

ISSN - 0103-2577

Singularités et algèbres symétriques

ARTIBANO MICALI -

IRES DIAS

Nº 002

N O T A S D O I C M S C

Série Matemática

São Carlos

mar. / 1993

SYSNO	848156
DATA	1 / 1

Singularités et algèbres symétriques

Artibano MICALI(*)

Département des Sciences Mathématiques

Université Montpellier II

Place Eugène Bataillon

34095 Montpellier Cedex 05, France

et

Département de Mathématiques et Informatique

Faculté des Sciences et Techniques

Université de Ouagadougou

03 B.P. 7021 Ouagadougou 03, Burkina Faso

Ires DIAS

Departamento de Matemática

ICMSC-USP, C.P. 668

13560 Sao Carlos, SP

Brésil

Abstract. The main result of this paper is a characterization of singular points of a hypersurface via symmetric algebra.

Le résultat central de ce papier est de donner une caractérisation des singularités d'une hypersurface au moyen de l'algèbre symétrique. Dans ce contexte, la détermination du nilradical de l'algèbre symétrique joue un rôle fondamental.

1. L'algèbre symétrique d'un idéal. Soient A un anneau commutatif à élément unité et I un idéal de A de type fini engendré par des éléments $a_1, \dots, a_n$. L'*algèbre symétrique* de l'idéal I , notée $S_A(I)$, est la A -algèbre quotient $S_A(I) = A[X_1, \dots, X_n]/Q$ où Q est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les formes linéaires $\sum_{i=1}^n b_i X_i$ telles que $\sum_{i=1}^n b_i a_i = 0$, les coefficients $b_1, \dots, b_n$ étant dans l'anneau A . L'*algèbre de Rees* de l'idéal I , notée $R_A(I)$, est la A -algèbre quotient $R_A(I) = A[X_1, \dots, X_n]/Q_\infty$ où Q_∞ est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les polynômes homogènes f de $A[X_1, \dots, X_n]$ tels que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Comme $Q \subset Q_\infty$, il existe un morphisme surjectif de A -algèbres $S_A(I) \rightarrow R_A(I)$, que nous appellerons *morphisme canonique*, dont le noyau est Q_∞/Q et on sait (cf. [2]) que si A est un anneau

(*) Supported by FAPESP, Processo n° 92/1735-6

intègre, ce noyau est aussi le sous- A -module de torsion de l'algèbre symétrique $S_A(I)$.

Le noyau du morphisme de A -algèbres $\alpha : A[X_1, \dots, X_n, X] \rightarrow A[X]$ défini par $X_i \mapsto a_i X (i = 1, \dots, n)$ et $X \mapsto X$ est l'idéal de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n, X]$ engendré par les formes linéaires $X_i - a_i X (i = 1, \dots, n)$ et $Q_\infty = A[X_1, \dots, X_n] \cap \text{Ker}(\alpha)$. On définit alors, pour tout entier $s \geq 0$, le sous-ensemble Q_s de Q_∞ en posant $Q_s = \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - a_i X) f_i \mid \deg_X(f_i) \leq s, \forall i \right\}$, où $\deg_X$ désigne le *degré relativement à la variable X* . Les résultats suivants sont bien connus (cf. [2]) :

Proposition 1.1. (i) Pour tout entier $s \geq 0$, Q_s est un idéal de l'anneau de polynômes $A[X_1, \dots, X_n]$; (ii) $Q = Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_s \subset Q_{s+1} \subset \dots \subset Q_\infty$; (iii) s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $Q_r = Q_{r+1}$ alors $Q_r = Q_{r+1} = Q_{r+2} = \dots = Q_\infty$; (iv) pour tout entier $s \geq 1$, $IQ_s \subset Q_{s-1}$.

Par la suite, pour un idéal I de type fini d'un anneau commutatif à élément unité, nous dirons que $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\infty$ est la *chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal I* .

2. Le nilradical de l'algèbre symétrique. Tout d'abord nous rappelons le résultat suivant (cf. [2]) :

Lemme 2.1. Soient A un anneau commutatif à élément unité, I un idéal de A engendré par des éléments $a_1, \dots, a_n$ et $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\infty$ la chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal I . Une condition nécessaire et suffisante pour que un polynôme f soit dans Q_s , pour un entier $s \geq 1$ donné, est qu'il existe des polynômes $h_i (i = 1, \dots, n)$ dans $A[X_1, \dots, X_n]$ tels que $f = \sum_{i=1}^n X_i h_i$ et $\sum_{i=1}^n a_i h_i$ soit dans Q_{s-1} .

Cas où l'anneau est noethérien. Nous supposons désormais que l'anneau A soit noethérien donc il existe un entier $p \geq 0$ tel que $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_{p-1} \subset Q_p = Q_{p+1} = \dots = Q_\infty$. Si, de plus, l'anneau A est intègre et I est un idéal premier de A , le *nilradical* de l'algèbre symétrique $S_A(I)$ s'écrit $\text{Nil}(S_A(I)) = IS_A(I) \cap t(S_A(I))$ (cf. [1]), où $t(S_A(I))$ désigne le sous- A -module de torsion de $S_A(I)$. Soit $\bar{f}$ un élément de $\text{Nil}(S_A(I))$ où la barre désigne la classe d'un polynôme f de $A[X_1, \dots, X_n]$ modulo l'idéal Q . D'une part, il existe un élément c dans A , $c \neq 0$, tel que $c\bar{f} = \bar{0}$ et d'autre part, on peut écrire $\bar{f} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{h}_i$ avec $\bar{h}_i (i = 1, \dots, n)$ sans $S_A(I)$. Il s'ensuit que $c \sum_{i=1}^n a_i h_i$ est dans Q donc que

$c \sum_{i=1}^n a_i h_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ ou encore, $\sum_{i=1}^n a_i h_i(a_1, \dots, a_n) = 0$. Cette relation nous

dit que $\sum_{i=1}^n X_i h_i$ appartient à Q_∞ donc à Q_p et d'après le lemme 2.1., $\sum_{i=1}^n a_i h_i$

est dans Q_{p-1} soit encore, $\bar{f} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{h}_i$ est dans le module quotient Q_{p-1}/Q . On

a ainsi montré que $Nil(S_A(I)) \subset Q_{p-1}/Q \subset t(S_A(I))$ et l'intersection de cette double inclusion avec $IS_A(I)$ nous donne $Nil(S_A(I)) = IS_A(I) \cap (Q_{p-1}/Q)$.

Cas d'une hypersurface. Soit V une hypersurface de l'espace affine de dimension n dont l'idéal est engendré par un polynôme premier f de degré m sur un corps K de caractéristique zéro ou première avec m . Si P est l'idéal premier à l'origine de V engendré par des éléments $x_1, \dots, x_n$, P est un idéal de l'anneau des coordonnées $A = K[X_1, \dots, X_n]/(f) = K[x_1, \dots, x_n]$ de V . Considérons la chaîne canonique d'idéaux $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\infty$ associée à l'idéal P . Si l'origine est un point singulier de multiplicité $p \geq 2$, la chaîne canonique d'idéaux associée à P vérifie $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_{p-2} \subsetneq Q_{p-1} = Q_p = \dots Q_\infty$ (cf. [1]) donc

$Nil(S_A(P)) = PS_A(P) \cap (Q_{p-2}/Q)$. Montrons que $Q_{p-2}/Q \subset PS_A(P)$ donc que $Nil(S_A(P)) = Q_{p-2}/Q$. En effet, dans les générateurs de Q_{p-2} il n'y a pas de

terme constant donc tout élément de Q_{p-2}/Q s'écrit sous la forme $\sum_{k=1}^n x_k \bar{g}_k$ où les

$\bar{g}_k$ sont dans $S_A(P)$. Ceci nous fournit l'inclusion ci-dessus et ce qui précède nous conduit au résultat suivant :

Théorème 2.2. *Soit A l'algèbre affine d'une hypersurface dont l'idéal est engendré par un polynôme premier de degré m sur un corps K de caractéristique zéro ou première avec m . Si P est l'idéal à l'origine de l'hypersurface alors l'origine est un point singulier de multiplicité $p \geq 2$ si et seulement si l'algèbre symétrique $S_A(P)$ n'est pas intègre et $Nil(S_A(P)) = Q_{p-2}/Q$, où $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\infty$ est la chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal P .*

Comme cas particulier on obtient le *théorème de Risler* (cf. [7]), à savoir :

Corollaire 2.3. *L'algèbre symétrique de l'idéal maximal à l'origine d'une hypersurface irréductible est non intègre et réduite si et seulement si l'origine est un point singulier de multiplicité deux (point double).*

3. Résultats complémentaires et exemples. Dans cette série d'exemples, nous rappelons, tout d'abord, le résultat suivant (cf. [2]) :

Théorème 3.1. *Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal M . L'algèbre symétrique $S_A(M)$ est intègre si et seulement si l'anneau A est régulier.*

Ce théorème nous permet de caractériser les *points simples* d'une variété algébrique et, en particulier, ceux d'une hypersurface.

Il est intéressant de remarquer que si A est l'anneau des coordonnées d'une courbe algébrique plane alors la courbe est régulière, c'est à dire, sans points multiples si et seulement si l'anneau A est intégralement clos. Ce résultat n'est pas vrai pour des hypersurfaces dans un espace de dimension ≥ 3 . Par exemple, l'anneau des coordonnées du cône $z^2 = xy$ est intégralement clos mais l'origine est un point singulier. Néanmoins, si $P = (x, z)A$ est l'idéal de l'anneau A des coordonnées du cône engendré par x et z , l'algèbre symétrique $S_A(P)$ est intègre.

Exemple 3.2. Soit A l'algèbre affine de la courbe algébrique $x^2 = y^3$ et P son idéal à l'origine. La chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal P vérifie $Q \subsetneq Q_1 = Q_2 = \dots = Q_\infty$ donc $\text{Nil}(S_A(P)) = \{0\}$, c'est à dire, l'algèbre symétrique $S_A(P)$ est réduite mais on sait que $S_A(P)$ n'est pas intègre. L'origine étant un point singulier de multiplicité 2, cet exemple n'est qu'un cas particulier du corollaire 2.3.

Exemple 3.3. Considérons la courbe algébrique d'équation $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ qui a l'origine comme point de multiplicité 3 et soit P l'idéal de l'origine. La chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal P vérifie $Q \subset Q_1 \subsetneq Q_2 = Q_3 = \dots = Q_\infty$ donc $\text{Nil}(S_A(P)) = Q_1/Q$, où A est l'anneau des coordonnées de la courbe. En fait, on peut calculer directement les éléments nilpotents de l'algèbre symétrique $S_A(P)$ en se servant des générateurs de l'idéal Q_1 qui peuvent s'écrire sous la forme $xY - yX$, $(x^3 + xy^2 + 2xy)X + (y^3 + x^2y + x^2 - y^2)Y$ et $(3y + y^2 + 3x^2)X^2 + (3y^2 + x^2 - 3y)Y^2 + (6x + 4xy)XY$, où X et Y sont des indéterminées.

Exemple 3.4. La courbe algébrique, sur un corps commutatif K , d'équation $x^3 = y^4$ a un point de multiplicité 3 à l'origine, les générateurs de Q sont les formes linéaires $xY - yX$ et $x^2X - y^3Y$ et ceux de Q_1 sont $xY - yX$, $x^2X - y^3Y$ et $xX^2 - y^2Y^2$, où X et Y sont des indéterminées. Si P est l'idéal à l'origine de la courbe et A son anneau de coordonnées, en tant qu'idéal de $S_A(P)$, Q_1/Q est monogène et engendré par la classe du polynôme $xX^2 - y^2Y^2$ modulo Q donc Q_1/Q est un $K[t_1, t_2]$ -module libre monogène, où t_1 est la classe de X et t_2 la classe de Y modulo Q . J. Montaldi (cf. [6]) nous a fait remarquer que ceci est un résultat général, à savoir :

Théorème 3.5. Soit $A = K[x_1, \dots, x_n]$ l'algèbre affine d'une hypersurface dont l'idéal est engendré par un polynôme premier de degré m sur un corps K de caractéristique zéro ou première avec m . Si P est l'idéal à l'origine de l'hypersurface et $S_A(P) = A[t_1, \dots, t_n]$ l'algèbre symétrique du A -module P , pour tout entier $s \geq 1$, Q_s/Q est un $K[t_1, \dots, t_n]$ -module engendré par s éléments, où $Q \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_\infty$ est la chaîne canonique d'idéaux associée à l'idéal P .

En effet, on sait que pour tout entier $s \geq 1$, Q_s/Q_{s-1} est un $K[x, t]$ -module monogène et comme $P(Q_s/Q_{s-1}) = \{0\}$, alors Q_s/Q_{s-1} est un $K[t]$ -module monogène. On peut ici, soit utiliser le *théorème de préparation* soit faire une démonstration directe. Donc, Q_s/Q est un $K[t]$ -module engendré par s éléments, pour tout entier $s \geq 1$.

Bibliographie

- [1] J. Escamilla-Castillo, Algèbres symétriques et singularités, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sc. Mat. Vol. XXX (1984), 1-10.
- [2] A. Micali, Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier de Grenoble 14 (1964), 33-88.
- [3] A. Micali, P. Salmon et P. Samuel, Intégrité et factorialité des algèbres symétriques, Atas do 4^o Colóquio Brasileiro de Matemática (1965), 61-75.
- [4] A. Micali, Algebras Universales, Notas de Curso n^o 10, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, 1976, 105 p.
- [5] A. Micali, Algebras simétricas e pontos singulares de uma variedade algébrica, Conferência no ICMSC-USP, 19/09/1990.
- [6] J. Montaldi, Communication personnelle.
- [7] J. J. Risler, Sur la réduction de l'algèbre symétrique de l'idéal maximal d'un anneau local, C. R. Ac. Sc. Paris 266 (1968), 1177-1179.

NOTAS DO ICMSC

SERIE: Estatística

Nº 001/93 - ACHCAR, J.A. - Some aspects of reparametrization for statistical models

SERIE: Computacao

Nº 001/93 - MORABITO, R.; ARENALES, M.N. - An and/or graph to the container loading problem

SERIE: Matematica

Nº 001/93 - MICALI, A.; CHIBLON, R. - Dimension de Krull des algebres graduees II

Nº 002/93 - MICALI, A.; DIAS, I. - Singularites et algebres symetriques

Nº 003/93 - CARVALHO, A.N.; OLIVEIRA, L.A.F. - Delay-partial differential equations with some large diffusions

Nº 004/93 - CARVALHO, A.N. - Infinite dimensional dynamics described by ordinary differential equations