symétrique, l'inégalité de la dimension est utilisée sous la forme suivante : si A est un anneau commutatif à élément unité et

M est un A-module de type fini, pour tout idéal premier P de A et quels que soient les idéaux premiers Q et Q' de l'algèbre symétrique $S_A(M)$ tels que $Q \subset Q'$, $Q \cap A = P$ et $Q' \cap A = P$, alors $ht(Q'/Q) + deg.tr_{A/P}(S_A(M)/Q') \leq ht(P) + deg.tr_{A/P}(S_A(M)/Q)$.

2. Le théorème principal. Soient A un anneau et B une A-algèbre. Dire que B est une *A-algèbre graduée* veut dire, dans notre contexte, qu'elle est graduée sur $\mathbf{N}$, c'est à dire, $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ avec $B_0 = A$ et les sous-A-modules B_n vérifient les conditions $B_m B_n \subset B_{m+n}$, quels que soient les entiers $m \geq 0$ et $n \geq 0$. Le théorème principal dans cette direction est le suivant :

Théorème 2.1. *Soient A un anneau commutatif à élément unité vérifiant la condition (HF) et B une A-algèbre graduée de type fini sur A. Alors*

$$dim(B) = \sup_{P \in Spec(A)} (dim(A/P) + dim(B \otimes_A \kappa(P))),$$

où $\kappa(P)$ est le corps résiduel de l'anneau local A_P.

En effet, on remarque que si P est un idéal de A non nécessairement premier, l'idéal PB engendré par P dans B est gradué et $P + B_+$, où $B_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ est l'*idéal d'augmentation* de B, est égal à l'idéal somme $PB + B_+$, lequel est aussi gradué. De plus, si P est un idéal premier de A, la $\kappa(P)$-algèbre $B \otimes_A \kappa(P)$ est de type fini donc noethérienne et à partir de ces remarques, on démontre que $dim(B \otimes_A \kappa(A)) = ht(P + B_+/PB)$. Donc, si $P_1 \underset{\neq}{\subset} P_2$ sont deux idéaux premiers de A, on a, dans B, $P_1 + B_+ \underset{\neq}{\subset} P_2 + B_+$ et ceci entraîne que pour tout idéal premier P de A,

$$dim(A/P) + ht(P + B_+/PB) \leq dim(B).$$

On a ainsi l'inégalité

$$\sup_{P \in Spec(A)} (dim(A/P) + dim(B \otimes_A \kappa(P)) \leq dim(B).$$

La démonstration de l'autre inégalité est plus technique et pour ce faire, on renvoie à la bibliographie citée (cf. [2]).

3. Applications. Il est clair que la formule donnée au théorème 2.1. redonne, comme cas particulier, celle de l'algèbre symétrique d'un module de type fini. D'autres algèbres commutatives de type fini peuvent faire l'objet d'applications du théorème 2.1.

En effet, soient A un anneau et M un A-module. On note $\Gamma_A(M)$ l'algèbre des puissances divisées du A-module M (cf.[10]) et $TS_A(M)$ la sous-A-algèbre commutative de l'algèbre tensorielle $T_A(M)$ engendrée par les tenseurs symétriques (cf. [10]). On sait qu'il existe un unique morphisme (canonique) de A-algèbres $\Gamma_A(M) \to TS_A(M)$ qui applique $x^{[n]}$ sur $x^{\otimes n}$ pour tout x dans M et le lemme suivant est bien connu (cf. [10]) :

Lemme 3.1. *Soient A un anneau et M un A-module. Si M est un A-module libre, le morphisme canonique de A-algèbres $\Gamma_A(M) \to TS_A(M)$ est un isomorphisme.*

On sait que étant donné un anneau A, un A-module M et un morphisme d'anneaux $A \to A'$, il n'est pas toujours vrai que les A'-algèbres $TS_A(M) \otimes_A A'$ et $TS_{A'}(M \otimes_A A')$ soient isomorphes en tant que A'-algèbres. Nous allons supposer que cet isomorphisme se vérifie au moins dans un cas particulier, à savoir, dans le cas où M est un A-module de type fini et où le morphisme d'anneaux est du type $A \to \kappa(P)$ pour tout idéal premier P de l'anneau A. Dans ce cas on dira que l'algèbre des tenseurs symétriques $TS_A(M)$ est de *type universel*. Par exemple, si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, les algèbres $\Gamma_A(M)$ et $TS_A(M)$ sont isomorphes donc $TS_A(M)$ est de type universel. Ces considérations nous conduisent au résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soient A un anneau commutatif à élément unité vérifiant la condition (HF) et M un A-module dont l'algèbre des tenseurs symétriques est de type universel. Si la A-algèbre $\Gamma_A(M)$ est de type fini, alors $dim(\Gamma_A(M)) = dim(TS_A(M))$.*

Il est clair que, en général, l'algèbre $\Gamma_A(M)$ n'est pas de type fini même si le A-module M l'est. Par ailleurs, le fait que $\Gamma_A(M)$ soit de type fini et que l'algèbre $TS_A(M)$ soit de type universel entraînent que $TS_A(M)$ est aussi de type fini. En effet, $TS_A(M)$ s'écrit comme quotient de l'algèbre $\Gamma_A(M)$. Or, d'après le lemme 3.1., il existe un isomorphisme de $\kappa(P)$-algèbres $\Gamma_{\kappa(P)}(M \otimes_A \kappa(P)) \simeq TS_{\kappa(P)}(M \otimes_A \kappa(P))$ et puisque l'algèbre des tenseurs symétriques est de type universel, en appliquant le théorème 2.1., la démonstration de la proposition s'ensuit.

Le problème que l'on peut se poser est celui de savoir si, sous ces conditions, les A-algèbres $\Gamma_A(M)$ et $TS_A(M)$ ne sont pas isomorphes.

Une autre algèbre intéressante à examiner au point de vue de la dimension de Krull est la sous-algèbre commutative de l'algèbre extérieure engendrée par les éléments homogènes de degré pair.

Exemple 3.3. Soient A un corps commutatif de caractéristique $p > 0$ et $B = B_0 \oplus B_+$ une PD-algèbre (PD pour *puissances divisées*) sur A. Pour tout élément x dans B_+, $x^p = p!x^{[p]} = 0$ donc P contient B_+ pour tout idéal premier P de B. Ceci entraîne que $dim(B) = dim(B_0)$. Ainsi, par exemple, si A est un un corps de caractéristique $p > 0$, pour tout A-module M, $dim(\Gamma_A(M)) = dim(A)$. Et une remarque analogue vaut pour la PD-algèbre $TS_A(M)$.

Bibliographie

[1] R. Chibloun, A. Micali et J.P. Olivier, Sur la dimension des algèbres symétriques, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, Proc. Conference in Commutative Algebra and Algebraic Geometry in honor of Paolo Salmon, Torino, September 1990, to appear.

[2] R. Chibloun et A. Micali, Dimension de Krull des algèbres graduées, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1992, to appear.

[3] C. Huneke and M.E. Rossi, The dimension and components of symmetric algebras, J. Algebra 98 (1986), 200-210.

[4] P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule 146, Gauthier-Villars, Paris 1960.

[5] I. Kaplansky, Commutative Rings, The Chicago University Press, Chicago 1974.

[6] W. Krull, Idealtheorie, Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlin 1935.

[7] F.S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems, Cambridge Tracts n° 19, Cambridge University Press, Cambridg 1916.

[8] S. Malik and J.L. Mott, Strong S-domains, J. Pure and Applied Algebra 28 (1983), 249-264.

[9] A. Micali et J.P. Olivier, Théorie de la dimension dans les algèbres symétriques, Montpellier 1971 (non publié).

[10] N. Roby, Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Scient. Ecole Normale Sup. 3ème Série, 80 (1963), 213-348.

[11] P. Samuel, Lettre à l'un des auteurs (A.M.) du 25 Mars 1971.

[12] A. Seidenberg, A note on the dimension theory of rings, Pacific J. Math. 3 (1953), 505-512.

[13] A. Seidenberg, On the dimension theory of rings (II), Pacific J. Math. 4 (1954), 603-614.

N O T A S   D O   I C M S C

Nº 134/93 - ACHCAR, J.A.; SANTANDER, L.A.M. - Use of approximate Bayesian methods for the Block and Basu bivariate exponential distribution

Nº 133/93 - DELAMARO, M.E.; MALDONADO, J.C. - Uma visao sobre a aplicacao da analise de mutantes

Nº 132/93 - ACHCAR, J.A. - Approximate Bayesian methods some applications in life testing problems

Nº 131/93 - TRAINA JR., C.; CAMOLESI JR., L. - Gerenciador de esquemas de dados baseado no modelo MRO*

Nº 130/93 - NICOLETTI, M.C.; MONARD, M.C. - Inverting resolution: Plotkin's least general generalization

Nº 129/93 - FRANCO, J.L.; MONARD, M.C. - Programacao logica e fluxo em redes

Nº 128/93 - CARVALHO, A.N.; RUAS FILHO, J.G.- Global attractors for parabolic problems in fractional power spaces

A partir do nº 134/93, `a publicacao "Notas do ICMSC" subdividiu-se em tres series: COMPUTACAO, ESTATISCA E MATEMATICA.

SERIE: Estatistica

Nº 001/93 - ACHCAR, J.A. - Some aspects of reparametrization for statistical models

SERIE: Matematica

Nº 001/93 - MICALI, A.; CHIBLOUN, R. - Dimension de Krull des algebres graduees II

Nº 002/93 - MICALI, A.; DIAS, I. - Singularites et algebres symetriques