



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
ISSN 0103-2577

DEDALUS - Acervo - ICMSC



30300036314

L'Obstruction d'Euler Locale d'une Application

Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Nº 264

NOTAS

Série Matemática



São Carlos – SP
jul./2006

L'Obstruction d'Euler Locale d'une Application

Nivaldo de Góes Grulha Júnior *

Résumé

Notre objectif dans ce travail est de présenter une généralisation pour l'obstruction d'Euler locale d'une fonction holomorphe singulières à l'origine pour le cas d'une application holomorphe $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, où $(V, 0)$ est un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension $n \geq k$. Le résultat principal est une formule (Théorème 5) que fait relation entre l'obstruction d'Euler locale (par k -champs) et l'obstruction d'Euler relative à f .

Introduction

L'obstruction d'Euler locale a été définie par MacPherson [M] comme l'un des ingrédients de sa preuve de la conjecture de Deligne et Grothendieck concernant l'existence et l'unicité des classes caractéristiques des variétés algébriques complexes singulières. Elle a été ensuite définie par la théorie d'obstruction par J.-P. Brasselet et M.H. Schwartz [BS] pour montrer que les classes de Schwartz d'un variété singulière coïncident avec les classes de MacPherson. Par la suite, Gonzalez-Sprinberg et Verdier [GS] ont montré une formule pour l'obstruction d'Euler locale en fonction des classes de Chern de fibrés vectoriels sur le transformé de Nash de la variété algébrique. Pour des singularités génériques, l'obstruction d'Euler s'exprime en termes d'invariants polaires, d'après un résultat de Lê et Teissier [LT].

Dans [BLS] J.-P. Brasselet, Lê D. T. et J. Seade donnent une formule du type de Lefschetz donc plus topologique, pour l'obstruction d'Euler locale, alors que la formule de [LT] est une formule complètement algébrique. La formule prouvée revient à dire que l'obstruction d'Euler locale, comme fonction constructible, satisfait la condition d'Euler (en théorie bivariante) en ce qui concerne les formes linéaires génériques. L'article [BMPS] est une suite naturelle de [BLS] où le but est de comprendre ce qui empêche l'obstruction d'Euler locale de satisfaire la condition d'Euler en ce qui concerne les fonctions holomorphes singulières à l'origine. Le défaut est appelé obstruction d'Euler locale de f .

*recherche soutenue par la CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) numéro 1198/05-0 et la FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) numéro 03/13929-6.

J.-P. Brasselet, J. Seade et T. Suwa ont donné une définition pour l'obstruction d'Euler locale associée à un k -repère sur une variété analytique [BSS]. Dans le même esprit, notre objectif dans ce travail est de présenter une généralisation possible pour [BMPS]. On donne une formule (Théorème 5) pour représenter l'obstruction d'Euler d'une application holomorphe $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, où $(V, 0)$ est un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension $n \geq k$.

1 Modification de Nash

Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe n et $(M, 0)$ un germe de variété complexe lisse de dimension complexe m . La Grassmannienne des n -plans de $\mathbb{C}^m$ est notée $G(n, m)$. Considérons le fibré en Grassmanniennes des n -plans (complexes) de TM , noté G . La fibre G_x au dessus de $x \in M$ est l'ensemble des n -plans de $T_x M$, elle est isomorphe à $G(n, m)$. Un élément de G est noté (x, P) où $x \in M$ et $P \in G_x$. Sur la partie lisse de V , on peut définir l'application de Gauss $\phi : V_{reg} \rightarrow G$ de la façon suivante :

$$\phi(x) = (x, T_x V_{reg}).$$

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \phi & \downarrow \\ V_{reg} & \longrightarrow & M \end{array}$$

Définition 1 La modification de Nash $\tilde{V}$ est définie comme l'adhérence de l'image de ϕ dans G . Elle est munie d'une projection analytique naturelle $\nu : \tilde{V} \rightarrow V$.

Le fibré tautologique T sur G est défini de la manière suivante: La fibre T_p de T , au dessus d'un point $p = (x, P) \in G$ est l'ensemble des vecteurs v du n -plan P .

$$T_p = \{v \in T_x M : v \in P, x = \nu(x, P)\}$$

On définit le fibré $\tilde{T}$ de base $\tilde{V}$ comme la restriction de T sur $\tilde{V}$, on a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{V} & \hookrightarrow & G \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ V & \hookrightarrow & M \end{array}$$

Un élément de T s'écrit : (x, P, v) où $P \in G_x$ et $v \in P$.

2 L'Obstruction d'Euler Locale

Notons $\{V_\alpha\}$ une stratification de Whitney de M compatible avec V . On suppose aussi que l'origine $\{0\}$ est une strate. Notons SV l'union des fibrés tangents à toutes les strates, $SV = \cup TV_\alpha$, que l'on peut regarder comme un sous-ensemble du fibré tangent $TM|_V$.

Définition 2 Soit v une section de TM au dessus d'une partie A de M , on dit que le champ v est stratifié si pour $x \in V_\alpha \cap A$ on a $v(x) \in T_x V_\alpha$, où V_α est la strate contenant x .

Soit $B_\epsilon(a)$ la boule dans M centrée en a et de rayon ϵ (on a localement identifié M à $\mathbb{C}^m$).

Définition 3 On dit que le champ de vecteurs v est radial en a si v est un champ stratifié et si il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que le champ v est sortant de $B_\epsilon(a)$, pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Lemme 1 ([BS], Proposition 9.1) Un champ de vecteurs stratifié v non nul défini sur un sous-ensemble $A \subset V$ admet un relèvement canonique $\tilde{v}$ comme section non nulle de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(A)$.

Dans notre cas, pour un point $\tilde{x}$ de $\tilde{V}$ tel que $x = \nu(\tilde{x})$, on définit $\tilde{v}(\tilde{x}) \in \tilde{T}$ par $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, P, v)$, où $P = T_x(V_{reg})$ si $x \in V_{reg}$, sinon on a $P = \lim_{x_i \rightarrow x} T_{x_i}(V_{reg})$ où x_i est une suite de points de V_{reg} tendant vers x , $v(x) \in T_x(V_\alpha)$ où V_α est la strate qui contient x mais par la condition (a) de Whitney $T_x(V_\alpha) \subset P$, donc $v \in P$.

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \xrightarrow{\nu_*} & TM|_V \\ \tilde{v} \updownarrow & & \updownarrow v \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\nu} & V \end{array}$$

Si $\tilde{x}$ est un point de $\tilde{V}$ tel que $\nu(\tilde{x}) = x$, alors $v(x) \in T_x(V_\alpha) \subset T_x M$. On pose $\nu_*(\tilde{v}(\tilde{x})) = (x, v(x))$

Théorème 1 (Bertini-Sard voir [V]) Si $\{V_\alpha\}$ est une stratification de Whitney de V , pour ϵ suffisamment petit (et positif) la sphère $\partial B_\epsilon(0)$ est transverse aux strates V_α .

Dans toute la suite, nous noterons $B_\epsilon = B_\epsilon(0)$.

La définition suivante est due à J.-P. Brasselet et M.H. Schwartz ([BS], Proposition 10.1). La définition originale est due à R. MacPherson [M].

Définition 4 Soit v un champ de vecteurs radial sur $V \cap \partial B_\epsilon$ et $\tilde{v}$ le relèvement de v sur l'ensemble $\nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)$. Le champ $\tilde{v}$ définit un cocycle d'obstruction $Obs(\tilde{v})$, mesurant l'obstruction pour étendre $\tilde{v}$ comme section non-nulle de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(V \cap B_\epsilon)$:

$$Obs(\tilde{v}) \in Z^{2n}(\nu^{-1}(V \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)).$$

L'obstruction d'Euler locale $Eu_V(0)$ est l'évaluation du cocycle $Obs(\tilde{v})$ sur la classe fondamentale $[\nu^{-1}(V \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)]$, autrement dit :

$$Eu_V(0) := \langle Obs(\tilde{v}), [\nu^{-1}(V \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)] \rangle.$$

Le calcul de l'obstruction d'Euler Locale par la définition originale n'est pas facile, Lê et Teissier [LT] ont montré une formule exprimant $Eu_V(0)$ en fonction des multiplicités polaires, laquelle permet d'effectuer le calcul pour des exemples concrets.

Théorème 2 (Formule de Lê-Teissier)

$$Eu_V(0) = \sum (-1)^{k-1} m_{d-k-1}(V)$$

où $m_i(V)$ est la multiplicité de la i -variété polaire en 0.

Remarque 1 Comme propriétés importantes de l'obstruction d'Euler locale on a les résultats suivants :

- L'obstruction d'Euler locale en un point lisse est égale à 1.
- L'obstruction d'Euler locale en un point d'une courbe est la multiplicité du point sur la courbe [GS].
- Un autre résultat très important sur l'obstruction d'Euler locale, montré d'abord par J.-P. Brasselet et M.H. Schwartz [BS], puis par plusieurs auteurs, est que l'obstruction d'Euler locale est constante le long de chaque strate d'une stratification de Whitney.

3 Résultats antérieurs

La formule principale prouvée en [BLS] est une formule de type Lefschetz, pour l'obstruction d'Euler locale. Elle s'avère être équivalente à dire que l'obstruction locale d'Euler, comme fonction constructible, satisfait la condition locale d'Euler (en théorie bivariante) en ce qui concerne les formes linéaires génériques. Dans [BMPS] le but est de comprendre ce qui empêche l'obstruction locale d'Euler de satisfaire la condition locale d'Euler en ce qui concerne les fonctions qui sont singulières à l'origine. Ceci est mesuré par un invariant (ou "défaut") de telles fonctions dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Théorème 3 ([BLS]Théorème 3.1) Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe comme ci-dessus et $\{V_\alpha\}$ une stratification de Whitney de V . Soit $l : U \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire générique, où U est un voisinage ouvert de 0 dans M . On a :

$$Eu_V(0) = \sum \chi(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)).Eu_V(V_\alpha)$$

où ϵ est suffisamment petit, $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est situé près de l'origine et $Eu_V(V_\alpha)$ est l'obstruction d'Euler de V en n'importe quel point de la strate V_α .

Exemple 1 Considérons la fonction $f(x, y, t) = y^2 - x^3 - t^2x^2$ et notons $V = f^{-1}(0)$. Considérons la stratification définie par $\{V_0 = \{0\}, V_1 = \{\text{axe des } t\}, V_2 = V_{reg}\}$. C'est une stratification de Whitney de V . Considérons la forme $l(x, y, t) = t$. La formule précédente dit que

$$Eu_V(0) = \chi(V_0 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)).Eu_V(V_0) + \chi(V_1 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)).Eu_V(V_1) + \chi(V_2 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)).Eu_V(V_2)$$

Mais, $V_0 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0) = \emptyset$ donc on a $\chi(V_0 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)) = 0$.

D'autre part $V_1 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0) = \{(0, 0, t_0)\}$ donc on a $\chi(V_1 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)) = 1$.

Enfin $V_2 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0) = \{(x, y, t)/y^2 - x^3 - t_0^2x^2 = 0\} \setminus \{(0, 0, t_0)\}$.

Avec l'aide du théorème 2 de [GLM] on peut calculer $\chi(V_2 \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)) = -1$

Avec l'aide du théorème 2 et de l'observation 1 on a $Eu_V(V_1) = 2$ et $Eu_V(V_2) = Eu_V(V_{reg}) = 1$. Donc on a

$$Eu_V(0) = 0.Eu_V(0) + 1.2 + (-1).1 = 1.$$

3.1 Construction du champ $\bar{\nabla}_V f(z)$

Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe n et $(M, 0)$ un germe de variété complexe lisse de dimension complexe m . Notons $\{V_\alpha\}$ une stratification de Whitney de M compatible avec V . On suppose aussi que l'origine $\{0\}$ est une strate (où $\{V_\alpha\}$ décrit l'ensemble des strates de V telles que $0 \in \bar{V}_\alpha$).

Soit maintenant $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, fonction holomorphe avec singularité isolée à l'origine et restriction de $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un sous-ensemble ouvert de M contenant V . En suivant la construction de [BMPS], on peut associer à f un champ stratifié noté $\bar{\nabla}_V f(z)$, où bar désigne la conjugaison complexe. Noton $\bar{\nabla} \tilde{f}(z)$ le champ de vecteurs gradient de $\tilde{f}$ sur un point $z \in U$, défini par $\bar{\nabla} \tilde{f}(z) = (\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n})$, où bar désigne la conjugaison complexe. Le noyau $\ker(d\tilde{f}_z)$ est transverse à $T_z(V_\alpha(z))$ par tout $z \in V \setminus \{0\}$. Pour tout $z \in V \setminus \{0\}$, on a donc :

$$\text{Angle}(\bar{\nabla} \tilde{f}(z), T_z(V_\alpha(z))) < \pi/2,$$

donc la projection de $\bar{\nabla} \tilde{f}(z)$ sur $T_z(V_\alpha(z))$, notée $\zeta_\alpha(z)$, n'est pas nulle.

Soit V_β une strate telle que $V_\alpha \subset \bar{V}_\beta$, et soit $\pi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ une voisinage tubulaire de V_α dans U . En suivant la construction de M.H. Schwartz [Sc2], on peut voir que la condition (a) de Whitney implique que par tout point $z \in V_\beta \cap U_\alpha$, l'angle entre ζ_β et l'extension parallèle de $\zeta(\pi(z))$ est petit. Cette propriété implique que ces deux champs de vecteurs sont homotopes sur le bord de U_α . On peut donc coller les champs ζ_α pour obtenir un champ stratifié sur V , noté $\bar{\nabla}_V f(z)$. Ce champ est homotope à $\bar{\nabla} \tilde{f}(z)|_V$ et on a $\bar{\nabla}_V f(z) \neq 0$ pour tout $z \in V \setminus \{0\}$.

Définition 5 *L'obstruction locale d'Euler de f à l'origine, notée $Eu_{f,V}(0)$ est l'entier obtenu par l'évaluation de $Obs(\bar{\nabla}_V f(z))$ sur la classe fondamentale $[\nu^{-1}(V \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)]$.*

Théorème 4 ([BMPS] Théorème 3.1) *Soit $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ avec singularité isolée à l'origine et $\{V_\alpha\}$ stratification de Whitney de V . On a :*

$$Eu_V(0) = \left(\sum \chi(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_\alpha) \right) + Eu_{f,V}(0)$$

où ϵ est suffisamment petit, $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est situé près de l'origine et $Eu_V(V_\alpha)$ est l'obstruction d'Euler de V en n'importe quel point de la strate V_α .

Remarque 2 ([BMPS] Remarque 3.4) *Si $V = \mathbb{C}^n$ et $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est une fonction holomorphe avec singularité isolée à l'origine et nombre de Milnor μ , on a :*

$$Eu_{f,V}(0) = (-1)^n \mu.$$

En effet la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre de Milnor de f est égal à $1 + (-1)^{n-1} \mu$ par [Mi].

4 L'Obstruction d'Euler d'un k -champ

Un k -champ est une collection $v^{(k)}$ de k champs de vecteurs. Un point singulier de $v^{(k)}$ est un point où les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Un k -repère est un k -champ sans singularité. On dit que le k -champ $v^{(k)}$ est stratifié si chaque vecteur v_i est un champ stratifié dans le sens précédant.

Soit $\nu : \tilde{V} \rightarrow V$ la modification de Nash de V . Soit σ une cellule de dimension complexe $(m - k + 1)$ d'une décomposition cellulaire (D), construite (par dualité) à partir d'une triangulation (K) de V subordonnée à la stratification $\{V_\alpha\}$. Soit $v^{(k)}$ un k -champ stratifié dans $\sigma \cap V$ avec une singularité isolée en le barycentre b de σ . Le champ $v^{(k)}$ n'a pas de singularité en $\partial\sigma \cap V$. Chaque composante v_i de $v^{(k)}$ admet un relèvement $\tilde{v}_i$ comme section de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)$. Le champ de k -repères $v^{(k)}$, se relève donc comme ensemble de k -sections linéairement indépendantes de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)$ [BSS].

Notons $Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V)$ la classe en $H^{2(n-k+1)}(\nu^{-1}(\sigma \cap V), (\nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)))$ du cocycle d'obstruction pour étendre $\tilde{v}^{(k)}$ comme ensemble de k sections linéairement indépendantes de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(\sigma \cap V)$.



Définition 6 (Définition originale voir [BSS]) L'obstruction d'Euler locale $Eu(v^{(k)}, V, b)$ d'un k -champ stratifié $v^{(k)}$ défini sur $\sigma \cap V$ avec singularité isolée au barycentre b de σ est définie comme l'évaluation du cocycle d'obstruction $Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V)$ sur la classe fondamentale de la paire $[\nu^{-1}(\sigma \cap V), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)]$. Autrement dit,

$$Eu(v^{(k)}, V, b) = \langle Obs(\tilde{v}^{(k)}, \sigma \cap V, b), [\nu^{-1}(\sigma \cap V), \nu^{-1}(\partial\sigma \cap V)] \rangle.$$

5 L'Obstruction d'Euler d'une Application

Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$, où $(V, 0)$ est un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension n ($\dim M = m$, sauf mention du contraire, $\dim$ signifie dimension complexe) et $\{V_\alpha\}$ une stratification de Whitney de la variété V . Soit $f : V \rightarrow \mathbb{C}^k$, U voisinage de 0 dans M et $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$ application holomorphe, restriction de $F : U \rightarrow \mathbb{C}^k$ (où $n > k$), où $F(z) = (F_1(z), F_2(z), \dots, F_k(z))$. En suivant la construction de [BMPS] on peut associer à chaque f_i un champ stratifié noté $\bar{\nabla}_V f_i(z)$, où bar désigne la conjugaison complexe.

Soit Σf l'ensemble singulier de f . Le noyau $\ker(dF_z)$ est transverse à l'espace tangent $T_z V_\alpha(z)$ en tout point $z \in V \setminus \{\Sigma f\}$, où $V_\alpha(z)$ désigne la strate V_α de V qui contient le point z . Donc $\ker(dF_z) + T_z V_\alpha(z) = T_z U$ s'identifie à $\mathbb{C}^m$, et comme $\dim(\ker(dF_z)) = m - k$ nous obtenons $\dim(T_z V_\alpha(z)) \geq k$, autrement dit, $V \setminus \{\Sigma f\}$ est contenu dans l'union des strates de V telles que $\dim V_\alpha \geq k$.

Soit $p_\alpha : \mathbb{C}^m \simeq T_z U \rightarrow T_z V_\alpha(z)$ la projection canonique sur $T_z V_\alpha(z)$, où $z \in V \setminus \{\Sigma f\}$. On peut définir $\bar{\nabla}_V f_1(z)$ comme $p_\alpha(\bar{\nabla}_V f_1(z))$, qui est un vecteur non nul (voir section 3.1). Pour i tel que $1 < i \leq k$ nous faisons la construction suivante: On associe à $f_i(z)$ le champ $\bar{\nabla}_V f_i(z) = p_\alpha(\bar{\nabla} f_i(z))$, si l'ensemble $\{\bar{\nabla}_V f_1(z), \bar{\nabla}_V f_2(z), \dots, \bar{\nabla}_V f_i(z)\}$ est linéairement indépendant. Dans le cas contraire, nous définissons $f'_i(z) = f_i + \epsilon_i l_i$, où $l_i : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est une transformation linéaire générique, avec ϵ_i suffisamment petit de telle façon que l'ensemble

$$\{\bar{\nabla}_V f_1(z), \bar{\nabla}_V f_2(z), \dots, \bar{\nabla}_V f_{i-1}(z), p_\alpha(\bar{\nabla} f'_i(z))\}$$

soit linéairement indépendant. Nous définissons alors $\bar{\nabla}_V f_i(z) = p_\alpha(\bar{\nabla} f'_i(z))$. Notons que, pour $\|(0, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)\|$ suffisamment petit, f est homotope à l'application :

$$g(z) = (f_1(z), f_2(z) + \epsilon_2 l_2, \dots, f_k(z) + \epsilon_k l_k).$$

On note $\bar{\nabla}_f^{(k)}$ le k -champ $(\bar{\nabla}_V f_1(z), \bar{\nabla}_V f_2(z), \dots, \bar{\nabla}_V f_k(z))$. Le k -champ stratifié $\bar{\nabla}_f^{(k)}$ n' a pas de singularité sur $(\partial B_\epsilon \cap V \setminus \{\Sigma f\})$, où B_ϵ est une boule dans M centrée en 0.

Soit H une sous-variété de M de codimension $k - 1$ transverse à V à l'origine, c'est-à-dire est transverse à toutes les strates $V_\alpha \neq \{0\}$ de V telles que $0 \in \bar{V}_\alpha$, cela signifie que $\text{codim}(H \cap V_\alpha) = \text{codim} H + \text{codim} V_\alpha$ pour toute strate V_α . On note V_H l'ensemble $H \cap V$. Le champ $\bar{\nabla}_f^{(k)}$ se relève en un ensemble de k sections linéairement indépendantes de $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(\partial B_\epsilon \cap V_H)$.

Soit $\xi \in H^{2(n-k+1)}(\nu^{-1}(B_\epsilon \cap V_H), \nu^{-1}(\partial B_\epsilon \cap V_H))$ le cocycle d'obstruction pour l'extension de $\widetilde{\nabla}_f^{(k)}$ comme ensemble de k sections linéairement indépendantes de $\widetilde{T}$ sur $\nu^{-1}(B_\epsilon \cap V_H)$.

Définition 7 On définit $Eu_{f,V}(0)$ comme l'évaluation du cocycle ξ sur la classe fondamentale de la paire $[\nu^{-1}(B_\epsilon \cap V_H), \nu^{-1}(\partial B_\epsilon \cap V_H)]$. Autrement dit,

$$Eu_{f,V}(0) = \langle \xi, [\nu^{-1}(B_\epsilon \cap V_H), \nu^{-1}(\partial B_\epsilon \cap V_H)] \rangle$$

Remarque 3 $Eu_{f,V}(0)$ ne dépend pas de H suffisamment générique, ce résultat provient directement du premier lemme de l'isotopie de Thom.

6 Le Théorème

Dans toute la suite, nous noterons $p = n - k + 1$.

Soit (K) une triangulation de M adaptée à la stratification $\{V_\alpha\}$ et soit (D) une décomposition cellulaire duale de (K) dans M . On peut construire sur $(D)^{2p}$ par le procédé d'extension radial de M. H. Schwartz, une k -section de SV , appelée k -champ radial, notée $w^{(k)} = (w^{(k-1)}, w_k)$ et dont les singularités, notées a_k , satisfont aux propriétés suivantes :

1. $w^{(k)}$ n'a que des points singuliers isolés, ceux-ci sont des zéros du dernier vecteur w_k . Sur $(D)^{2p-1}$, $w^{(k)}$ n'a pas de point singulier. Sur $(D)^{2p}$, le champ de $(k-1)$ -repères $w^{(k-1)}$ n'a pas de point singulier.
2. Soit $a \in V_\alpha \cap (D)^{2p}$ un point singulier de $w^{(k)}$. Si $\dim_{\mathbb{C}} V_\alpha > k-1$, l'indice de $w^{(k)}$ en a est égal à l'indice de la restriction de $w^{(k)}$ à $V_\alpha \cap (D)^{2p}$, considéré comme champ de k -repères tangent à V_α .
Si $s = k-1$, on a $Ind(w^{(k)}, a) = +1$.
3. A l'intérieur d'une cellule D_α^{2p} qui rencontre plusieurs strates, $w^{(k)}$ n'a de singularités que sur la strate de dimension la plus petite.

De plus, le champ est sortant de certains tubes, voisinages de V_i dans M (Voir [BS]).

Condition δ

Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe n situé dans $(M, 0)$ germe de variété analytique complexe lisse de dimension complexe m . Soit $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, holomorphe, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$. Notons Σf l'ensemble singulier de f et soit H une sous-variété de M de codimension $k-1$ transverse à V à l'origine, c'est-à-dire est transverse à toutes les strates $V_\alpha \neq \{0\}$ de V telles que $0 \in \overline{V}_\alpha$. On dit que f satisfait à la condition (δ) si on a :

$$(\delta) \quad \Sigma f \cap H \cap B_\epsilon = \{0\},$$

pour ϵ suffisamment petit et H suffisamment générique.

Remarque 4 Supposons H est transverse à Σf . Une condition suffisante pour laquelle la condition δ se vérifie est le cas où $\dim \Sigma f \leq k - 1$. En effet, notons $\beta = \dim \Sigma f$, alors, comme on a $\dim H = m - (k - 1)$, il vient $\text{codim}(H \cap \Sigma f) = k - 1 + m - \beta$, et donc $\dim H \cap \Sigma f = \beta - (k - 1)$.

Donc $\dim(H \cap \Sigma f) \leq 0$ est équivalent à $\beta \leq k - 1$. Alors, une condition nécessaire pour que l'on ait $\dim \Sigma f \leq k - 1$ est que l'ensemble des points singuliers de la variété V , noté Σ , soit de dimension $\dim \Sigma \leq k - 1$, puisque $\Sigma \subseteq \Sigma f$.

- Dans le cas où V est une variété lisse, si f est générique, la dimension de l'ensemble singulier de f , noté Σf , est égale à $k - 1$, donc f satisfait la condition δ .
- Dans le cas singulier, si on écrit $V = V_{\text{reg}} \cup \Sigma$, on peut voir que si H est transverse à Σ (dans le sens topologique), $\dim \Sigma \leq k - 1$ et $f|_{V_{\text{reg}}}$ est générique, alors la condition δ est satisfaite.

Lemme 2 Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe n situé dans $(M, 0)$ germe de variété lisse complexe de dimension complexe m . Soit $f : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$, holomorphe, $f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_k(z))$, qui satisfait la condition δ . Il existe un k -champ vectoriel stratifié $w^{(k)} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ sur $V_H \cap (B_\epsilon \setminus \text{Int}(B_{\epsilon'}))$ où $0 < \epsilon' < \epsilon$ et $k \leq n$ tel que:

1. $w^{(k)}$ coïncide avec $\overline{\nabla}_f^{(k)}$ sur $V_H \cap \partial B_{\epsilon'}(0)$ et sur $V_H \cap \partial B_\epsilon$ w_k est un champ radial dans le sens usuel ;
2. $w^{(k)}$ est tangent à $f^{-1}(z_0)$, où $z_0 \in \mathbb{C}^k \setminus \{f(\Sigma f)\}$ et z_0 est proche de l'origine ;
3. $w^{(k)}$ a seulement un nombre fini de singularités sur V_H , toutes situées dans $f^{-1}(z_0)$;
4. en chaque singularité a de $w^{(k)}$ le champ w_k est transversalement radial à la strate contenant a .

Démonstration: On peut supposer que H est de la forme $H = F_1^{-1}(0) \cap F_2^{-1}(0) \cap \dots \cap F_{k-1}^{-1}(0)$. En effet, parce que si H n'est pas transverse à V (c'est-à-dire n'est pas transverse à toutes les strates V_α de V), on peut prendre $F'_i = F_i + \lambda_i l_i$, où $l_i : (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est une transformation linéaire générique, telle que $\cap F_i'^{-1}(0)$ est transverse à V . En prenant $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ suffisamment petit, F'_i est homotope à F_i .

L'intersection $B_\epsilon(0) \cap H$ peut être indentifiée à une cellule σ de dimension $m - k + 1$ d'une décomposition cellulaire duale (D), construite à partir d'une triangulation (K) de M subordonnée

à la stratification $\{V_\alpha\}$, où 0 est le barycentre de la cellule σ . Comme $\dim V_H < n - k + 1$, il n'y a pas d'obstruction pour étendre le $(k - 1)$ -champ

$$w^{(k-1)} = (\bar{\nabla}_V f_1(z), \bar{\nabla}_V f_2(z), \dots, \bar{\nabla}_V f_{k-1}(z))$$

de $\partial B_\epsilon \cap V_H$ à $B_\epsilon \cap V_H$, donc le relèvement de $w^{(k-1)}$ induit un sous-fibré de $\tilde{T}$ de rang $k - 1$, noté $\tilde{T}_{k-1}$ sur l'ensemble $\nu^{-1}(B_\epsilon(0) \cap H \cap V)$. On note $\tilde{T}_N$ le fibré normal à $\tilde{T}_{k-1}$ dans $\tilde{T}$, tel que $\tilde{T}_{k-1} + \tilde{T}_N = \tilde{T}$.

Considérons la dernière fonction coordonnée $f_k : V_H \rightarrow \mathbb{C}$, on sait par [BMPS] qu'il existe un champ de vecteurs w_k stratifié sur $(V_H \cap B_\epsilon) \setminus B_{\epsilon'}$ tel que :

1. w_k coïncide avec $\bar{\nabla}_V f_k(z)$ sur $V_H \cap \partial B_{\epsilon'}(0)$ et sur $V_H \cap \partial B_\epsilon$ est un champ radial ;
2. w_k est tangent à $f_k^{-1}(t_0)$;
3. w_k a seulement un nombre fini de singularités, toutes situées dans $f_k^{-1}(t_0)$;
4. en chaque singularité a , le champ w_k est radial à la strate contenant a .

Donc, pour $z_0 = (0, 0, \dots, t_0)$ le k -champ $w^{(k)} = (\bar{\nabla}_V f_1(z), \bar{\nabla}_V f_2(z), \dots, \bar{\nabla}_V f_{k-1}(z), w_k)$ satisfait les conditions désirées.

Théorème 5 Soit $(V, 0) \subset (M, 0)$ un germe de variété analytique complexe, équidimensionnel de dimension complexe n situé dans $(M, 0)$ germe de variété lisse complexe de dimension complexe m , et soit $\{V_\alpha\}$ une stratification de Whitney de M compatible avec V . Soit $f : V \rightarrow \mathbb{C}^k$, analytique, satisfaisant la condition δ (Voir 6). Soit $w^{(k)} = (w^{(k-1)}, w_k)$ un k -champ radial, satisfaisant aux conditions du lemme précédant, on a :

$$Eu(w^{(k)}, V, 0) = \left(\sum Eu_V(V_\alpha) \cdot \chi(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0)) \right) + Eu_{f,V}(0).$$

où $\{V_\alpha\}$ décrit l'ensemble des strates de V telles que $0 \in \bar{V}_\alpha$.

Démonstration: Le k -champ $w^{(k)}$ construit comme dans le lemme 1, est un k -champ stratifié, qui admet un relèvement $\tilde{w}^{(k)}$ dans $\tilde{T}$ au dessus de $\nu^{-1}(V_H \cap \partial(B_\epsilon \setminus \text{Int}(B_{\epsilon'})))$.

On note $Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial B_\epsilon))$ le cocycle d'obstruction pour étendre $\tilde{w}^{(k)}$ sur $\nu^{-1}(V_H \cap B_\epsilon)$ à partir de $\nu^{-1}(V_H \cap \partial B_\epsilon)$.

On a :

$$Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial B_\epsilon)) = Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial B_{\epsilon'})) + Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial(B_\epsilon \setminus \text{Int}(B_{\epsilon'})))).$$

Par l'affirmation 1) du lemme 2 et comme le k -champ ci-dessus est homotope au k -champ $w^{(k)}$ construit dans le lemme 2) on a (par abus de langage entre classe et évaluation) :

$$Eu(w^{(k)}, V, 0) = Eu_{f,V}(0) + Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial(B_\epsilon \setminus Int(B_{\epsilon'}))))$$

Par l'affirmation 2) du lemme 2, la contribution de $Obs(\tilde{w}^{(k)}, \nu^{-1}(V_H \cap \partial(B_\epsilon \setminus Int(B_{\epsilon'}))))$ est concentrée dans $\nu^{-1}(f^{-1}(z_0) \cap V_H \cap B_\epsilon(0))$. Localement $V \cap H \cap B_\epsilon$ s'identifie à une cellule duale σ de la décomposition cellulaire (D) . Des affirmations 3) du lemme 2) et du théorème de proportionalité pour les repères ([BS],[BSS]) on obtient que la contribution de chaque singularité a_l de $w^{(k)}$ est $Eu_V(a_l)Ind(w^{(k)}, a_l)$. Par les propriétés 2) et 4) du lemme 2), on a l'égalité

$$\sum Eu_V(a_l)Ind(w^{(k)}, V, a_l) \cdot \sigma^* = \sum Eu_V(V_\alpha) \left(\sum Ind(w^{(k)}, V_i, a_l) \cdot \sigma^* \right)$$

où σ^* est la cochaîne élémentaire dont la valeur est 1 sur σ et 0 sur les autres cellules.

Mais, toutes les singularités sont situées dans $f^{-1}(z_0)$, et comme $I(a_l, w^{(k)}) = I(a_l, w|_{V_\alpha}^{(k)})$, on a par la propriété 4) du lemme 2) :

$$\sum Ind(w^{(k)}, V_\alpha, a_l) \sigma^* = C^{n-k+1}(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0))$$

La $(n - k + 1)$ -cochaîne $C^{n-k+1}(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0))$ satisfait

$$\langle C^{n-k+1}(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0)), [\nu^{-1}(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0)), \nu^{-1}(V_\alpha \cap \partial B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0))] \rangle = \chi(V_\alpha \cap B_\epsilon \cap f^{-1}(z_0)).$$

7 Cas des variétés lisses

Dans le cas où V est une variété lisse, on obtient la formule suivante:

Corollaire 6 Soit $(V, 0) = (\mathbb{C}^n, 0)$ et $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ holomorphe, où

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, g(x)),$$

analytique, où $x = (x_1, \dots, x_n)$. Soit $g_0(x_k, \dots, x_n) = g(0, \dots, 0, x_k, \dots, x_n)$, fonction avec singularité isolée à l'origine, on a :

$$Eu_{f,V}(0) = (-1)^{n-k+1} \mu(g_0).$$

Démonstration: L'ensemble singulier de f est donné par:

$$\Sigma f = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) : \partial_k f(x) = \partial_{k+1} f(x) = \dots = \partial_n f(x) = 0\},$$

On peut prendre $H = (0, 0, \dots, 0) \times \mathbb{C}^{n-k+1}$, on a $f^{-1}(0, 0, \dots, 0, t_0) \cap H = g_0^{-1}(t_0)$, comme $g_0(x_k, \dots, x_n) = g(0, \dots, 0, x_k, \dots, x_n)$ est une fonction avec singularité isolée à l'origine, la condition δ est vérifiée donc, par la formule du théorème 5 on a :

$$Eu_V(0) = \chi(B_\epsilon \cap H \cap f^{-1}(0, \dots, t_0)) + Eu_{f,V}(0), \text{ mais} \\ \chi(B_\epsilon \cap H \cap f^{-1}(0, \dots, 0, t_0)) = \chi(B'_\epsilon \cap g_0^{-1}(t_0)), \text{ donc, } Eu_{f,V}(0) = (-1)^{n-k+1} \mu(g_0).$$

Remarque 5 Notons qu'un germe $f(x)$ de corang 1, du type ci-dessus, c'est-à-dire,

$$f(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, g(x)),$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, est $\mathcal{K}$ -équivalent au germe $h(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, g_0(x_k, \dots, x_n))$, parce que les idéaux engendrés par les fonctions coordonnées des deux germes sont égaux. Ainsi, le corollaire 6 s'applique, par exemple, à toutes les singularités du type A_l .

Exemple 2 Soit $(V, 0) = (\mathbb{C}^3, 0)$ et $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ où $f(x, y, z) = (x, y^2 + z^{l+1})$.

L'ensemble singulier de f est $\Sigma f = \mathbb{C} \times \{0, 0\}$, donc, par la formule du théorème 5 on a :

$$Eu_V(0) = \chi(B_\epsilon \cap H \cap f^{-1}(0, t_0)) + Eu_{f,V}(0). \text{ Comme } Eu_V(0) = 1 \text{ on a } \chi(B_\epsilon \cap H \cap f^{-1}(0, t_0)) = \chi(B_\epsilon \cap g^{-1}(t_0)) \text{ et donc } 1 = \chi(B_\epsilon \cap g^{-1}(t_0)) + Eu_{f,V}(0). \text{ Comme } 1 - \chi(B_\epsilon \cap g^{-1}(t_0)) = Eu_{f,V}(0), \text{ on obtient } 1 - \chi(B_\epsilon \cap g^{-1}(t_0)) = (-1)^2 \mu(g), \text{ et } Eu_{f,V}(0) = (-1)^2 \mu(g) = \mu(g) = l$$

Références

- [B] J.-P. Brasselet, *Classes Caractéristiques de Variétés Singulières*, Notas Didáticas 56 - ICMC - USP/ São Carlos.
- [BLS] J.-P. Brasselet, Lê D. T., J. Seade, *Euler obstruction and indices of vector fields*, Topology, 2000.
- [BMPS] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran and J. Seade, *Euler obstruction and defects of functions on singular varieties*, Journal London Math. Soc. (2), 70 (2004).
- [BS] J.-P. Brasselet et M.H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Astérisque 82-83 (1981), 93-147.
- [BSS] J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, *A proof of the proportionality theorem*, Preprint 2005.
- [GLM] S.M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández, *On the topology of germs of meromorphic functions and its applications*, (Russian) Algebra i Analiz 11 (1999), no. 5, 92-99; translation in St. Petersburg Math. J. 11 (2000), no. 5, 775-780.

- [GS] G. Gonzalez-Sprinberg, *L'obstruction Locale d'Euler et le Théorème de MacPherson*, Astérisque 82-83 (1981), 7-32.
- [GWPL] C. G. Gibson, K. Wirthmuller, A. A. du Plessis and E. J. N. Looijenga, *Topological Stability of Smooth Mappings*, Lectures Notes In Mathematics 552.
- [H] H. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Raume*, Math. Ann. 191 (1971), 235-252.
- [JLS] V. H. Jorge Pérez, D. Levcovitz and M. J. Saia, *Invariants, equisingularity and Euler obstruction of map germs from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$* , Journal für die Reine und Angewandte Mathematik vol. 587 (2005) 145-167.
- [L] E.J.N. Looijenga, *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, London Mathematical Society - Lectures Notes Series 77.
- [LT] Lê D. T. et B. Teissier, *Variétés polaires Locales et Classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math. 114, (1981), 457-491.
- [M] R. D. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. 100,(1974), 423-432.
- [Mi] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
- [S] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles.*, Princeton University Press, 1951.
- [Sc1] M.H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, CRAS 260, (1965), 3262-3264 et 3535-3537.
- [Sc2] M.H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.
- [Se] M. Sebastiani, *Sur la formule de Gonzalez-Verdier*, Bull. Braz. Math. Soc. 16 (1985), no. 1, 31-44.
- [STV] J. Seade, M. Tibar, and A. Verjovsky, *Milnor Numbers and Euler obstruction*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 36 (2005), no. 2, 275-283.
- [T] B. Teissier, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes et conditions de Whitney*, Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin, 1982.
- [V] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Math., 36 (1976), 295-312.
- [Wh] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. Math. 81 (3), 496-549 (1965).

Nivaldo de Góes Grulha Júnior

e-mail : `grulha@iml.univ-mrs.fr` et `njunior@icmc.usp.br`

Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206)

Université de la Méditerranée

Campus de Luminy, Case 907

13288 Marseille Cedex 9

France.

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Universidade de São Paulo

Av. Trabalhador São-carlense, 400 - Centro

Caixa Postal: 668 - CEP: 13560-970 - São Carlos - SP

Brasil.

NOTAS DO ICMC
SÉRIE MATEMÁTICA

- 263/2006 PÉREZ, V.H.J.; Nuño-Ballesteros, J. J. – Finite determinacy and Whitney equisingularity of map germs from C^n to C^{2n-1}
- 262/2006 CALLEJAS-BEDREGAL, R; PÉREZ, V.H.J. - Mixed multiplicities for arbitrary ideals and generalized buchsbaum-Rim multiplicities.
- 261/2006 PÉREZ, V.H.J.; RIZZIOLI, E.C.; SAIA, MJ. - Numerical control of equisingularity for map germs from C^n to C^3 , $n > 3$.
- 260/2006 HERNADES, M.E.; RODRIGUES, H.; RUAS, M.A.S - A_e - codimension of germs of analytic monomial curves.
- 259/2006 CARBINATTO, M.C.; RYBAKOWSKI, R.P. - Continuation of the connection matrix for singularly perturbed hyperbolic equations.
- 258/2006 RIZZIOLLI, E.C.; SAIA, M.J. - Polar multiplicities and Euler obstruction of the types in weighted homogeneous map germs from C^n to C^3 , $n > 3$.
- 257/2006 ARRIETA, J.M.; CARVALHO, A.N.; LOZADA-CRUZ, G. - Dynamics in Dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria.
- 256/2006 SAIA, MJ.; SOARES JR., C.H. - Modified C^1 - trivialization of real germs of functions and maps.
- 255/2006 GIMENES, L.P.; FEDERSON, M.; TÁBOAS, P. - Impulsive stability of systems of second order retarded differential equations.
- 254/2006 NABARRO, A.C.; RUAS, M.A.S. - Vector fields in R^2 .with maximal index.