UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Realidade matemática: a controvérsia dos computadores, extraindo ordem do caos, medindo simetria, e outros ensaios

WALDYR MUNIZ OLIVA

Nº 15

NOTAS

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2577

Realidade matemática: a controvérsia dos computadores, extraindo ordem do caos, medindo simetria, e outros ensaios

WALDYR MUNIZ OLIVA

Nº 15

NOTAS DO ICMSC
Série Matemática

São Carlos
maio / 1994

NOTAS DO ICMSC

Serie Matematica

Nº 014/94 MARAR, W.L.; TARI, F. On the geometry of simple germs of corank 1 maps from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$

Nº 013/94 RODRIGUES, H.M.; RUAS FILHO, J.G. Homoclinics and sub harmonics of nonlinear two dimensional system uniform boundedness of generalized inverses

Nº 012/93 RUAS, M.A.S.; SAIA, M.J. C1-determinacy of weighted homogeneous germs

Nº 011/93 CARVALHO, A.N. Contrading sets and dissipation

Nº 010/93 MENEGATTO, V.A. Strictly positive definite Kernels on the circle

Nº 009/93 MICALI, A.; REVOY, P. Sur les algebres de Lotka-Volterra

Nº 008/93 DIAS, I. Unitary groups over strongly semilocal rings

Nº 007/93 BAPTISTINI, M.Z.; TABOAS, P.Z. On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential equations

Nº 006/93 CROMWELL, P.R.; MARAR, W.L. Semiregular surfaces with a single triple-point

Nº 005/93 GALANTE, L.F.; RODRIGUES, H.M. On bifurcation and symmetry of solutions of nonlinear Dm-equivariant equations

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

ISSN - 0103-2577

Realidade matemática: a controvérsia dos computadores, extraindo ordem do caos, medindo simetria, e outros ensaios

WALDYR MUNIZ OLIVA

Nº 15

NOTAS DO ICMSC
Série Matemática

São Carlos
maio / 1994

Realidade matemática: a controvérsia dos computadores, extraindo ordem do caos, medindo simetria, e outros ensaios *

WALDYR MUNIZ OLIVA

Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Universidade Técnica de Lisboa
Av. Rovisco Pais 1. 1096 Codex Lisboa

*Esta pesquisa foi apoiada, em parte, pela FAPESP, proc. nº 90/3918-5.

Prefácio

A presente monografia é o texto de uma conferência que pronunciei em 4 de abril de 1994, durante a Aula Magna relativa à abertura dos Cursos de Matemática, do ano letivo de 1994, no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo. Seu conteúdo é muito mais de divulgação do que formal, tendo em vista a heterogeneidade da audiência, que ia desde os estudantes recém ingressados na Universidade até aos demais estudantes e professores de graduação e pós-graduação daquela casa. A Realidade Matemática, pouco compreendida pelo público em geral e mesmo por muitos cientistas de outras áreas, é um conceito variável no tempo, extremamente vago e muito difícil de ser explicado mas que é sentido e entendido por qualquer matemático que se inicie nas atividades de investigação científica. Alguns ensaios da Realidade Matemática atual foram abordados através de exemplos concretos. Quero aproveitar este momento para transmitir os meus mais sinceros agradecimentos à Direção do ICMSC pela oportunidade que me proporcionou de poder retornar à USP, pela primeira vez após minha aposentadoria ocorrida em setembro passado.

São Carlos, abril de 1994

Waldyr Muniz Oliva

1 Realidade Matemática

Muitos dos resultados matemáticos frequentemente utilizados ou que estão em processo de serem demonstrados, fazem parte da quantidade de conhecimento e da aspiração que se manifestam na mente e nas atividades dos matemáticos contemporâneos. O que se sabe e o que se pratica num dado momento variam com a época em que estão sendo considerados.

Não se pode afirmar que Gauss conhecesse mais matemática do que Newton e que este, por sua vez, fosse mais conhecedor do que Arquimedes; simplesmente os três possuiram motivações, aspirações, interpretações e potencialidades completamente distintas. Já se mencionou, por exemplo, que os três sabiam, obviamente, que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180 graus. Arquimedes aceitava tal fato seja por observação da natureza seja deduzindo-o como um colorário dos axiomas de Euclides; Newton conhecia o mesmo resultado como uma dedução e como uma aplicação; mas, muito provavelmente, teria ponderado sobre a seguinte questão: se a afirmação é tão verdadeira, tão de acordo com o que é certo no Universo, então o Criador teve certamente de utilizá-la em sua obra. Gauss, por seu turno, sabia que o resultado era válido algumas vezes e falso em outras, dependendo da geometria que estava sendo considerada e sob que hipótese ele fora deduzido; ele se preocupava muito com essa e outras questões que contradissessem os axiomas de Euclides.

É uma tarefa particularmente difícil, interpretar a matemática de épocas bem anteriores à nossa, já que, os escritos formais e informais de que se dispõe, são insuficientes e incapazes de descrever, com detalhe, as complexas redes que constituem a consciência matemática de cada autor.

A história da matemática está repleta de casos em que uma descoberta de um cientista permanece desconhecida até que, às vezes, muito mais tarde, ela vem a ser reproduzida por outra pessoa com uma precisão impressionante. Na carta que escreveu na véspera do duelo que lhe foi fatal, Galois fez diversas afirmações, de fundamental importância, relativas às integrais de funções algébricas. Vinte anos depois, Riemann, que desconhecia a carta de Galois, descobriu novamente e provou as mesmas asserções. Como um outro exemplo nessa direção, menciona-se que Lobachevski e Bolyai estabeleceram os fundamentos da geometria não-euclideana de forma totalmente independente e, no entanto, Gauss e Schweikart já tinham obtido, dez anos antes, os mesmos resultados, e também trabalhando independentemente. É notável poder encontrar, como se desenhados pela mesma mão, projetos absolutamente idênticos, contidos na pesquisa independente de quatro cientistas.

Qual a luz que norteia a atividade matemática; essa atividade humana misteriosa, que tem continuado por séculos sob a forma de ações instintivas, dirigidas por estímulos que não se sabe se são intrínsecos ou extrínsecos!

Ao participar de uma inusitada mesa redonda havida em Barcelona, juntamente com quatro outros "medalha fields", ([1]), Alain Connes comentou ser bastante fácil para um cientista, como um químico ou um astrônomo, explicar ao público em geral, qual o objetivo de suas ciências. Em química, física, biologia ou astronomia, o objetivo é, em certo sentido, o estudo da matéria em diferentes escalas. Já a matemática, dizia Connes, apresenta dois aspectos que dificultam a explicação de seu objetivo, e que o tornam distinto dos de outras ciências. Em primeiro lugar existe o fato de que a matemática também aparece, de forma frequente, em inúmeros modelos, como uma linguagem para as outras ciências, de tal modo que os respectivos pesquisadores não a utilizam como o fazem os matemáticos. É, pois, não trivial, tentar explicar a alguém que os matemáticos estudam um aspecto da realidade que não é material; e também não é fácil tentar tornar preciso o que se entende por *realidade matemática*. Esses dois aspectos, a matemática como linguagem e a matemática como o estudo de uma certa realidade, difícil de definir, tornam seu objetivo totalmente distinto do das demais ciências. Stephen Smale, na mesma mesa redonda aduziu: mais do que a maioria dos matemáticos, inclino-me a pensar que a matemática é mais próxima da arte do que as outras ciências. Existe, no entanto, uma diferença especial; é que a matemática tende a ser correta. Raramente, enganos em matemática permanecem significativos por muito tempo. Smale foi também contundente, afirmando que a matemática pode, por outro lado, apresentar uma certa irrelevância, isto é, orientar-se para coisas que são corretas mas não importantes; e esse aspecto existe nela mais intensamente do que nas outras ciências. A seguir, Gerd Faltings acrescentou que a principal diferença entre matemática e física, por exemplo, reside no fato de que a física vive realmente da experiência. Se alguém tem uma teoria brilhante mas a experiência não a confirma, esse alguém está perdido. Já, da matemática, só se espera que seja correta, interessante e útil. Eu penso, completou Faltings, que aí reside uma grande diferença entre nós e os outros cientistas. Também Vaughan Jones interveio, a seguir, afirmando que em sua maneira de ver existe uma espécie de contínuo de tal modo que se produz diferentes espécies de matemática, desde as mais puras às mais aplicadas, isto é, até aquelas que estão mais próximas da física; e completou: todas elas são ciência. Ainda, sobre o tema, René Thom considera que a relação entre matemática e realidade é um dos problemas básicos em filosofia e mesmo em metafísica, e que está profundamente associado a uma das mais antigas questões filosóficas: a que lida com a distinção entre Platão e Aristóteles. Entende Thom que não se deve, portanto, ficar alheio a essa relevante questão. No final de uma conferência intitulada "Leaving Mathematics for Philosophy", ([1]), o mesmo René Thom enfatiza que o que é importante em ciência não é distinguir entre o verdadeiro e o falso. Isto pode parecer estranho aos matemáticos, mas, afirmou Thom, se tiver de escolher entre um erro que traga consigo um forte poder de organização da realidade e uma verdade que seja isolada e sem significado em si mesma, ele escolheria o erro e não a verdade. Existem muitos exemplos de erros que são cientificamente importantes e existem muitos, muitos exemplos em ciência, de verdades sem sentido.

No intuito de enfatizar melhor o conceito de realidade matemática recordaremos, como o fizeram Davis e Hersh (ver [2]), alguns exemplos de tópicos avançados da Teoria dos Números que, a despeito de lidar com as propriedades aritméticas dos inteiros, compreendidos que são, por qualquer criança, é uma teoria que apresenta problemas e técnicas extremamente difíceis e profundos.

É dispensável fazer comentários sobre o *Último teorema de Fermat* que afirma o seguinte: " Dado um inteiro $n > 2$, a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

não pode ser resolvida com inteiros x, y, z tais que $xyz \neq 0$". Essa conjectura (penso que ainda esteja em aberto) tem uma história muito longa e a obtenção de uma prova tem desafiado uma enorme gama de especialistas. O último deles foi Andrew Wyles cujo tropeço teria sido a utilização de um resultado cuja prova não é considerada, pela comunidade, como totalmente satisfatória. Há, neste fato, um aspecto peculiar da realidade matemática; trata-se da *confiabilidade* maior ou menor que se pode atribuir a uma dada demonstração.

Um outro tópico avançado da Teoria dos Números, e que vem sendo estudado desde meados do século XVIII, é o relativo às partições. Procura-se determinar o número $P(n)$ de modos segundo os quais um dado número inteiro n pode ser obtido como soma de inteiros que não superam n. É fácil observar diretamente que

$$P(1) = 1,\ P(2) = 2,\ P(3) = 3,\ P(4) = 5,\ P(5) = 7 \text{ e } P(10) = 42.$$

O que dizer de $P(n)$ para n qualquer?

Euclides demonstrou que o conjunto dos números primos é infinito; com efeito, argumentou Euclides, se $\{2, 3, \ldots, p_m\}$ fosse o conjunto dos primos, ordenados da maneira natural, seria fácil de ver que o inteiro

$$N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_m) + 1$$

que é maior do que p_m, não é divisível por nenhum primo e consequentemente N tem de ser primo; porém, sendo N maior do que p_m, chega-se a uma contradição. Por outro lado, a *distribuição dos primos* não apresenta, da forma aparente, padrão algum de regularidade; é uma distribuição extremamente caótica. Por exemplo, existem apenas 9 números primos entre os números 9.999.900 e 10^7; e, entre 10^7 e $10^7 + 100$, existem somente dois. Discrepâncias desse tipo aparecem sempre. Uma certa padronização começa a emergir quando se procura compreender algo sobre a função $\pi(n)$ definida como o número de primos que não superam n. Conjecturou-se que $\pi(n)$ é aproximadamente igual a $[n/\log n]$ e o famoso *Teorema dos Números Primos* diz que

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) \Big/ [n/\log n] = 1 \ .$$

Esse resultado remonta à época de Gauss com 15 anos (1792) e, somente após 100 anos, foi rigorosamente demonstrado (1896) em pesquisas independentes de Jacques Hadamard e C. de la Vallée Poussin. Trata-se de um belo exemplo de como extrair da desordem, um pouco de ordem. Sabe-se também que $\pi(n)$ é excelentemente aproximado pelo valor de

$$R(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\zeta(k+1)} \frac{(\log n)^k}{k!} \ ,$$

em que

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots$$

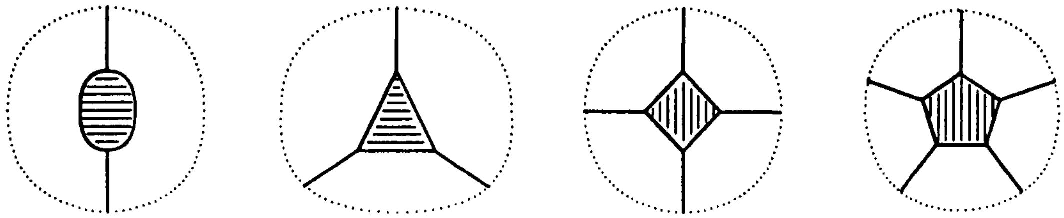
é a função de variável complexa denominada função zeta de Riemann, objeto da célebre *"Hipótese de Riemann"* que é a seguinte conjectura: "Todos os zeros z da função zeta têm parte real $Re(z) = \frac{1}{2}$". Uma das provas do Teorema dos Números Primos depende de um fato, já demonstrado, que diz que todos os zeros da função zeta localizam-se no plano complexo entre as retas paralelas $Re(z) = 0$ e $Re(z) = 1$. Segundo os especialistas a prova da Hipótese de Riemann conduziria a resultados muito precisos sobre a distribuição $\pi(n)$ dos primos. Foi um grande sucesso quando G.H. Hardy conseguiu demonstrar que existe uma infinidade de zeros da função zeta com parte real igual a $\frac{1}{2}$; mas, não se sabe se todos eles estão nessa reta paralela ao eixo imaginário. Já se constatou, diretamente, que 70 milhões de zeros têm $Re(z) = \frac{1}{2}$.

2 A Controvérsia dos Computadores

O uso dos computadores em Matemática Aplicada serve para obter uma resposta aproximada quando a teoria é incapaz de fornecer uma resposta exata. Pode-se também usar a teoria desenvolvida para provar que a resposta obtida pelo cálculo é, em algum sentido, próxima da resposta exata. A teoria porém, não dependeu da máquina para suas conclusões. No caso do estudo da distribuição dos números primos ou de problemas análogos da Teoria dos Números, o computador tem servido para gerar dados que, se bem analisados, permitem formular conjecturas para serem objeto de demonstração futura. Em nenhum desses casos poder-se-ia dizer que o rigor matemático das provas teria sido contaminado. Há casos em que a conclusão do resultado depende, por exemplo, de se mostrar que uma enorme e complexa expressão é não nula em determinado ponto de seu campo de definição; se for assim, o autor poderá, eventualmente, ter somente chegado a uma evidência numérica do teorema e não a uma prova rigorosa.

Em boa parte das pesquisas de ciência aplicada, em que o modelo matemático descreve aproximadamente a realidade e a parte experimental controla, paralelamente, os resultados obtidos, o uso da máquina não invalida o trabalho científico.

A *controvérsia dos computadores* teve lugar após 1976, ocasião em que Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma prova do clássico problema das 4 cores; o resumo feito por Davis e Hersh permite fazer com que o leitor tenha a percepção do porquê de tal controvérsia. A *conjectura das 4 cores* diz que todo mapa geográfico, desenhado sobre uma superfície plana ou sobre uma esfera, poderá ser colorido usando-se no máximo 4 cores de modo que dois países com fronteira comum não podem ter a mesma cor exceto se a fronteira comum for constituida de um único ponto. Embora a questão tenha sido anunciada há muito tempo atrás, somente foi colocada como conjectura matemática em 1852, por Francis Guthrie. O matemático inglês Arthur Cayley propôs o problema na London Mathematical Society em 1878 e, em menos de um ano, Arthur Kempe, advogado londrino e membro da sociedade, publicou um artigo sobre a questão. A prova não estava correta, tendo o erro sido apontado 12 anos depois. O problema permaneceu em aberto, portanto, de 1890 a 1976. Mas, como disse René Thom, um erro pode trazer consigo idéias cientificamente importantes; e, no caso, o trabalho de Kempe teve esse mérito. Para explicar seu argumento, Arthur Kempe introduziu o conceito de "mapa normal" no qual um ponto não pode pertencer a mais de 3 regiões e não há região alguma que circunscreva outra. Além disso, ele pôde mostrar que a todo mapa corresponde um mapa normal que requer no mínimo o mesmo número de cores requerido pelo mapa inicial; portanto, bastará provar a conjectura para mapas normais. Kempe mostrou, corretamente, que em todo mapa normal existe pelo menos uma região com 5 ou menos vizinhos; isso implica que uma das seguintes 4 configurações (ver esquema a seguir) deve necessariamente aparecer em qualquer mapa normal:



O conjunto daquelas que devem necessariamente aparecer chama-se "conjunto inevitável" de configurações. O método usado foi o da redução ao absurdo, supondo que são necessárias pelo menos 5 cores para colorir um mapa normal. A seguir Kempe tentou mostrar como, em cada caso, poder-se-ia construir um outro mapa com menos países e que deveria ser, novamente, penta-cromático. Se tal construção puder ser levada a termo dir-se-á que a configuração inicial é uma configuração "redutível". Então a idéia central era exibir um conjunto inevitável de configurações redutíveis; isso levaria a uma contradição porque então poderíamos concluir que dado um mapa penta-cromático pode-se construir, a partir dele, um outro mapa penta-cromático com menos regiões e após um número finito de etapas chegaríamos a um mapa penta-cromático com menos do que 5 regiões, o que é uma contradição. Infelizmente, para Kempe, o argumento da redutibilidade estava errado no caso da região com 5 vizinhos. A prova de Appel e Haken usa, novamente, a idéia de exibir-se um conjunto inevitável de configurações redutíveis; mas, em lugar das 4 configurações da prova de Kempe, o conjunto inevitável contém milhares de configurações, a maioria delas muito complicadas e a prova da redutibilidade só foi possível com o uso de um computador de grande porte. Como se observa, a maneira de utilizar o computador, neste último caso, é, em princípio, bem diferente daquelas anteriormente mencionadas porque o uso da máquina aparece como parte da prova que os autores consideram como rigorosa. Segundo eles, os "referees" do artigo usaram, em sua tarefa, um programa de computador diferente para verificar a validade do procedimento de redutibilidade. Logo após o anúncio desse trabalho, alguns filósofos declararam que aceitar tal demonstração significa mudar o sentido da palavra teorema e também o conceito de prova. Aquí começou a controvérsia que reside no fato novo no qual a aceitação de uma prova depende não só da confiança que se possa ter nos argumentos matemáticos apresentados, mas, também na crença de que os computadores usados façam precisamente o que os autores desejam. Appel e Haken argumentam que o fato de o computador realizar em poucas horas o trabalho que o homem levaria uma vida inteira não muda o conceito de demonstração; o que muda, dizem eles, não é a teoria mas sim a prática da matemática; e prosseguem dizendo que, quando uma prova é muito longa e cheia de cálculos, pode também ser argüido que ainda que o trabalho manual seja possível, a probabilidade de haver erro humano é muito maior do que a do aparecimento de erros provenientes do trabalho do computador.

Na mesa redonda, já mencionada, comentou-se que estaríamos vivendo um momento significativo para a matemática, no que tange à influência dos computadores. Smale manifestou-se dizendo que tem uma forte convicção de que não só os computadores ajudam tremendamente no dia a dia da prática da matemática mas, também, que sua influência está mudando toda a estrutura desta ciência. Referiu-se, em particular, ao problema "Is $NP \neq P$?" ([1],[3]), da ciência da computação, que estaria criando um novo modo de pensar sobre assuntos de matemática, sobre a maneira de fazê-la, sobre a ênfase nos algoritmos, fatores que se constituem, a seu ver, no maior impacto que os computadores já provocaram. Jones disse, a seguir, que utiliza muitíssimo os computadores mas que tem, sobre eles, opiniões talvez contraditórias; uma coisa que eu não aprecio, acrescentou, é ver provas em que há a ajuda da máquina. A última prova do teorema das 4 cores deixou-me muito descontente; com uma bela prova o resultado teria tido um impacto muito mais significativo. Pode ocorrer que um computador cometa erros e que os repita, não importa quantas vezes venhamos a rodar um dado programa. Pode haver um defeito elétrico ou algum outro. Nós não podemos, portanto, neles confiar, de forma absoluta, nem realmente compreendê-los. Por outro lado, eu faço inúmeros cálculos de polinômios e de nós, nos quais nunca acreditaria se fossem computados a mão. Penso ser esta uma interessante atitude. Na verdade, no momento, meu principal uso é em simulações; estas, sem dúvida, irão propiciar a criação de inúmeros temas de alto interesse na ciência em geral, porém, talvez, um pouco menos em matemática pura. Mas, prosseguiu Jones, o problema que estou olhando agora, é topológico e tem a ver com cadeias de D.N.A. Antes do aparecimento dos computadores, era impossível efetuar as simulações que agora usamos para tentar entender todo o processo de formação dessas cadeias; porém, nem sempre podemos estar seguros de que nossos programas de computação estejam funcionando corretamente; há problemas semelhantes quando se pretende resolver algumas equações diferenciais complexas e mesmo a equação de Navier-Stokes perto de turbulências. Como é que podemos saber se o que se obtém tem a ver realmente com a turbulência? não seria, por exemplo, algo criado pelo próprio computador? Novamente, afirmou Jones, é muito importante obter figuras, de algum modo, para, visualmente, poder observar o que está se passando. Resumindo: todas essas questões científicas que provêm do uso de computadores terão, sem dúvida alguma, um grande impacto na ciência. A controvérsia ganhou mais corpo quando Thom retomou a palavra e disse: Eu não gosto de computadores. Essencialmente porque eles reduzem qualquer forma a um conjunto de "pixels"; assim são também a discretização, a digitalização, etc. Eu não considero que isso seja progresso; eu penso, ao contrário, que é um retrocesso. Mas, evidentemente, eu estou sozinho neste modo de pensar e é difícil explicar meu ponto de vista. Jones, retomando a palavra, retrucou: seria dificílimo resolver meus problemas sem o computador; eu, por exemplo, não conseguiria. Portanto, sinto-me feliz por poder recorrer a eles, mesmo sendo digitais, para tentar achar uma solução, pois, de outra maneira seria impossível. A discussão tomou um rumo muito interessante, com manifestações dos diversos "medalha fields" mostrando bastante bem, entre outras coisas, como se encontra, atualmente, toda essa controvérsia dos computadores. O assunto, na mesa redonda, passou, em seguida, a várias outras considerações e, inclusive, a uma análise do impacto provocado pelos fenômenos caóticos.

3 Extraindo Ordem do Caos, Medindo Simetria e Outros Ensaios

Na natureza, os fenômenos caóticos são extremamente difíceis de analisar; um dos exemplos marcantes é o do movimento dos corpos celestes. O problema dos n corpos, que pretende analisar as interações gravitacionais entre eles, visando prever suas trajetórias, é de uma complexidade extraordinária, com alguns movimentos altamente desordenados, mesmo no caso $n = 3$. Somente é possível dizer algo mais significativo, em alguns modelos simplificados. Analogamente, em hidrodinâmica, é impossível prever o comportamento de um fluído em movimento, dado o excesso de fatores e de acidentes que condicionam a formação de turbilhões e turbulência; estes são também exemplos de processos desordenados. O modelo dos vórtices que é uma forte simplificação do movimento planar e que no caso de 3 vórtices fornece movimentos bem regulares, já que se trata de um modelo hamiltaniano chamado integrável, apresenta grandes dificuldades no caso de 4 vórtices que já não é integrável, e, mais do que isso apresenta regiões com comportamento caótico. (ver [4],[5],[6]). Visando melhor compreender esses e outros processos desordenados os especialistas vêm tentando estabelecer uma definição matemática para o caos, o que não tem sido uma tarefa fácil, apesar dos progressos obtidos nas últimas duas décadas. De uma forma geral, os fenômenos caóticos são aqueles nos quais pequenas diferenças nas causas provocam grandes diferenças nos efeitos. Novas ferramentas matemáticas têm surgido na teoria dos sistemas dinâmicos determinísticos e estocásticos; as bifurcações, a hiperbolicidade, os fractais, os atratores estranhos, a percolação, etc, são todos eles conceitos que têm trazido um certo sucesso para uma melhor compreensão dos processos desordenados. É bem conhecido que num sistema mecânico muito simples como um pêndulo sujeito a ação de uma força do tipo periódica no tempo, apresenta uma transformação de Poincaré com uma órbita homoclínica transversal e cujo algoritmo de interação leva ao aparecimento do que se denomina um "horseshoe" de Smale; sempre que surge um tal fenômeno sabe-se que a transformação apresenta uma infinidade de pontos periódicos instáveis e que tornam impossível uma análise quantitativa. Por essa razão costuma-se dizer que o pêndulo forçado é caótico. O "horseshoe" de Smale aparece no movimento de um pequeno vórtice que se encontre na presença de 3 outros, os 4 com intensidades positivas, embora a constatação tenha dependido do uso de computadores. Resta a questão, ainda aberta, da descoberta de uma prova analítica para esse problema. Se o modelo admitir que os vórtices tenham massas, há também provas ou evidências numéricas de que o caos está presente, corroboradas, aliás, por verificações experimentais. Com a introdução, nos modelos matemáticos, de elementos aleatórios, pode-se complicar certos algoritmos fazendo intervir uma sucessão de números ao acaso; e, com isso, tende-se a imitar certos fenômenos desordenados através de simulações bastante engenhosas.

Segundo a filosofia de Platão, o método que conduz ao conhecimento autêntico consiste em descobrir na multidão dos fenômenos, certas formas matemáticas que Deus impôs à matéria. Kepler, Newton, Poincaré e Einstein, entre outros, realizaram um tal programa de procurar toda uma harmonia que é subjacente aos fenômenos que possuem aparência desordenada. Porém, no dizer de Poincaré, os próprios algoritmos criam muitas vezes certos "monstros" quando se trata de olhar para a região da qual se aproximam assintoticamente as trajetórias de certos pontos. Essas regiões são os atratores, que tanto podem ser muito simples como é o caso de certos sistemas integráveis ou regulares, como podem ser geométricamente muito complexos como ocorre nos sistemas caóticos. No caso, por exemplo, do famoso atrator de Lorenz, que provem de interações, no espaço tri-dimensional, de uma transformação definida por 3 funções algébricas muito simples, o atrator é bem estranho; um determinado ponto do espaço, iterado pela transformação, faz um certo número n_1 de voltas numa região, digamos, a direita do observador, depois vai à esquerda e faz n_2 voltas, em seguida retorna à direita fazendo n_3 voltas e assim sucessivamente, com uma alternância que tem uma aparência aleatória. Se o ponto de partida é deslocado ligeiramente, a trajetória fará o mesmo tipo alternado de percurso mas com uma sequência $n_1, n_2, n_3, \ldots$ completamente diferente; esta é uma característica dos sistemas caóticos: a *sensibilidade em relação às condições iniciais*. Não se trata de descontinuidade em relação às condições iniciais mas de uma forte sensibilidade em relação ao início do processo, pois na prática é impossível conhecer com precisão a variação atribuída aos dados iniciais. Um outro fenômeno desse gênero é observado num tipo de bilhar, estudado por Sinai, que apresenta um obstáculo em sua parte central, e que faz divergir, muito rapidamente, as trajetórias de duas bolas que partem de um mesmo ponto com direções iniciais extremamente vizinhas. Após algumas poucas reflexões, as duas trajetórias são totalmente distintas e nada pode ser previsto com precisão, senão durante um tempo muito pequeno; no caso da Transformação de Lorenz que surgiu de um modelo meteorológico, essa impossibilidade de compreensão das trajetórias, explica, por assim dizer as dificuldades que existem na precisão do tempo em meteorologia. Como procurar uma ordem dentro desses fenômenos caóticos? Trata-se de olhar as coisas no sentido de Platão e tentar extrair uma certa harmonia estética a partir do caos. Há muitos fenômenos com aparência muito complexa e aparentemente inabordável mas que possuem uma ordem subjacente. Um clássico exemplo é o do movimento browniano que dá uma boa ilustração do que se chama muitas vezes: a dialética da ordem e da desordem. O fenômeno é fisicamente definido como uma agitação desordenada manifestada por partículas microscópicas em suspensão num fluido. É uma imagem absoluta da desordem; a toda escala de tempo, por menor que seja, corresponde uma mudança da direção e velocidade da partícula. Wiener, em 1923, foi muito bem sucedido em definir um modelo matemático para esse tipo de movimento. Ele postulou que, em cada instante, a partícula fazia, por assim dizer, suas escolhas ao acaso. Há, no entanto, um paradoxo que reside no fato de que as trajetórias desse movimento possuem propriedades notáveis; tudo se passa como se essa desordem radical fosse capaz de gerar uma ordem bem definida, ou seja, é como se estivéssemos extraindo ordem do caos.

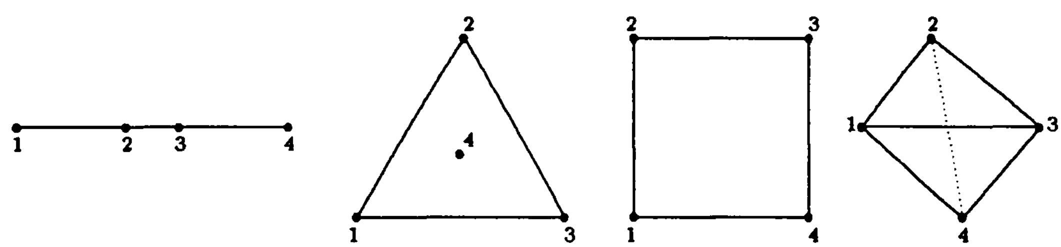
De um modo geral os físicos e matemáticos procuram descobrir, em relação aos fenômenos naturais, por mais complexos que sejam, alguma regularidade e novas simetrias, muitas vezes sutís e abstratas, mas que suscitam em alguns casos uma estética maravilhosa; restringindo-me à geometria há dois exemplos que vale a pena mencionar. Um deles é o Teorema de Pappus válido no plano projetivo real; *"são dados, arbitrariamente, 2 retas num plano e 6 pontos $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ ao acaso, os três primeiros na primeira reta e os demais na segunda; então as interseções $P_1Q_2 \cdot P_2Q_1$, $P_1Q_3 \cdot P_3Q_1$ e $P_2Q_3 \cdot P_3Q_2$ são 3 pontos colineares"*. É bastante claro que com o uso do Teorema de Pappus obtém-se uma regularidade notável a partir de dados possuidores de grande arbitrariedade. Um segundo exemplo refere-se a um polígono arbitrário, estrelado, sem nenhuma regularidade, com vértices aleatoriamente escolhidos. Se substituirmos tal polígono por um outro cujos vértices são os meios dos lados do polígono inicial e se iterarmos esse procedimento, pode-se verificar que, genericamente, os polígonos sucessivos acabam por se aproximar de uma curva convexa com aparência de uma elipse ([2]).

Voltando aos fenômenos naturais, algumas das técnicas mais usadas em sua análise são aquelas do tipo estatístico. Esses métodos procuram definir comportamentos médios e tornam-se tanto mais eficazes quanto maior for o número de elementos individuais que intervêm no processo. Sofisticando ainda mais esse "approach" chega-se à *mecânica estatística* cujos métodos foram introduzidos por Boltzmann no final do século passado. Visa-se procurar compreender a matéria numa escala macroscópica (i.é, aquela do nosso universo quotidiano) partindo-se de uma descrição microscópica (átomos, moléculas, etc.); ela se distingue da termodinâmica clássica, mais antiga, que visa também estudar as propriedades macroscópicas, mas, ignorando a realidade microscópica. A mecânica estatística estuda fenômenos que utilizam números gigantescos de entidades individuais, da ordem de 10^{23}. As médias, por isso, são muito confiáveis e as flutuações relativamente às médias são muito fracas em valores relativos; mais precisamente, as flutuações médias em relação às médias tendem a zero quando o número de indivíduos tende a ∞. Graças à mecânica estatística tem sido possível estudar problemas muito difíceis como os de materiais desordenados (polímeros, materiais porosos, vidros, etc.) além da transição de fase e fluidos densos. Ela tem se beneficiado dos instrumentos computacionais para efetuar simulações e também dos instrumentos técnicos como a renormalização, entre outros.

Henry Poincaré, um dos maiores matemáticos da era moderna, aparece hoje como o precursor dos trabalhos atuais sobre o determinismo e a predictibilidade, todos eles suscitados pela noção de sensibilidade em relação às condições iniciais, já mencionada. O estudo dos *atratores estranhos*, (ver [7]), alguns dos quais Poincaré chamava de monstros, mostra que a desordem geométrica aparente não é total; eles ainda guardam traços da ordem matemática que é presente nas equações que o definem; sua estrutura aparece como que dobrada e redobrada sobre si mesma uma infinidade de vezes e recebem o nome de *fractais*. Quando observadas atentamente, nota-se que eles possuem um aspecto que se conserva, não importando o aumento que se considere para observá-lo. Uma das características básicas está no fato de sua dimensão topológica ser fracionária e não inteira. Após 1975 quando B. Mandelbrot inventou o nome fractal, muitas figuras, de rara beleza, podem ser construidas quando se desfruta de impressoras capazes de colorir os "pixels" de forma adequada, obtidas de iterações de certas funções do plano no plano e mesmo quando se utilizam as iterações dadas pelo método de Newton para obtenção de zeros de certas funções. Ao contrário do que pensavam Baltzmann e Gibbs que o grande número de moléculas é que era responsável pelo caos reinante num gás em equilíbrio, o caos determinista surge em problemas, mesmo, com um número reduzido de graus de liberdade. Essa parece ser a razão pela qual, somente a partir dos anos 70, os pesquisadores começaram, verdadeiramente, a retomar os trabalhos de Poincaré sobre o caos. Os métodos da mecânica estatística passaram então a olhar para os sistemas muito simples e deterministas; lança-se mão da *ergodicidade*, propriedade que permite o uso de métodos estatísticos em sistemas que obedecem a leis deterministas. No bilhar de Sinai, já mencionado, pode-se indagar, por exemplo, qual o valor médio do ângulo de impacto da bola com as paredes laterais; em lugar de calcular a trajetória ao longo do tempo e deduzir essa *média temporal*, a ergodicidade permite considerar um grande número de bilhares idênticos cada um deles com uma condição inicial tomada ao acaso e calcula-se então o ângulo do primeiro impacto para cada um e calcula-se *essa média espacial.* Acontece que as duas médias são as mesmas. Sinai foi capaz de mostrar que seu bilhar era ergódico. Essa propriedade parece que existe na maior parte dos casos estudados em mecânica estatística e não é fácil comprová-la rigorosamente. A ergodicidade significa também que a bola do bilhar de Sinai passará, ao longo do decurso do tempo, por "quase" todos os pontos do bilhar, para "quase" todas as condições iniciais de posição e velocidade da bola. A *teoria ergódica*, que tem seus primórdios nos trabalhos de G.D. Birkhoff, junta-se à teoria dos sistemas dinâmicos; ambas vêm caminhando paralelamente, dando sua contribuição ao estudo dos fenômenos caóticos com resultados impressionantes nas últimas duas décadas.

O movimento dos corpos celestes foram sempre considerados como um exemplo da regularidade até que Poincaré colocou em evidência a complexidade das equações da mecânica celeste. Deu também início ao estudo da teoria de perturbações que mais recentemente desembocou na chamada *teoria KAM* (Kolmogorov, Arnold, Moser) de grandes repercussões em sistemas de 2 e mais graus de liberdade, e que mostram os limites de certos métodos utilizados pelos astrônomos para calcular trajetórias planetárias. Parece que um grande número de corpos do sistema solar, tais como cometas, asteróides e mesmo planetas, têm movimentos caóticos, desde que se considerem escalas de tempo muito maiores do que a escala de uma vida humana, na qual os movimentos desses corpos aparentam uma regularidade perfeita. A mecânica celeste, modelo de ciência de previsão, por excelência, mostra portanto seus limites, não pelos métodos que usa mas, pela própria natureza dos fenômenos com que lida. A compensação é que ela carrega consigo dinâmicas extremamente complexas, havendo necessidade, portanto, de uma forte interação com a teoria dos sistemas dinâmicos que dela se originou há cerca de 100 anos.

No estudo do movimento de N partículas de massas iguais e que se repelem duas a duas, sujeitas ao potencial do tipo $\frac{1}{r^\alpha}$, (coulombiano se $\alpha = 1$) pode-se tentar imaginar a forma, a menos de uma escala, do poliedro obtido com o fecho convexo dos pontos do espaço que representam as partículas. É extremamente curiosa a análise que se pode fazer mostrando que existem formas limites, chamadas *formas assintóticas*, para as quais tendem as formas dos poliedros; pode-se provar que dada uma forma arbitrária qualquer, com N pontos, existe sempre uma condição inicial (posições e velocidades) cujo movimento tem como forma assintótica, a forma dada. Porém, se o potencial é de muitíssimo longo alcance, como o potencial $V = -\ln r$, somente algumas formas assintóticas são possíveis e são dotadas de altíssimo grau de simetria. Assim por exemplo com 3 partículas, não alinhadas, o triângulo isóceles nunca é forma assintótica mas, o é, o triângulo equilátero. No caso de 4 partículas não pertencentes a um mesmo plano, a única forma assintótica é o tetraedro regular. Aliás, todos os polígonos regulares e todos os poliedros de Platão são formas assintóticas. Para tempos muito grandes, o movimento das partículas aproxima-se do movimento de um sistema gradiente sobre a esfera $\sum_{i=1}^{N} |u_i|^2 = 1$ em que $u_1, \ldots, u_N$ são pontos com centro de massa na origem. A função gradiente é dada pelo produto dos quadrados das distâncias mútuas entre os N pontos ; e, pela propriedade fundamental dos sistemas gradientes, ela aumenta ao longo das trajetórias na medida em que o tempo aumenta; e, os pontos de equilíbrio do sistema, para os quais tendem as várias soluções, são, precisamente, as formas assintóticas. Ora, o valor dessa função serve para medir as simetrias e temos constatado, nos vários exemplos, que quanto maior o valor da função, maior é a simetria no sentido clássico, isto é, maior é o grupo de simetria da forma assintótica. Observe-se porém que, dada uma figura qualquer, é extremamente simples calcular o valor da função gradiente. Por exemplo, no caso de 4 partículas e na ordem crescente do valor da função gradiente π, as *únicas* formas assintóticas são:



e, quanto maior π maior o grupo de simetria. Além disso, o tetraedro regular é, não só, um máximo local para π mas, também, é o seu máximo global. No caso em que N é superior a 4, procura-se, atualmente, estudar a variação da função gradiente nas vizinhanças de seus pontos estacionários e sua relação com as simetrias das formas assintóticas representadas por esses pontos.

References

[1] C. Casacuberta, M. Castellet, *Mathematical Research Today and Tomorrow*, Lect. Notes in Math., 1525, Springer Verlag 1992.

[2] P.J. Davis, R. Hersh, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston 1981.

[3] M. Shub, "Mysteries of Mathematics and Computation", *The Mathematical Intelligencer*, vol 16 #1, 1994.

[4] H. Aref, N. Pomphrey, "Integrable and Chaotic Motions of 4 vortices I. The case of Identical Vortices", *Proc. R. Soc. London, Sr A*, vol 380, 1982, pp. 359-387.

[5] S.L. Ziglin, "Non-Integrability of a Problem on the Motion of Four Point Vortices", *Soviet. Math. Dokl.*, vol 21, 1, 1980, pp. 296-299.

[6] M.S.A.C. Castilla, V. Moauro, P. Negrini, W.M. Oliva, "The four positive vortices problem: regions of chaotic behavior and the non-integrability", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol 59, nº 1, 1993, pp 99-115.

[7] *La Recherche: nº 232 mai 1991* "La Science du Désordre", vol. 22.