

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

ISSN - 0103-2577

**MATRIZES ESPECIAIS
MATRIZES DE TESTE**

**O DELAR LEITE LINHARES
ELIANA X.L. DE ANDRADE**

Nº 69

NOTAS DO ICM C
Série Matemática

São Carlos
Nov./1998

SYSNO	1302493
DATA	/ /
ICMC - SBAB	

MATRIZES ESPECIAIS MATRIZES DE TESTE

Odellar Leite Linhares
Rua César Ricome, 311
Jardim Lutfalla
13560-510 São Carlos, SP, Brasil
e-mail: odellar@zaz.com.br

Eliana X. L. de Andrade
IBILCE-UNESP - São José do Rio Preto
Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Caixa Postal 136; 15054-000 São José do Rio Preto, SP, Brasil.
e-mail: eliana@nimitz.dcce.ibilce.unesp.br

RESUMO

Uma nova classe $\mathcal{A}$ de matrizes quadradas A é apresentada cujos problemas de autovalores e de inversão e determinantes são facilmente explicitáveis. Se $A \in \mathcal{A}$ é inteira, seus autovalores são inteiros, bem como podem ser inteiras as componentes de seus autovetores. Por outro lado, é sempre possível construir-se matriz $A \in \mathcal{A}$ com prefixados autovalores ou determinante. Em particular, pode-se construir A inteira com prefixados autovalores ou determinantes inteiros.

Além disso, $\mathcal{A}$ contém subclasse de matrizes que, sendo inteiras e inversíveis, possuem inversas inteiras explícitas ou muito facilmente explicitáveis.

Outras subclasses de $\mathcal{A}$ são também definidas e analisadas como, por exemplo, a das matrizes simétricas.

Acreditamos que tais matrizes serão instrumentos úteis, como matrizes de teste, a professores e pesquisadores, em suas atividades de ensino e de pesquisa.

SPECIAL MATRICES TEST MATRICES

Odelar Leite Linhares
Rua César Ricome, 311
Jardim Lutfalla
13560-510 São Carlos, SP, Brasil
e-mail: odelar@zaz.com.br

Eliana X. L. de Andrade
IBILCE-UNESP - São José do Rio Preto
Departamento de Ciências de Computação e Estatística
Caixa Postal 136; 15054-000 São José do Rio Preto, SP, Brasil.
e-mail: eliana@nimitz.dcce.ibilce.unesp.br

ABSTRACT

A new class $\mathcal{A}$ of square matrices A is introduced whose elements having the property that the eigenvalues, determinants and inverses are easily expressed. If $A \in \mathcal{A}$ is an integral matrix, that is with integer entries, then its eigenvalues are integers and further the components of the eigenvectors can also be given as integers.

Furthermore it is always possible to construct $A \in \mathcal{A}$ with prescribed eigenvalues or determinant. In particular, it is possible to construct integral matrix $A \in \mathcal{A}$ with prescribed integer eigenvalues or determinant.

The class $\mathcal{A}$ contains a subclass of non singular integral matrices with either explicit or very easily expressible integral inverses.

Other subclasses of $\mathcal{A}$ have also been studied, such as that with elements which are symmetric matrices. We believe that such matrices will be useful instruments as test matrices for teachers and researchers in their didact and research activities.

SUMÁRIO

Introdução	01
-------------------------	-----------

Capítulo 1

1.1. Matrizes quadradas inteiras com inversas inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis.....	05
1.2. A classe $\mathcal{A}1$ das matrizes inteiras $A1$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro), com inversas inteiras $A1^{-1} = A1$	05
1.3. A classe $\mathcal{A}2$ das matrizes inteiras $A2$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro), com inveras inteiras $A2^{-1} = A2$	07
1.4. A classe $\mathcal{A}3$ das matrizes inteiras $A3$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro), com inversas inteiras $A3^{-1}$ explícitas	10
1.5. A classe $\mathcal{A}4$ das matrizes inteiras $A4$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro), com inversas inteiras $A4^{-1}$ explícitas	12
1.6. A classe $\mathcal{A}5$ das matrizes inteiras $A5$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro), com inversas inteiras $A5^{-1}$ facilmente explicitáveis	14
1.7. A classe $\mathcal{A}6$ das matrizes inteiras $A6$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro, par), com inversas inteiras facilmente explicitáveis	19
1.8. A classe $\mathcal{A}7$ das matrizes inteiras $C1$ e $C2$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro, par), com inversas inteiras $C1^{-1} = C1$ e $C2^{-1} = C2$	21
1.9. A classe $\mathcal{A}8$ das matrizes inteiras $A8$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro, par), com inversas inteiras $A8^{-1}$ facilmente explicitáveis	22
1.10. A classe $\mathcal{A}9$ das matrizes inteiras $A9$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro, par), com inversas inteiras $A9^{-1}$ facilmente explicitáveis	26
1.11. A classe $\mathcal{A}10$ das matrizes inteiras $A10$, de ordem N , ($N \geq 2$, inteiro, ímpar), com inversas inteiras $A10^{-1}$ facilmente explicitáveis	30
1.12. Técnicas para geração de matrizes e suas inversas a partir de outras matrizes e suas inversas conhecidas.....	34
1.12.1. Uso de matrizes de permutação.....	34
1.12.2. Uso da operação de transposição de linhas e colunas de matriz (tomar a transposta).....	38
1.12.3. Uso da operação de multiplicação de matrizes	39

Capítulo 2

2.1. A classe $\mathcal{A}$ de matrizes A de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), cujos problemas de autovalores e de inversão são facilmente solucionáveis	41
2.2. Definição da classe $\mathcal{A}$, propriedade fundamental a que satisfazem as matrizes $A \in \mathcal{A}$	41
2.2.1. Autovalores e autovetores de $A \in \mathcal{A}$	42

2.2.2. Determinante de $A \in \mathcal{A}$, $\det.A$.	43
2.2.3. Autovetores de $A \in \mathcal{A}$.	43
2.2.4. Construção de $A \in \mathcal{A}$ sendo dados os elementos d_k , $k = 1, 2, \dots, N$ e a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$	44
2.2.5. O problema de autovalores de $A \in \mathcal{A}$.	45
2.2.6. A estrutura de Blocos Diagonais para a construção de $A \in \mathcal{A}$.	45
2.2.7. Construção de $A \in \mathcal{A}$ com prefixados autovalores ou determinantes	47
2.2.8. Construção de $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$ inteiro), com prefixada característica R ($1 \leq R \leq N$).	49
2.2.9. Diferentes técnicas para a construção de $A \in \mathcal{A}$.	55
2.2.10. Propriedades adicionais a que satisfazem as matrizes $A \in \mathcal{A}$.	57

Capítulo 3

3.1. O problema da explicitação das inversas de matrizes $A \in \mathcal{A}$ e o da construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, que sendo inteiras e inversíveis, possuem inversas inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis.	62
3.2. O problema da explicitação das inversas A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$.	62
3.3. Explicitação das inversas inteiras de matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$.	66
3.4. Algumas escolhas de sequências de N autovalores (1 ou -1) que resultam em matrizes $A \in \mathcal{A}$, inteiras, com explícitas ou muito facilmente explicitáveis inversas inteiras A^{-1} .	68
3.5. Roteiro para a construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, inteiras, e suas inversas A^{-1} inteiras.	83
3.6. Algoritmo para a construção de matriz inteira $A \in \mathcal{A}$, cuja inversa A^{-1} é inteira.	91
3.7. RECEITUÁRIO I para a construção de inversa A^{-1} inteira de matriz $A \in \mathcal{A}$, inteira.	91

Capítulo 4

4.1. Introdução da classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ das matrizes C , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro).	97
4.2. Definição da classe $\mathcal{C}$ das matrizes C , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro); autovalores, autovetores e determinantes de $C \in \mathcal{C}$.	97
4.3. Propriedades das matrizes $C \in \mathcal{C}$. Construção de $C \in \mathcal{C}$ com prefixados autovalores ou determinante. Condição necessária e suficiente para que $C \in \mathcal{C}$ inteira tenha todos os seus autovalores inteiros, etc.	99
4.4. O problema de inversão de $C \in \mathcal{C}$.	104
4.5. Matrizes $C \in \mathcal{C}$ inteiras, com inversas C^{-1} inteiras.	106
4.5.1. Construção da inversa C^{-1} inteira de $C \in \mathcal{C}$, inteira	108
4.5.2. Algumas escolhas de sequências de autovalores para C inteira que resultam em inversas inteiras C^{-1} explícitas	110

4.6. Roteiro para a construção de matrizes inteiras $C \in \mathcal{C}$ e de suas inversas C^{-1} , com o respectivo RECEITUÁRIO 2.	114
4.7. Subclasse $\mathcal{A}_1$ das matrizes $A \in \mathcal{A}$ que são simétricas	117
4.7.1. Autovalores de $A \in \mathcal{A}_1$	117
4.7.2. Propriedades das matrizes $A \in \mathcal{A}_1$	117
4.7.3. Autovetores de $A \in \mathcal{A}_1$	118
4.7.4. As inversas A^{-1} de $A \in \mathcal{A}_1$	119
4.7.5. Inversas inteiras A^{-1} de $A \in \mathcal{A}_1$	123
4.7.6. Construção de $A \in \mathcal{A}_1$ que, sendo simétrica, seja definida positiva.....	124

Capítulo 5

5.1. Algumas das possíveis aplicações das diferentes classes de matrizes de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) introduzidas e analisadas nos capítulos anteriores	125
5.2. Construção de matrizes com prefixados autovalores ou determinantes.....	125
5.3. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, de qualquer ordem N ($N \geq 2$, inteiro) que sejam garantidamente não singulares	127
5.4. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$, de qualquer ordem N ($N \geq 2$, inteiro) que sejam seguramente não singulares.....	128
5.5. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, ou $C \in \mathcal{C}$, cujos problemas de autovalores sejam facilmente solucionáveis.....	129
5.6. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, ou $C \in \mathcal{C}$, com predeterminada característica R ($1 \leq R \leq N$).....	131
5.7. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, ou $C \in \mathcal{C}$, cujos problemas de inversão (cálculo de inversas) sejam facilmente solucionáveis.....	134
5.8. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ que sendo inteiras e inversíveis possuem inversas A^{-1} inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis.....	136
5.9. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$ que sendo inteiras e inversíveis possuem inversas inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis	136
5.10. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ cujos menores principais sejam diferentes de zero	136
5.11. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$ cujos menores principais sejam diferentes de zero	137
5.12. Construção de matriz $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$ que seja decomponível em produto $A = LU$ ou $C = LU$ onde L é a matriz triangular inferior e U , triangular superior	138
5.13. Construção de sistemas lineares algébricos, de N equações a N incógnitas ($N \geq 2$, inteiro), cuja solução é previamente estabelecida.....	138
5.14. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}_1$ simétricas, definidas positivamente, portanto	

decomponíveis em produto $A = S^t S$, onde S é matriz triangular superior e S^t , a transposta de S	140
5.15. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}_1$, simétricas, cujos problemas de autovalores e de inversão são facilmente solucionáveis.....	141
5.16. Construção de matrizes e de sistemas lineares algébricos mal condicionados.....	142
5.17. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$ e $A_1 \in \mathcal{A}_1$ que sejam diagonalizáveis ou redutíveis a formas canônicas de Jordan, com explicitação das matrizes de transformação.	148
Referências	165

Introdução

1. Reuniremos, nesta monografia, os resultados das pesquisas que vimos realizando nos últimos quinze ou vinte anos, sobre classes especiais de matrizes, as chamadas matrizes de teste.

O problema se nos apresentou quando procurávamos exemplos de matrizes quadradas inteiras, para uso em sala de aula, cujo problema de autovalores fosse facilmente explicitável. Era, então, conhecido que as matrizes quadradas inteiras, M , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$M = \begin{pmatrix} N & N-1 & N-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ N-1 & N & N-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ N-1 & N-2 & N & \dots & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ N-1 & N-2 & N-3 & \dots & N & 2 & 1 \\ N-1 & N-2 & N-3 & \dots & 2 & N & 1 \\ N-1 & N-2 & N-3 & \dots & 2 & 1 & N \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

possuíam os auto-valores:

$$\lambda_k = N - (N-k) = k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\lambda_N = N + (N-1) + (N-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \sum_{k=1}^N k = N(N+1)/2$$

e a propriedade adicional de que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas era um número fixo, $S_M = N(N+1)/2$.

e seu determinante, $\det. M$, dado por:

$$\det. M = \prod_{k=1}^N \lambda_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1) \cdot (N(N+1)/2) = (N+1)!/2.$$

Tendo em vista preservar estas características, tentamos e conseguimos generalizar a classe M das matrizes da forma (1.1) acima definida, introduzindo a classe $\mathcal{C}$ das matrizes C , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & c_1 & \dots & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_N \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_1 & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{N-1} & c_1 & c_N \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{N-1} & c_N & c_1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

onde os c_j , $j = 1, 2, \dots, N$ são números reais quaisquer.

Neste caso, a soma dos elementos de cada linha de C é um número fixo S_C , para toda matriz C da forma (1.2), $S_C = \sum_{k=1}^N c_k$.

Provamos que os auto-valores de C seriam dados por:

$$\lambda_k = (c_1 - c_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\lambda_N = S_C = \sum_{k=1}^N c_k.$$

Portanto, o determinante de C , $\det.C$, seria dado por:

$$\det.C = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \prod_{k=1}^N (c_1 - c_{k+1}) \cdot S_C = \prod_{k=1}^N (c_1 - c_{k+1}) \left(\sum_{k=1}^N c_k \right)$$

Conseguimos também explicitar os auto-vetores de C , v_k , $k = 1, 2, \dots, N$, associados a cada auto valor λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ e também, quando existissem ($\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$), suas inversas, C^{-1} .

E, é claro, as matrizes M , da forma (1.1), passaram a ser casos particulares das matrizes C , da forma (1.2) e, portanto, explicitáveis seus problemas de autovalores e de inversão.

Mostramos, também, que $\mathcal{C}$ possui subclasse de matrizes que, sendo inteiras e inversíveis, possuem inversas inteiras e subclasse de matrizes simétricas, que é fechada relativamente às operações de adição e de multiplicação de matrizes, de multiplicação de escalar por matriz e de inversão de matriz.

Verificamos que as matrizes de $\mathcal{C}$ gozam das propriedades:

a) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ então $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 \in \mathcal{C}$,

onde α_1, α_2 são escalares.

b) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e se λ_1, λ_2 são, respectivamente, auto valores de C_1 e de C_2 então, $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2$ é auto valor de $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$, onde α_1, α_2 são escalares.

Infelizmente, constatamos que a classe $\mathcal{C}$ não é fechada relativamente às operações de multiplicação e de inversão de matrizes.

Restava-nos, portanto, o problema de tentar generalizar a classe $\mathcal{C}$, obtendo classe $\mathcal{A}$ em que as matrizes $A \in \mathcal{A}$ satisfizessem, além das propriedades mencionadas para as da classe $\mathcal{C}$, também às propriedades:

c) Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, então $A_1 A_2, A_2 A_1 \in \mathcal{A}$

d) Se $A \in \mathcal{A}$, e A^{-1} existe, então $A^{-1} \in \mathcal{A}$.

Tal objetivo foi alcançado com a introdução de classe $\mathcal{A}$, de matrizes A , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & d_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & d_3 & b_4 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & d_4 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & d_{n-2} & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & d_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

onde $d_k, k = 1, 2, \dots, N$; $a_k, k = 1, 2, \dots, N-1$;

$b_k, k = 2, 3, \dots, N-1, N$ são números (inteiros, racionais, reais ou complexos) quaisquer, sujeitos à restrição de que satisfaçam à condição de que a soma dos elementos de cada linha de A seja um número fixo, S_A , para cada matriz $A \in \mathcal{A}$.

Ou seja:

$$\begin{aligned} d_1 + \sum_{k=2}^n b_k &= a_1 + d_2 + \sum_{k=3}^n b_k = a_1 + a_2 + d_3 + \sum_{k=4}^n b_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 a_k + d_4 + \sum_{k=5}^N b_k = \dots = \sum_{k=1}^{N-3} a_k + d_{N-2} + b_{N-1} + b_N = \\ &= \sum_{k=1}^{N-2} a_k + d_{N-1} + b_N = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + d_N = S_A. \end{aligned}$$

Tais matrizes possuem os auto-valores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= d_k - a_k = d_{k+1} - b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_A \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Seus problemas de auto valores e de inversão (quando inversíveis) são facilmente explicitáveis, isto é, pode-se obter, facilmente, seus autovalores e os autovetores a eles associados, bem como suas inversas (quando existirem) e seus determinantes.

Além disso, as matrizes da classe $\mathcal{A}$ gozam das propriedades a), b), c) e d) acima citadas, além de outras importantes, como veremos nos capítulos subsequentes.

Construída matriz $A \in \mathcal{A}$ da forma (1.3), seus auto valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$ são, como vimos em (1.4), facilmente determinados. Reciprocamente, o que é fundamental, dados N números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ quaisquer, inteiros ou não, podemos construir matriz $A \in$

$\mathcal{A}$, da forma (1.3), que tenha esses N números como seus auto valores e daí, obter os auto vetores a eles associados.

Assim, $\mathcal{A}$ é uma classe de matrizes com pré-estabelecidos autovalores e, consequentemente, com pré-estabelecidos determinantes, como se verá oportunamente.

Tal especificidade não a possuem as matrizes da classe $\mathcal{C}$, isto é, dados N números inteiros quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, nem sempre existe matriz inteira $C \in \mathcal{C}$ que tenha esses N números inteiros como seus autovalores.

$\mathcal{A}$ contém subclasse de matrizes que, sendo inteiras e inversíveis, possuem inversas inteiras, algumas delas explícitas ou, quando não, facilmente explicitáveis.

É claro que O_N (matriz zero de ordem N) e I_N (matriz identidade de ordem N) pertencem a $\mathcal{A}$, bem como a $\mathcal{C}$.

2. Em vista do exposto, apresentaremos, a seguir classes de matrizes quadradas de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), de elementos inteiros, racionais, reais ou complexos, com algumas características desejáveis, a saber:

- sendo inteiras e unimodulares possuem explícitas inversas inteiras.
- sendo inteiras e unimodulares suas inversas inteiras, se não explícitas, são facilmente explicitáveis.
- sendo inteiras ou não, seus problemas de autovalores e de inversão (quando não singulares) são facilmente solucionáveis.
- pode-se construir matrizes:
 - a) inteiras ou não, com prefixados autovalores (inteiros ou não) ou com prefixados determinantes (inteiros ou não). No caso em que sejam inteiras, seus auto-valores e auto vetores, bem seus determinantes, serão inteiros.
 - b) simétricas, definidas ou não positivamente.
 - c) simétricas, cujos problemas de autovalores e de inversão (quando não singulares) são facilmente solucionáveis.
- outras características.

3. Acreditamos que tais matrizes possam a vir a se constituir em instrumento útil ao professor ou pesquisador, em suas atividades de ensino ou de pesquisa, seja para construção de exemplos em salas de aulas, seja para a elaboração de listas de exercícios e de provas, bem como para teste (comprovação) de algoritmos computacionais matemáticos.

4. Finalizando, gostaríamos de sugerir a eventuais leitores desta monografia que, como passatempo, tentassem justificar as afirmativas aqui feitas sem provas, ou que exibissem contra-exemplos, mostrando que são falsas. Muito nos alegrariam se, de fato, o fizessem.

São Carlos, SP, dezembro de 1998.

Capítulo 1

1.1. Apresentaremos, neste capítulo, por enquanto sem provas, classes de matrizes quadradas inteiras, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), com explícitas, inversas inteiras ou, quando não explícitas muito facilmente explicitáveis.

1.2. Seja A_1 a classe das matrizes quadradas inteiras, A_1 , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

onde d_k , $k=1,2,\dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = (N-2) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \quad (1.2.2)$$

Vamos enumerar algumas das propriedades de que gozam tais naturezas:

a) A soma dos elementos de cada linha de A_1 , da forma (1.2.1), é um numero fixo S_{A_1} ,

$$S_{A_1} = -1$$

para toda matriz A_1 , da forma (1.2.1).

b) Os autovalores de A_1 , da forma (1.2.1), são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= d_k - (d_k - 1) = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_{A_1} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

Ou seja, A_1 possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } N-1 \\ \mu &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

c) O determinante de $A1$, $\det. A1$, de acordo com (1.2.3) é:

$$\det A1 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = -1. \quad (1.2.5)$$

d) As matrizes $A1$, da forma (1.2.1), são inteiras, inversíveis, com explícitas inversas inteiras $A1^{-1}$, tais que:

$$A1^{-1} = A1 \quad (1.2.6)$$

Ou seja, as inversas $A1^{-1}$ de $A1$ são as próprias matrizes $A1$.

1.2.1. Exemplos.

a) Sejam $N=4$; $d_1=3$; $d_2=5$; $d_3=4$.

Então, de acordo com (1.2.2) e (1.2.1), temos:

$$d_4 = (N-2) - \sum_{k=1}^3 d_k = (4-2) - (3+5+4) = -10$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -11 \\ 2 & 5 & 3 & -11 \\ 2 & 4 & 4 & -11 \\ 2 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix} = A1^{-1}$$

como se pode facilmente verificar, efetuando o produto $A1.A1^{-1} = I_4$ (matriz identidade de ordem 4).

Autovalores de $A1$ e de $A1^{-1}$:

$$\lambda_k = (d_k - (d_k-1)) = 1, \quad k=1, 2, 3.$$

$$\lambda_k = S_{A1} = -1.$$

Determinantes de $A1$ e de $A1^{-1}$, $\det. A1$ e $\det A1^{-1}$:

$$\det. A1 = \det A1^{-1} = \prod_{k=1}^4 \lambda_k = -1.$$

b) Sejam $N=5$; $d_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$.

$$\text{Daí, } d_5 = (5-2) - (0) = 3;$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Autovalores de A_1 e de A_1^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_{k-1})) = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$\lambda_5 = S_{A_1} = -1.$$

Determinantes de A_1 e de A_1^{-1} :

$$\det. A_1 = \det. A_1^{-1} = -1.$$

c) Sejam $N = 5$; $d_1 = 2$; $d_2 = -4$; $d_3 = -5$; $d_4 = 3$.

$$\text{Daí, } d_5 = (5-2) - (2-4-5+3) = 7$$

Logo:

$$A_1 = A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & -6 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & -5 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & -6 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_1 e de A_1^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_{k-1})) = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$\lambda_5 = S_{A_1} = -1.$$

Determinantes de A_1 e de A_1^{-1} :

$$\det. A_1 = \det. A_1^{-1} = -1$$

1.3. Seja $\mathcal{A}_2$ a classe das matrizes A_2 , quadradas, inteiras, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A_2 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 + 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & d_4 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N=2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.3.1.)$$

onde $d_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = (2 - N) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \quad (1.3.2)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A_2 é um número fixo S_{A_2} ,

$S_{A_2} = 1$
para toda matriz A_2 , da forma (1.3.1).

b) Os autovalores de A_2 são:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_k = d_k - (d_k + 1) = -1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \lambda_N = S_{A_2} = 1 \end{array} \right\} \quad (1.3.2)$$

Ou seja, A_2 possui os autovalores:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \text{ de multiplicidade } N-1 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \quad (1.3.4)$$

c) De (1.3.2) resulta:

$$\text{Determinante de } A_2 = \det. A_2^{-1} = \begin{cases} -1, & \text{se } N \text{ for par} \\ 1, & \text{se } N \text{ for impar} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

d) As matrizes A_2 , da forma (1.3.1) são inteiras e inversíveis, com explícitas inversas inteiras A_2^{-1} , tais que:

$$A_2^{-1} = A_2 \quad (1.3.6)$$

Ou seja, as inversas A_2^{-1} de A_2 , da forma (1.3.1) são as próprias matrizes A_2 .

1.3.1. Exemplos.

a) Sejam $N = 4$; $d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $d_3 = -8$

Então: $d_4 = (2-N) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k = (2-4) - (3+5-8) = -2$.

Logo:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -7 & -1 \\ 4 & 5 & -7 & -1 \\ 4 & 6 & -8 & -1 \\ 4 & 6 & -7 & -2 \end{pmatrix} = A_2^{-1}$$

Autovalores de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_k + 1)) = -1, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\lambda_4 = 1.$$

Determinantes de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\det. A_2 = \det. A_2^{-1} = -1 \quad (N=4, \text{ par})$$

b) Sejam $N=5$; $d_k=0$, $k=1, 2, 3, 4$.

$$\text{Daí, } d_5 = (2-5) - 0 = -3.$$

Logo:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = A_2^{-1}$$

Autovalores de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_k+1)) = -1, \quad k=1, 2, 3, 4.$$

$$\lambda_5 = 1.$$

Determinantes de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\det. A_2 = \det. A_2^{-1} = 1 \quad (N=5, \text{ impar})$$

c) Sejam $N=5$; $d_1=-3$; $d_2=4$; $d_3=5$; $d_4=-4$.

$$\text{Daí, } d_5 = (2-5) - (-3 + 4 + 5 - 4) = -5.$$

Logo:

$$A_2 = A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 6 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 5 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 6 & -4 & -4 \\ -2 & 5 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Auto-valores de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_k+1)) = -1, \quad k=1, 2, 3.$$

$$\lambda_5 = S_{A_2} = 1.$$

Determinantes de A_2 e de A_2^{-1} :

$$\det. A_2 = \det. A_2^{-1} = 1 \quad (N=5, \text{ impar}).$$

1.4. Seja $\mathcal{A}_3$ a classe das matrizes quadradas inteiras A_3 , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A_3 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

onde d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = N - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \quad (1.4.2)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A_3 , da forma (1.4.1) é um número fixo S_{A_3} ,

$$S_{A_3} = 1 \quad (1.4.3)$$

para toda matriz A_3 , da forma (1.4.1).

b) Os autovalores de A_3 são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= d_k - (d_k - 1) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_{A_3} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

Isto é, A_3 possui o autovalor:

$\lambda = 1$, de multiplicidade N .

c) O determinante de A_3 , $\det. A_3$, é:

$$\det. A_3 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = 1.$$

d) As matrizes A_3 são inteiras e inversíveis, com explícitas inteiras A_3^{-1} , da forma:

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2-d_1 & 1-d_2 & 1-d_3 & \dots & 1-d_{N-1} & 1-d_N \\ 1-d_1 & 2-d_2 & 1-d_3 & \dots & 1-d_{N-1} & 1-d_N \\ 1-d_1 & 1-d_2 & 2-d_3 & \dots & 1-d_{N-1} & 1-d_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-d_1 & 1-d_2 & 1-d_3 & \dots & 2-d_{N-1} & 1-d_N \\ 1-d_1 & 1-d_2 & 1-d_3 & \dots & 1-d_{N-1} & 2-d_N \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

1.4.1. Exemplos

a) Sejam $N = 4$; $d_1 = 5$; $d_2 = -3$; $d_3 = 6$; Daí, $d_4 = N - \sum_{k=1}^{N-1} d_k = 4 - (5-3+6) = -4$.

Logo:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 & -5 \\ 4 & -3 & 5 & -5 \\ 4 & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 5 & -5 & 5 \\ -4 & 4 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_3 e de A_3^{-1} :

$$\lambda_k = (d_k - (d_{k-1})) = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\lambda_4 = S_{A_3} = 1.$$

$\lambda = 1$, de multiplicidade 4.

Determinantes de A_3 e de A_3^{-1} :

$$\det. A_3 = \det. A_3^{-1} = 1.$$

b) Sejam $N = 5$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$.

$$\text{Daí, } d_5 = 5 - (3 + 3 + 3 + 3) = -7$$

Logo:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -2 & -8 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & 8 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & -1 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & 8 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_3 e de A_3^{-1} :

$\lambda = 1$, de multiplicidade 4.

Determinante de A_3 e de A_3^{-1} :

$$\det. A_3 = \det A_3^{-1} = 1.$$

c) Sejam $N = 4$; $d_1 = 4$; $d_2 = d_3 = 0$.

$$\text{Daí, } d_4 = 4 - (4 + 0 + 0) = 0$$

Logo:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_3 e de A_3^{-1} :

$\lambda = 1$, de multiplicidade 4.

Determinantes de A_3 e de A_3^{-1} :

$$\det. A_3 = \det. A_3^{-1} = 1.$$

1.5. Seja $\mathcal{A}_4$ a classe das matrizes quadradas inteiras A_4 , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.5.1)$$

onde $d_k = 1, 2, \dots, N-1$ são números inteiros quaisquer e

$$d_N = -\left(N + \sum_{k=1}^{N-1} d_k\right) \quad (1.5.2)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A_4 , da forma (1.5.1), é um número fixo, S_{A_4} ,

$$S_{A_4} = -1 \quad (1.5.3)$$

para toda matriz A_4 .

b) Os autovalores de A_4 , da forma (1.5.1) são:

$$\lambda_k = -1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.5.4)$$

Ou seja, A_4 possui o autovalor:

$\lambda = -1$, de multiplicidade N .

c) O determinante de A_4 , $\det. A_4$ é:

$$\det. A_4 = \det. A_4^{-1} = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} -1, & \text{se } N \text{ for ímpar} \\ 1, & \text{se } N \text{ for par} \end{cases} \quad (1.5.5)$$

d) As matrizes A_4 são inteiras e inversíveis, com explícitas inversas inteiras A_4^{-1} da forma:

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -2-d_1 & -1-d_2 & -1-d_3 & \dots & -1-d_{N-1} & -1-d_N \\ -1-d_1 & -2-d_2 & -1-d_3 & \dots & -1-d_{N-1} & -1-d_N \\ -1-d_1 & -1-d_2 & -2-d_3 & \dots & -1-d_{N-1} & -1-d_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1-d_1 & -1-d_2 & -1-d_3 & \dots & -2-d_{N-1} & -1-d_N \\ -1-d_1 & -1-d_2 & -1-d_3 & \dots & -1-d_{N-1} & -2-d_N \end{pmatrix} \quad (1.5.6)$$

1.5.1. Exemplos.

a) Sejam $N = 5$; $d_1 = d_2 = 3$; $d_3 = d_4 = -6$.

$$\text{Daí, } d_5 = -(N + \sum_{k=1}^{N-1} d_k) = -(5 + 6 - 12) = 1$$

Logo:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & -5 & -5 & 2 \\ 4 & 4 & -6 & -5 & 2 \\ 4 & 4 & -5 & -6 & 2 \\ 4 & 4 & -5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 5 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 5 & 5 & -2 \\ -4 & -4 & 4 & 5 & -2 \\ -4 & -4 & 5 & 4 & -2 \\ -4 & -4 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_4 e de A_4^{-1} :

$\lambda = -1$, de multiplicidade 5

Determinantes de A_4 e de A_4^{-1} :

$$\det. A_4 = \det. A_4^{-1} = -1 \quad (N = 5, \text{ ímpar})$$

b) Sejam $N = 4$; $d_1 = d_2 = d_3 = 2$.

$$\text{Daí, } d_4 = -(4 + 6) = -10.$$

Logo:

$$A4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -9 \\ 3 & 2 & 3 & -9 \\ 3 & 3 & 2 & -9 \\ 3 & 3 & 3 & -10 \end{pmatrix}; A4^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & 9 \\ -3 & -4 & -3 & 9 \\ -3 & -3 & -4 & 9 \\ -3 & -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A4$ e de $A4^{-1}$:

$\lambda = -1$, de multiplicidade 4.

Determinantes de $A4$ e de $A4^{-1}$:

$\det. A4 = \det. A4^{-1} = 1$ ($N = 4$, par)

c) Sejam $N = 5$; $d_1 = d_2 = 2$; $d_3 = -d_4 = 4$

Daí, $d_5 = -(5 + 2 - 2 + 4 - 4) = -5$

Logo:

$$A4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & -4 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}; A4^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -5 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A4$ e de $A4^{-1}$:

$\lambda = -1$, de multiplicidade 5.

Determinantes de $A4$ e de $A4^{-1}$:

$\det. A4 = \det. A4^{-1} = -1$ ($N = 5$, impar).

1.6. Seja $\mathcal{A5}$ a classe das matrizes quadradas inteiras $A5$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro, par), da forma:

$$A5 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 + 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.6.1)$$

onde d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = -\left(\sum_{k=1}^{N-1} d_k\right) \quad (1.6.2)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A_5 é um número fixo S_{A_5} ,

$$S_{A_5} = -1 \quad (1.6.3)$$

para toda matriz A_5 , da forma (1.6.1)

b) Os autovalores de A_5 são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= (d_k - (d_k - 1)) = 1, \quad k = 1, 3, 5, \dots, N-1 \\ \lambda_k &= (d_k - (d_k + 1)) = -1, \quad k = 2, 4, 6, \dots, N-2 \\ \lambda_N &= S_{A_5} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (1.6.4)$$

Ou seja, A_5 possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } N/2 \\ \lambda &= -1, \text{ de multiplicidade } N/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.6.5)$$

c) O determinante de A_5 , $\det. A_5$, é:

$$\det. A_5 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ for impar} \end{cases} \quad (1.6.6)$$

d) As matrizes A_5 , da forma (1.6.1) são inteiras, com inversas inteiras, A_5^{-1} , facilmente computáveis, da forma:

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & w_2 - 1 & w_3 + 1 & \dots & w_{N-2} - 1 & w_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & w_2 & w_3 + 1 & \dots & w_{N-2} - 1 & w_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & w_3 & \dots & w_{N-2} - 1 & w_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & w_3 - 1 & \dots & w_{N-2} & w_{N-1} + 1 & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & w_3 - 1 & \dots & w_{N-2} + 1 & w_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & w_3 - 1 & \dots & w_{N-2} + 1 & w_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.6.6)$$

ou seja, a primeira e a N -ésima (última) colunas de A_5^{-1} são idênticas às correspondentes colunas de A_5 . As demais são calculadas, como segue:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } k \text{ par, } k=2,4,6, \dots, N-2: \\ w_k = -\left(2\sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k\right) \end{array} \right\} \quad (1.6.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } k \text{ impar, } k=3,5,7, \dots, N-1: \\ w_k = 2\sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k \end{array} \right\} \quad (1.6.8)$$

1.6.1. Exemplos

a) Sejam $N = 4$; $d_1 = d_2 = d_3 = 5$.

$$\text{Daí, } d_4 = -\left(\sum_{k=1}^3 d_k\right) = -(15) = -15.$$

Logo, em virtude de (1.6.1):

$$A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -16 \\ 4 & 5 & 6 & -16 \\ 4 & 6 & 5 & -16 \\ 4 & 6 & 4 & -15 \end{pmatrix}$$

Cálculo da inversa A_5^{-1} .

As primeira e quarta colunas de A_5^{-1} são idênticas às primeira e quarta colunas de A_5 .

As restantes são calculadas, como segue:

$$\begin{aligned} w_2 &= -(2d_1 + d_2) = -(10 + 5) = -15 \\ w_3 &= 2(d_1 + d_2) + d_3 = 2 \times 10 + 5 = 25 \end{aligned}$$

Daí, tendo em vista (1.6.6):

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -16 & 26 & -16 \\ 4 & -15 & 26 & -16 \\ 4 & -14 & 25 & -16 \\ 4 & -14 & 24 & -15 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_5 e de A_5^{-1} :

$$\begin{aligned} \lambda &= -1, \text{ de multiplicidade } 2. \\ \mu &= 1, \text{ de multiplicidade } 2. \end{aligned}$$

Determinantes de A_5 e $A_5^{-1} = 1$ ($N/2 = 2$, par).

c) Sejam $N = 4$; $d_1 = d_2 = d_3 = 0$

$$\text{Daí, } d_4 = -\sum_{j=1}^3 d_j = 0$$

Logo, levando em consideração (1.6.1):

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

As primeira e quarta colunas de A_5^{-1} são idênticas às correspondentes de A_5 .
As demais são calculadas como segue:

$$\begin{aligned} w_2 &= -(2d_1 + d_2) = 0 \\ w_3 &= 2(d_1 + d_2) + d_3 = 0 \end{aligned}$$

Logo, em virtude de (1.6.6):

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja $A_5^{-1} = A_5$.

Este é um fato geral. Se os elementos diagonais de A_5 , $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$, são tais que

$$d_1 = d_2 = \dots = d_{N-1} = 0, \text{ então, } d_N = 0 \text{ e}$$

$$w_2 = w_3 = \dots = w_{N-1} = w_N = 0 \text{ e assim:}$$

A_5^{-1} coincide com A_5 .

Autovalores de A_5 e de A_5^{-1} :

$$\lambda = 1, \text{ de multiplicidade } 2.$$

$$\lambda = -1, \text{ de multiplicidade } 2.$$

Determinantes de A_5 e de A_5^{-1} .

$$\det. A_5 = \det. A_5^{-1} = 1 \text{ (} N/2 = 2, \text{ par)}$$

b) Sejam $N = 6$; $d_1 = d_2 = 3$; $d_3 = 4$; $d_4 = d_5 = -2$.

$$\text{Daí, } d_5 = - \sum_{k=1}^4 d_k = -(6 + 4 - 4) = -6.$$

Logo, em virtude (1.6.1)

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 4 & -3 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & -2 & -7 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A_5^{-1} :

As primeira e sexta coluna de A_5^{-1} são idênticas às correspondentes colunas de A_5 .
As restantes são calculadas, como segue:

$$w_2 = - [(2(d_1) + d_2)] = - (2 \times 3 + 3) = 9$$

$$w_4 = - (2(d_1 + d_2 + d_3) + d_4) = -(2(6+4) - 2) = -18$$

$$w_3 = -2 (d_1 + d_2) + d_3 = 2(6) + 4 = 16$$

$$w_5 = 2 (d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + d_5 = 2(8) - 2 = 14$$

Daí, tendo em vista (1.6.6):

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 17 & -19 & 15 & -7 \\ 2 & -9 & 17 & -19 & 15 & -7 \\ 2 & -8 & 16 & -19 & 15 & -7 \\ 2 & -8 & 15 & -18 & 15 & -7 \\ 2 & -8 & 15 & -17 & 14 & -7 \\ 2 & -8 & 15 & -17 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_5 e de A_5^{-1} ;

$$\lambda = 1, \text{ de multiplicidade } 3.$$

$$\mu = -1, \text{ de multiplicidade } 3.$$

Determinantes de A_5 e de A_5^{-1} :

$$\det. A_5 = \det. A_5^{-1} = -1 \quad (N/2 = 3, \text{ impar})$$

1.7. Seja A_6 a classe das matrizes quadradas inteiras A_6 , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro, par), da forma:

$$A_6 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.7.1)$$

onde d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ são números inteiros quaisquer e

$$d_N = - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \quad (1.7.2)$$

Valem as propriedades

a) A soma dos elementos de cada linha de A_6 é um número fixo S_{A_6} ,

$$S_{A_6} = 1$$

para toda matriz A_6 , da soma (1.7.1)

b) Os autovalores de A_6 são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= (d_k - (d_k - 1)) = 1, \quad k = 2, 4, 6, \dots, N-2 \\ \lambda_k &= (d_k - (d_k + 1)) = -1, \quad k = 1, 3, 5, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_{A_6} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

Ou seja, A_6 possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } N/2 \\ \mu &= -1, \text{ de multiplicidade } N/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.7.4)$$

c.) O determinante de A_6 , $\det. A_6$, é:

$$\det. A_6 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ for impar} \end{cases} \quad (1.7.5)$$

d.) A_6 é matriz inteira, inversível, com inversa inteira A_6^{-1} , facilmente computável da forma:

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & w_2 + 1 & w_3 - 1 & \dots & w_{N-2} + 1 & w_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & w_2 & w_3 - 1 & \dots & w_{N-2} + 1 & w_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & w_3 & \dots & w_{N-2} + 1 & w_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & w_3 + 1 & \dots & w_{N-2} & w_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & w_3 + 1 & \dots & w_{N-2} - 1 & w_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & w_3 + 1 & \dots & w_{N-2} - 1 & w_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.7.6)$$

Ou seja, as primeira e N -ésima (última) colunas de A_5^{-1} coincidem com as correspondentes colunas de A_6 .

As restantes são calculadas, como segue:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } k \text{ ímpar, } k = 3, 5, 7, \dots, N-1: \\ w_k = 2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k \end{array} \right\} \quad (1.7.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } k \text{ par, } k = 2, 4, 6, \dots, N-2: \\ w_k = - \left(2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k \right) \end{array} \right\} \quad (1.7.8)$$

1.7.1 - Exemplos

a) Sejam $N=6$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 2$.

$$\text{Então, } d_6 = - \sum_{k=1}^5 d_k = -10$$

Daí, em virtude de (1. 7. 1):

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & -9 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & -9 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A_6^{-1} :

As primeira e sexta colunas de $A6^{-1}$ são idênticas às correspondentes de $A6$.
As demais são obtidas mediante as relações:

$$\begin{aligned}w_2 &= -(2d_1 + d_2) = -(2 \times 2 + 2) = -6 \\w_3 &= 2(d_1 + d_2) + d_3 = 2(4) + 2 = 10 \\w_4 &= -((2(d_1 + d_2 + d_3) + d_4) = -(2 \times 6 + 2) = -14 \\w_5 &= 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + d_5 = (2(8) + 2) = 18\end{aligned}$$

Daí, em virtude de (1.7.6):

$$A6^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 & -13 & 17 & -9 \\ 3 & -6 & 9 & -13 & 17 & -9 \\ 3 & -7 & 10 & -13 & 17 & -9 \\ 3 & -7 & 11 & -14 & 17 & -9 \\ 3 & -7 & 11 & -15 & 18 & -9 \\ 3 & -7 & 11 & -15 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A6$ e de $A6^{-1}$:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } 3 \\ \mu &= -1, \text{ de multiplicidade } 3\end{aligned}$$

Determinantes de $A6$ e de $A6^{-1}$:

$$\det. A6 = \det. A6^{-1} = -1 \quad (N/2 = 3, \text{ ímpar}).$$

b) Sejam $N=6$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0$

$$\text{Daí, } d_6 = 0, w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0$$

Logo

$$A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Também este é um caso geral. Se os elementos diagonais $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$, de $A6$, da forma (1.7.1) são tais que $d_1 = d_2 = \dots d_{N-1} = 0$, então $d_N = 0$, $w_2 = w_3 = w_4 = \dots = w_{N-2} = w_{N-1} = 0$ e $A6^{-1}$ coincide com $A6$.

1.8 - Consideremos as seqüências SQ1 e SQ2 de N números inteiros, ($N \geq 2$, inteiro, par):

$$SQ1 = \{0, -1, 1, -1, \dots, 1, -1\}$$

$$SQ2 = \{0, 1, -1, 1, \dots, -1, 1\}$$

A partir de SQ1 e de SQ2, construímos, respectivamente, as matrizes $C1$ e $C2$, inteiras, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro, par):

$$C1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vimos nos itens anteriores 1.6, exemplo c) e 1.7 exemplo b), tais matrizes possuem os autovalores:

$$\lambda = 1, \text{ de multiplicidade } N/2.$$

$$\mu = -1, \text{ de multiplicidade } N/2.$$

Seus determinantes, $\det. C1$ e $\det. C2$ são

$$\det C1 = \det C2 = \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ e par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ e ímpar} \end{cases}.$$

As inversas $C1^{-1}$ e $C2^{-1}$ coincidem, respectivamente, com $C1$ e $C2$:

$$C1^{-1} = C1 \quad \text{e} \quad C2^{-1} = C2.$$

Estes são mais dois exemplos de matrizes inteiras, com explícitas inversas inteiras.

1.9. Seja $A8$ a classe das matrizes quadradas inteiras $A8$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro, par), da forma:

$$A8 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_m - 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} + 1 & \dots & d_{N-2} + 1 & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.9.1)$$

onde d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = -\sum_{j=1}^{N-1} d_j \quad (1.9.2)$$

$$m = N/2 \quad (1.9.3)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A8, da forma (1.9.1), é um número fixo S_{A8} ,

$$S_{A8} = -1 \quad (1.9.4)$$

para toda matriz A8, da forma (1.9.1).

b) Os autovalores de A8 são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= (d_k - (d_k - 1)) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_k &= (d_k - (d_k + 1)) = -1, \quad k = m + 1, m + 2, \dots, N - 1 \\ \lambda_N &= S_{A8} = -1 \end{aligned} \right\} \quad (1.9.5)$$

Ou seja, A8 possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } m = N/2 \\ \mu &= -1, \text{ de multiplicidade } m = N/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.9.6)$$

c) O determinante de A8, é:

$$\det. A8 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } m = N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } m = N/2 \text{ for impar} \end{cases} \quad (1.9.7)$$

d) As matrizes A8 são inteiras e inversíveis, com inversas $A8^{-1}$, obtidos da seguinte maneira:

- As $m = N/2$ primeiras colunas de $A8^{-1}$ coincidem com as correspondentes colunas de A8.
- O elemento da diagonal da $(m+1)$ -ésima coluna, w_{m+1} , é dado por:

$$w_{m+1} = (N - 2) - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j - d_{m+1} \right) \quad (1.9.8)$$

- Os elementos acima da diagonal dessa coluna são dados por:

$$w_{m+1} - 1 \quad (1.9.9)$$

e os abaixo, por:

$$w_{m+1} + 1 \quad (1.9.10)$$

- Para as k -ésimas colunas, $k = m+2, m+3, \dots, N-1, N$:
Os elementos diagonais são dados por

$$w_k = -2 - d_k:$$

Os elementos fora da diagonal por:

$$-1 - d_k.$$

1.9.1. Exemplos

- a) Sejam $N = 6$; $d_1 = d_2 = d_3 = 3$; $d_4 = d_5 = 2$.

Daí, de acordo com (1.9.2), temos:

$$d_6 = - \sum_{j=1}^5 d_j = -(9 + 3) = -13$$

Então, segundo (1.9.1):

$$A_8 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & -12 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & -12 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & -12 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & -12 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & -12 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

Construção da inversa A_8^{-1} de A_8 :

As três primeiras colunas de A_8^{-1} coincidem com três primeiras colunas de A_8 .

A quarta coluna é obtida, segundo (1.9.9), por meio de

$$w_4 = (6-2) - (2(d_1 + d_2 + d_3) + d_4) = 4 - (2 \times 9 + 2) = -16$$

Os elementos acima da diagonal, são dados:

$$w_4 - 1 = 16 - 1 = -17$$

os abaixo, por:

$$w_4 + 1 = -16 + 1 = -15.$$

As quinta e sexta colunas são obtidas, como segue:

Seus elementos diagonais, são respectivamente:

$$-2 - d_5 = -2 - 2 = -4; \quad -2 - d_6 = -2 + 13 = 11$$

Os elementos fora da diagonal são, respectivamente:

$$-1 - d_5 = -1 - 2 = -3 ; \quad -1 - d_6 = -1 + 13 = 12.$$

Assim:

$$A8^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -17 & -3 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & -17 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & -17 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & -16 & -3 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & -15 & -4 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & -15 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A8$ e de $A8^{-1}$:

$\lambda = 1$, de multiplicidade 3.

$\mu = -1$, de multiplicidade 3

Determinantes de $A8$ e de $A8^{-1}$:

$$\det. A8 = \det. A8^{-1} = -1 \quad (N/2 = 3, \text{ impar}).$$

b) Sejam $N = 8$, $d_k = -1$, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$d_k = 1, \quad k = 5, 6, 7.$$

$$\text{Daí, } d_8 = -(-4 + 3) = 1.$$

Logo:

$$A8 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo da inversa $A8^{-1}$:

Procedendo de maneira análoga a do Exemplo a) acima, obtemos:

$$w_5 = (8 - 2) - \left(2 \sum_{j=1}^4 d_j + d_5 \right) = 6 - (-4 \times 2 + 1) = 13$$

$$\begin{aligned}
w_5 + 1 &= 13 + 1 = 14; & w_5 - 1 &= 13 - 1 = 12 \\
-2 - d_6 &= -2 - 1 = -3; & -2 - d_7 &= -3; & -2 - d_8 &= -3 \\
-1 - d_6 &= -1 - 1 = -2; & -1 - d_7 &= -2; & -1 - d_8 &= -2
\end{aligned}$$

Logo:

$$A8^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 & 12 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & 12 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 & 12 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & 12 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 13 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 14 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 14 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 14 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A8 e de A8⁻¹:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } 4. \\
\mu &= -1, \text{ de multiplicidade } 4.
\end{aligned}$$

Determinantes de A8 e de A8⁻¹:

$$\det. A8 = \det. A8^{-1} = 1 \quad (N/2 = 4, \text{ par})$$

1.10 - Seja ~~A8~~ a classe das matrizes quadradas inteiras A9, de ordem N (N ≥ 2, inteiro, par), da forma:

$$A9 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m & d_{m+1} + 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_m + 1 & d_{m+1} - 1 & d_{m+2} - 1 & \dots & d_{N-2} - 1 & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

onde d_k, k = 1, 2, ..., N-1 são números inteiros quaisquer e

$$\begin{aligned}
m &= N/2 \\
d_N &= - \sum_{j=1}^{N-1} d_j \quad (1.10.2)
\end{aligned}$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de A9 é um número fixo S_{A9} ,

$$S_{A9} = 1 \quad (1.10.3)$$

para toda matriz A9, da forma (1.10.1).

b) Os autovalores de A9 são

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= (d_k - (d_k + 1)) = -1, \quad k = 1, 2, \dots, m = N/2 \\ \lambda_k &= (d_k - (d_k - 1)) = 1, \quad k = m+1, m+2, \dots, N-2, N-1 \\ \lambda_N &= S_{A9} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.10.4)$$

Ou seja, A9 possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -1, \text{ de multiplicidade } m = N/2 \\ \mu &= 1, \text{ de multiplicidade } m = N/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.10.5)$$

c) O determinante de A9, $\det. A9$, é:

$$\det. A9 = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ for impar} \end{cases} \quad (1.10.6)$$

d) A9 é matriz inteira inversível, com inversa inteira $A9^{-1}$ obtida da seguinte maneira:

- As $N/2$ primeiras colunas de $A9^{-1}$ coincidem com as correspondentes colunas de A9.
- O elemento diagonal w_{m+1} , da coluna de número $m+1$, é dado por:

$$w_{m+1} = (2 - N) - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j + d_{m+1} \right) \quad (1.10.7)$$

- elementos acima da diagonal dessa coluna são dados por:

$$w_{m+1} + 1 \quad (1.10.8)$$

e os abaixo, por

$$w_{m+1} - 1 \quad (1.10.9)$$

- Para as k -ésimas colunas, $k = m+2, m+3, \dots, N-1, N$, os elementos diagonais são dados por:

$$2 - d_k, k = m+2, m+3, \dots, N-1, N \quad (1.10.11)$$

e os demais por:

$$1 - d_k, k = m+2, m+3, \dots, N-1, N. \quad (1.10.12)$$

1.10.1 - Exemplos

a) Sejam $N=6$; $d_k = 2, k = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\text{Daí, } m = 3, d_6 = -\sum_{j=1}^5 d_j = -10$$

Então, segundo (1.10.1):

$$A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 1 & -11 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 1 & -11 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & -11 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & -11 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & -11 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Cálculo da inversa A_9^{-1} de A_9 :

- As três primeiras colunas de A_9^{-1} coincidem com as correspondentes de A_9 .
- O elemento diagonal da coluna número 4, w_4 , é dado por

$$w_4 = (2 - 6) - \left(2 \sum_{j=1}^3 d_j + d_4 \right) = -4 - 2(2(6)+2) = -18$$

- Os elementos acima da diagonal, dessa mesma coluna, por:

$$w_4 + 1 = -18 + 1 = -17$$

os abaixo, por: $w_4 - 1 = -18 - 1 = -19$.

- Os elementos diagonais das quinta e sexta colunas são, respectivamente, dados por:

$$2 - d_5 = 2 - 2 = 0; \quad 2 - d_6 = 2 + 10 = 12$$

- Os demais elementos dessas mesmas colunas, por:

$$1 - d_5 = 1 - 2 = -1; \quad 1 - d_6 = 1 + 10 = 11$$

Logo:

$$A9^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -17 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 3 & -17 & -1 & 11 \\ 3 & 3 & 2 & -17 & -1 & 11 \\ 3 & 3 & 3 & -18 & -1 & 11 \\ 3 & 3 & 3 & -19 & 0 & 11 \\ 3 & 3 & 3 & -19 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$, de multiplicidade 3.

$\mu = 1$, de multiplicidade 3.

Determinantes de $A9$ e de $A9^{-1}$.

$$\det. A9 = \det. A9^{-1} = -1 \quad (N/2 = 3, \text{ ímpar})$$

b) Sejam $N = 4$; $d_1 = d_2 = 5$; $d_3 = -2$

$$\text{Daí, } m = 2; \quad d_4 = -\sum_{j=1}^3 d_j = -(10 - 2) = -8$$

$$A9 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & -9 \\ 6 & 5 & -1 & -9 \\ 6 & 6 & -2 & -9 \\ 6 & 6 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A9^{-1}$:

- As duas primeiras colunas de $A9^{-1}$ coincidem com as correspondentes de $A9$.
- O elemento diagonal w_3 , da terceira coluna, é dado por:

$$w_3 = (2 - 4) - \left(2 \sum_{j=1}^2 d_j + d_3 \right) = -2 - (2(5+5) - 2) = -2 - 18 = -20$$

- Os elementos acima da diagonal, dessa mesma coluna, são dados por
 $w_3 + 1 = -20 + 1 = -19$

os abaixo, dessa mesma coluna, por:

$$w_3 - 1 = -20 - 1 = -21$$

- O elemento diagonal da quarta coluna é dado por:
 $2 - d_4 = 2 + 8 = 10$
- Os demais, dessa mesma coluna, por:
 $1 - d_4 = 1 + 8 = 9$

Logo:

$$A9^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -19 & 9 \\ 6 & 5 & -19 & 9 \\ 6 & 6 & -20 & 9 \\ 6 & 6 & -21 & 10 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A9$ e de $A9^{-1}$:

$\lambda = -1$, de multiplicidade 2.

$\mu = 1$, de multiplicidade 2.

Determinantes de $A9$ e de $A9^{-1}$:

$$\det. A9 = \det. A9^{-1} = 1 \quad (N/2 = 2, \text{ par})$$

1.11 - Seja $A10$ a classe das matrizes quadradas inteiras $A10$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro, ímpar), da forma:

$$A10 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 + 1 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 & d_4 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & d_4 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.11.1)$$

onde os d_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$, são números inteiros quaisquer e

$$d_N = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} d_k \quad (1.11.2)$$

Valem as propriedades:

a) A soma dos elementos de cada linha de $A10$ é um número fixo S_{A10} ,

$$S_{A10} = 1 \quad (1.11.3)$$

para toda matriz $A10$ da forma (1.11.1).

b) Os autovalores de A_{10} são:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= 1, \quad k=1,3, \dots, N-2 \\ \lambda_k &= -1, \quad k=2,4, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_{A_{10}} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.11.4)$$

Ou seja, A_{10} possui os autovalores:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 1, \text{ de multiplicidade } (N+1)/2 \\ \mu &= -1, \text{ de multiplicidade } (N-1)/2 \end{aligned} \right\} \quad (1.11.5)$$

c) O determinante de A_{10} , $\det. A_{10}$, é:

$$\det. A_{10} = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \left\{ \begin{aligned} 1, & \text{ se } (N-1)/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{ se } (N-1)/2 \text{ for impar} \end{aligned} \right\} \quad (1.11.6)$$

d) A_{10} é matriz inteira, inversível, com inversa inteira A_{10}^{-1} , da forma:

$$A_{10}^{-1} = \begin{pmatrix} 2-d_1 & w_2-1 & w_3+1 & w_4-1 & \dots & w_{N-2}+1 & w_{N-1}-1 & d_N+1 \\ 1-d_1 & w_2 & w_3+1 & w_4-1 & \dots & w_{N-2}+1 & w_{N-1}-1 & d_N+1 \\ 1-d_1 & w_2+1 & w_3 & w_4-1 & \dots & w_{N-2}+1 & w_{N-1}-1 & d_N+1 \\ 1-d_1 & w_2+1 & w_3-1 & w_4 & \dots & w_{N-2}+1 & w_{N-1}-1 & d_N+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-d_1 & w_2+1 & w_3-1 & w_4+1 & \dots & w_{N-2} & w_{N-1}-1 & d_N+1 \\ 1-d_1 & w_2+1 & w_3-1 & w_4+1 & \dots & w_{N-2}-1 & w_{N-1} & d_N+1 \\ 1-d_1 & w_2+1 & w_3-1 & w_4+1 & \dots & w_{N-2}-1 & w_{N-1}+1 & d_N \end{pmatrix} \quad (1.11.7)$$

onde a última coluna de A_{10}^{-1} coincide com a última de A_{10} . A primeira é explícita, como mostrado em (1.11.7). As demais colunas são obtidas como segue: Os elementos diagonais w_k , da coluna de ordem k , $k=2,3, \dots, N-1$, são calculados pelas relações:

a) k par:

$$w_k = 2 \left(\sum_{j=1}^{k-1} d_j - 1 \right) + d_k, \quad k=2,4, \dots, N-1 \quad (1.11.8)$$

b) k impar:

$$w_k = -2 \left(\sum_{j=1}^{k-1} d_j - 1 \right) + d_k, \quad k=3,5, \dots, N-2$$

Conhecidos os w_k , os demais elementos da coluna são obtidos como mostrado em (1.11.7).

1.11.1 - Exemplos:

- a) Sejam $N=5$; $d_k = 2$, $k=1, 2, 3, 4$.
Daí, em virtude de (1.11.2):

$$d_5 = 1 - \sum_{k=1}^4 d_k = 1 - 8 = -7.$$

Então, em consequência de (1.11.1):

$$A10 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A10^{-1}$.

$$w_2 = 2 \left(\sum_{j=1}^1 d_j - 1 \right) + d_2 = 2(d_1 - 1) + d_2 = 4$$

$$w_3 = -2 \left(\sum_{j=1}^2 d_j - 1 \right) + d_3 = -2(d_1 + d_2 - 1) + d_3 = -4$$

$$w_4 = 2 \left(\sum_{j=1}^3 d_j - 1 \right) + d_4 = 12$$

Logo, tendo em vista (1.11.7):

$$A10^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 11 & -6 \\ -1 & 4 & -3 & 11 & -6 \\ -1 & 5 & -4 & 11 & -6 \\ -1 & 5 & -5 & 12 & -6 \\ -1 & 5 & -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Autovalores de $A10$ e $A10^{-1}$:

$\lambda = 1$, de multiplicidade 3.

$\lambda = -1$, de multiplicidade 2.

Determinantes de $A10$ e de $A10^{-1}$:

$$\det. A10 = \det. A10^{-1} = 1 \text{ ((N-1)/2, par)}$$

b) Seja $N = 7$; $d_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Daí,

$$d_7 = 1 - \sum_{k=1}^6 d_k = 1$$

Logo:

$$A10 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A10^{-1}$:

$$w_2 = 2 \left(\sum_{j=1}^1 d_j - 1 \right) + d_2 = -2$$

$$w_3 = - \left(2 \sum_{j=1}^2 d_j - 1 \right) + d_3 = 2$$

$$w_4 = 2 \left(\sum_{j=1}^3 d_j - 1 \right) + d_4 = -2$$

$$w_5 = - \left(2 \sum_{j=1}^4 d_j - 1 \right) + d_5 = 2$$

$$w_6 = 2 \left(\sum_{j=1}^5 d_j - 1 \right) + d_6 = -2$$

$$A10^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A_{10} e A_{10}^{-1} :

$\lambda = 1$, de multiplicidade 4.

$\lambda = -1$, de multiplicidade 3.

Determinantes de A_{10} e de A_{10}^{-1} :

$$\det. A_{10} = \det. A_{10}^{-1} = \prod_{k=1}^N \lambda_k = -1; ((N-1)/2 = 3, \text{impar})$$

1.12. Técnicas para geração de matrizes e suas inversas a partir de outras matrizes e suas inversas conhecidas.

1.12.1. Uso de matrizes de permutação.

Seja A quadrada de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), inversível, com inversa A^{-1} conhecida.

A partir de A , construímos matriz B ,

$$B = PA \quad (1.12.1.1)$$

onde P é matriz de permutação de ordem N . PA é obtida de A efetuando-se sobre suas linhas a mesma permutação que se aplicou às linhas de I_N para se obter P .

Então, como $P^{-1} = P^t$ (matriz transposta de P), temos

$$B^{-1} = (PA)^{-1} = A^{-1} P^{-1} = A^{-1} P^t \quad (1.12.1.2)$$

Daí, B^{-1} é obtida de A^{-1} aplicando-se às colunas de A^{-1} a permutação indicada pelas colunas de P^t . Como as colunas de P^t são as linhas de P , podemos afirmar:

"Para se obter B^{-1} a partir de A^{-1} , procedemos com as colunas de A^{-1} do mesmo modo que procedemos com as linhas de A para obter B ".

Por outro lado, se definirmos B por:

$$B = AP \quad (1.12.1.3)$$

Então:

$$B^{-1} = P^t A^{-1} \quad (1.12.1.4)$$

Isto é, para se obter B a partir de A , neste caso, aplicamos às colunas de A a permutação definida pelas linhas de P^t . Para se obter B^{-1} , a partir de A^{-1} , procedemos do mesmo modo com as linhas de A^{-1} .

Se $A = A^{-1}$, pode-se obter B , a partir de A tal que:

$$B = B^{-1}$$

De fato, seja

$$B = P^t A P \quad (1.12.1.5)$$

Então,

$$B^{-1} = P^t A P = B$$

Assim, para se obter B, tal que $B = B^{-1}$, efetua-se sobre as colunas de A, $A = A^{-1}$, a permutação definida por P^t e sobre a matriz resultante, AP, aplica-se, às suas linhas, a mesma permutação P^t .

$$\text{Se definirmos: } B = P A P^t \quad (1.12.1.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } A = A^{-1}, \text{ então} \\ B^{-1} = P A P^t = B. \end{aligned}$$

Daí, neste caso, para se obter B, tal que $B = B^{-1}$, aplica-se às colunas de A, $A = A^{-1}$, a permutação definida por P e sobre a matriz resultante, AP^t , a mesma permutação às suas linhas.

Na prática, quando se deseja construir manualmente B e B^{-1} , a partir de A e A^{-1} , respectivamente, utiliza-se, em vez de matriz de permutação P, a correspondente função, que também designamos por “P”, que aplica o conjunto $\{1, 2, \dots, N-1, N\}$ biunivocamente sobre si mesmo, representada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N-1 & N \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{N-1} & c_N \end{bmatrix} \quad (1.12.1.8)$$

onde $c_j \in \{1, 2, 3, \dots, N-1, N\}$ e $c_j \neq c_k$, para $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \dots, N-1, N$.

P, como representado em (1.12.1.8) deve ser entendida como conjunto de pares:

$$P = \{(1, c_1), (2, c_2), \dots, (N-1, c_{N-1}), (N, c_N)\}.$$

Assim, P quando aplicada às linhas de matriz A para produzir matriz B, $B = PA$, leva a linha índice k de A à linha de índice c_k de B, $k = 1, 2, \dots$. Inversamente, a permutação P^{-1} ,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} & c_N \\ 1 & 2 & \dots & N-1 & N \end{bmatrix} = \{(c_1, 1), (c_2, 2), \dots, (c_N, N),$$

quando aplicada às linhas B, leva de volta a linha de índice c_k de B à linha de índice k de A, $k = 1, 2, \dots, N$.

Por exemplo:

$$\text{Sejam } N = 5; P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix}; \quad \text{Então: } PA = \begin{bmatrix} L_2 \\ L_5 \\ L_1 \\ L_4 \\ L_3 \end{bmatrix} = B$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{bmatrix} = A; \quad P^{-1}B = P^{-1}(PA) = (P^{-1}P)A = I_5 A = A.$$

1.12.1.1- Exemplos

a) Sejam $N = 5$ e A e A^{-1} matrizes construídas como descrito no item 1.4 deste capítulo, levando-se em consideração as relações (1.4.2), (1.4.1) e (1.4.4):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & -10 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & 10 \\ -1 & -1 & -3 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sejam } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então, aplicando P às linhas de A , temos:

$$B = PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -10 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Procedendo do mesmo modo com as colunas de A^{-1} , obtemos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 & -2 & -3 \\ 10 & -1 & -4 & -1 & -3 \\ 10 & -1 & -4 & -2 & -2 \\ 10 & -1 & -3 & -2 & -3 \\ 11 & -1 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Pode-se verificar que: $B B^{-1} = B^{-1} B = I_5$.

b) Sejam A , A^{-1} , P e P^{-1} como no exemplo a) acima.

$$\text{Seja } B = AP = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -10 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -10 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -10 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -9 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtida aplicando-se às colunas A a permutação P^{-1} .

$$B^{-1} = P^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -4 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 11 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

obtida aplicando-se às linhas de A^{-1} a mesma permutação P^{-1} , que se aplicou às colunas de A para se obter B .

Verifica-se que $B^{-1} B = B B^{-1} = I_5$.

c) Sejam $N = 5$ e A e A^{-1} obtidas usando-se as relações (1.2.2) e (1.2.4) do item 1.2 deste capítulo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & -12 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -11 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Como se pode verificar, calculando:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_5.$$

$$\text{Sejam } P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$B = P^t A P = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -12 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & -12 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & -12 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -11 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -12 & 5 \end{pmatrix} = B^{-1} = P^{-1} A^{-1} P,$$

como se pode verificar facilmente.

$B = B^{-1}$ foi obtida de $A = A^{-1}$, aplicando-se às colunas de A a permutação P^{-1} e às linhas da matriz resultante, AP , a mesma permutação P^{-1} .

d) Sejam $A = A^{-1}$ e P e P^{-1} , como no exemplo anterior.

$$B = P(A P^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & -12 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -12 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -12 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -11 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -12 & 5 \end{pmatrix} = B^{-1}.$$

De fato, $B B^{-1} = B^{-1} B = I_5$.

A matriz B foi obtida de A , aplicando-se às suas colunas a permutação P e às linhas da matriz resultante, $A P^{-1}$, a mesma permutação P .

Observação: A partir de A e de A^{-1} , de dada ordem N , podemos construir $2N!$ matrizes B e B^{-1} , bem como o de $A = A^{-1}$, construir outras tantas matrizes $B = B^{-1}$, usando a técnica das matrizes de permutação.

1.12.2- Uso da operação de transposição de linhas e colunas de matriz.

Sejam A e A^{-1} matrizes dadas. A partir de A , construímos B ,

$$B = A^t \quad (1.12.2.1)$$

onde A^t é a matriz transposta de A .

Então:

$$B^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (1.12.2.2)$$

(“A transposta da inversa é a inversa da transposta”).

Evidentemente, se $A = A^{-1}$, então $B = B^{-1}$.

1.12.2.1- Exemplo

Sejam $N = 5$ e A e A^{-1} como no exemplo a) acima.

Então

$$B = A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ -10 & -10 & -10 & -10 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & -4 & -3 & -4 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Então: $B B^{-1} = B^{-1} B = I_5$.

1.12.3- Uso da operação de multiplicação de matrizes.

Sejam A_1 e A_2 matrizes inversíveis, com inversas A_1^{-1} e A_2^{-1} conhecidas.

Pomos $B = A_1 A_2$ ou $B = A_2 A_1$.

Então: $B^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1}$ ou $B^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1}$, (1.12.3.1)
respectivamente.

1.12.3.1- Exemplo

Sejam $N = 3$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = A_2^{-1}$$

$$\text{Sejam } B_1 = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 8 \\ -5 & -4 & 8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$B_2 = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -8 \\ 5 & 2 & -8 \\ 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Então: } B_1^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1} = A_2 A_1 = B_2$$

$$B_2^{-1} = (A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} = A_1 A_2 = B_1$$

$$\text{Pode-se verificar que: } B_1 B_1^{-1} = B_1 B_2 = I_3 = B_2 B_1$$

$$B_2 B_2^{-1} = B_2 B_1 = I_3 = B_1 B_2$$

Observação: As técnicas para obtenção de novas matrizes a partir de outras dadas, apresentadas e discutidas nos itens 1.12.1 a 1.12.3, deste capítulo, são particularmente úteis e interessantes quando aplicadas a matrizes inteiras, inversíveis, com inversas inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis, porque preservamos nas matrizes resultantes da aplicação dessas técnicas, essas importantes características, como se pode constatar, reexaminando os exemplos dados nesta secção 1.12.

Capítulo 2

2.1. Introduziremos, neste capítulo, classe $\mathcal{A}$ de matrizes quadradas A , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) de elementos inteiros, racionais, reais ou complexos, cujos problemas de autovalores e de inversão (se não singulares) são facilmente solucionáveis. Mostraremos que se pode construir matriz pertencente à classe $\mathcal{A}$ com determinados autovalores, determinante ou característica (posto). Também exibiremos diferentes técnicas de se construir $A \in \mathcal{A}$, bem como algumas outras das importantes propriedades de que gozam tais matrizes.

2.2. Seja $\mathcal{A}$ a classe das matrizes quadradas A , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{N-1} & b_N \\ a_1 & d_2 & b_3 & \dots & b_{N-1} & b_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \dots & b_{N-1} & b_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b_{N-1} & b_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & d_{N-1} & b_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & d_N \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

onde d_k , $k=1, 2, \dots, N$; a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$; b_k , $k=2, 3, \dots, N-1, N$, são números inteiros, racionais, reais ou complexos, sendo exigido que satisfaçam às seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned} d_1 + \sum_{k=2}^N b_k &= a_1 + d_2 + \sum_{k=3}^N b_k = a_1 + a_2 + d_3 + \sum_{k=4}^N b_k = \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{N-3} a_k + d_{N-2} + \sum_{k=N-1}^N b_k = \sum_{k=1}^{N-2} a_k + d_{N-1} + b_N = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + d_N = S_A \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

onde S_A é um número fixo para cada matriz $A \in \mathcal{A}$ da forma (2.2.1).

Isto é, a soma dos elementos de cada linha de A é um número fixo, S_A , para cada matriz $A \in \mathcal{A}$, da forma (2.2.1).

De (2.2.2) resulta, imediatamente, a seguinte.

Proposição 1- Se $A \in \mathcal{A}$, e satisfaz (2.2.2), então:

$$\left. \begin{aligned} d_k + b_{k+1} &= a_k + d_{k+1} \\ \text{ou} \\ d_k - a_k &= d_{k+1} - b_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad k=1, 2, \dots, N-1 \quad (2.2.3)$$

2.2.1- Autovalores e autovetores de $A \in \mathcal{A}$.

Teorema 1- Os números

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lambda_k = d_k - a_k = d_{k+1} - b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \text{b) } \lambda_N = S_A \end{array} \right\} \quad (2.2.1.1.)$$

são autovalores de $A \in \mathcal{A}$.

Prova.

No caso a), substitue-se λ por λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, na matriz $A - \lambda I$, formando a matriz $A - \lambda_k I$ e verifica-se que esta matriz tem iguais as linhas de índices k e $k+1$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Então, o determinante de $A - \lambda_k I$ é igual a zero, mostrando que $\lambda_k = d_k - a_k = d_{k+1} - b_{k+1}$ é autovalor de $A \in \mathcal{A}$.

No caso b), usa-se o conceito de traço de uma matriz A , $\text{TR}.A$, como a soma dos elementos diagonais de A . Assim, para a matriz $A \in \mathcal{A}$, $\text{TR}.A = \sum_{k=1}^N d_k$.

Por outro lado sabe-se que $\text{TR}.A = \sum_{k=1}^N \lambda_k$, onde λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ são os autovalores de A .

Dai,

$$\sum_{k=1}^N d_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k = \lambda_N + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k$$

$$\text{Então: } \lambda_N = \sum_{k=1}^N d_k - \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k = \sum_{k=1}^N d_k - \sum_{k=1}^{N-1} (d_k - a_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} a_k + d_N = S_A.$$

Logo: $\lambda_N = S_A$ é o N -ésimo autovalor de A .

Do Teorema 1, relações (2.2.1.1) a) e b), decorre que se $A \in \mathcal{A}$ é inteira, seus autovalores são inteiros, como soma ou diferença de números inteiros.

Reciprocamente, porém, não é verdade. Existem matrizes não inteiras com até todos os seus autovalores inteiros.

Por exemplo, a matriz $A \in \mathcal{A}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1,5 & 2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 0,5 & 3,5 & 2,5 & -0,5 \\ 0,5 & 1,5 & 4,5 & -0,5 \\ 0,5 & 1,5 & 1,5 & 2,5 \end{pmatrix}; \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = S_A = 6 \end{matrix}$$

tem todos os seus autovalores inteiros, muito embora não seja inteira.

2.2.2- Determinante de $A \in \mathcal{A}$, $\det.A$.

Sabe-se que o determinante de uma matriz quadrada A , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), é dado por:

$$\det. A = \prod_{k=1}^N \lambda_k \quad (2.2.2.1)$$

onde $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ são os autovalores de A . Então, para as matrizes $A \in \mathcal{A}$, temos:

$$\det.A = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \prod_{k=1}^{N-1} (d_k - a_k) \cdot S_A \quad (2.2.2.2)$$

2.2.3- Autovetores de $A \in \mathcal{A}$.

Teorema 2- Os vetores $v_k, k = 1, 2, \dots, N-1, N$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^N b_k \\ -a_1 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=3}^N b_k \\ \sum_{k=3}^N b_k \\ -(a_1 + a_2) \\ \vdots \\ -(a_1 + a_2) \end{pmatrix}; \dots; v_{N-1} = \begin{pmatrix} b_N \\ b_N \\ \vdots \\ b_N \\ -\sum_{k=1}^{N-1} a_k \end{pmatrix}; v_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.3.1.)$$

quando diferentes de zero, são autovetores de $A \in \mathcal{A}$, da forma (1.2.1) satisfazendo (1.2.2), correspondentes, respectivamente, aos autovalores $\lambda_k = (d_k - a_k), k = 1, 2, \dots, N-1$ e $\lambda_N = S_A$.

Prova.

A prova é feita mostrando-se que os $v_k, k = 1, 2, \dots, N-1, N$ satisfazem às equações:

$$\left. \begin{array}{l} Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, N \\ \text{ou} \\ (Av_k - \lambda I)v_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, N \end{array} \right\} \quad (2.2.3.2)$$

Decorre de (2.2.3.1) que se $A \in \mathcal{A}$ é inteira, seus autovetores são inteiros.

2.2.4. Construção de matriz $A \in \mathcal{A}$ sendo dados os elementos $d_k, k = 1, 2, \dots, N$ e $a_k, k = 1, 2, \dots, N-1$.

Sendos dados esses elementos, podemos obter, por meio da relação (2.2.3) a), os elementos $b_k, k = 2, \dots, N$.

De fato, de $d_k + b_{k+1} = a_k + d_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1$, obtemos:

$$b_{k+1} = d_{k+1} - d_k + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.2.4.1)$$

Conhecidos $d_k, k = 1, \dots, N$; $a_k, k = 1, \dots, N-1$, os autovalores se explicitam pelas relações:

$$\lambda_k = d_k - a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\lambda_N = d_N + \sum_{k=1}^{N-1} a_k = S_A$$

2.2.4.1- Exemplo

Sejam $N = 5$; $d_1 = 3$; $d_2 = 4$; $d_3 = 2$; $d_4 = 5$; $d_5 = 1$
 $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 4$;

Então, de acordo com (2.2.4.1).

$$\begin{aligned} b_2 &= d_2 - d_1 + a_1 = 4 - 3 + 1 = 2 \\ b_3 &= d_3 - d_2 + a_2 = 2 - 4 + 2 = 0 \\ b_4 &= d_4 - d_3 + a_3 = 5 - 2 + 3 = 6 \\ b_5 &= d_5 - d_4 + a_4 = 1 - 5 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Assim:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

Autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= d_1 - a_1 = 2; & \lambda_4 &= d_4 - a_4 = 5 - 1 = 4; \\ \lambda_2 &= d_2 - a_2 = 2 & \lambda_5 &= S_A = 11 \\ \lambda_3 &= d_3 - a_3 = -1 \end{aligned}$$

Determinante de A, $\det. A$,

$$\det. A = \prod_{k=1}^5 \lambda_k = 2.2.(-1). 4. 11 = -176$$

Autovetores de A :

$$v_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}; \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.5 - O problema de autovalores de $A \in \mathcal{A}$.

Resumindo, conhecida $A \in \mathcal{A}$, conforme vimos em (2.2.1.1) e (2.2.3.1) pode-se, mediante simples operações de adição ou de subtração, explicitar-lhe os autovalores e correspondentes autovetores. Isto é, o problema de autovalores de $A \in \mathcal{A}$ é facilmente solucionável.

2.2.6- A estrutura de Blocos Digionais.

$$\text{A relação (2.2.3), } d_k + b_{k+1} = a_k + d_{k+1} = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

sugere que se defina o que chamaremos de Blocos Diagonais, BL_k , que são matrizes de ordem 2, construídas ao longo da diagonal principal de $A \in \mathcal{A}$, de ordem $N \geq 2$, da forma:

$$BL_k = \begin{pmatrix} d_k & b_{k+1} \\ a_k & d_{k+1} \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.2.6.1)$$

tais que a soma dos elementos de cada uma de suas linhas é um número fixo s_k , para cada bloco BL_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Abaixo mostramos, em matriz $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$), os blocos diagonais BL_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, destacados.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & b_2 \\ a_1 & d_2 \end{bmatrix} & & & & \\ & b_3 & & & \\ & & \begin{bmatrix} d_3 & b_4 \\ a_3 & d_4 \end{bmatrix} & & \\ & a_2 & & \ddots & \\ & & & & \begin{bmatrix} d_{N-1} & b_N \\ a_{N-1} & d_N \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Esta estrutura de Blocos Diagonais permite:

- i) que se construa $A \in \mathcal{A}$, de maneira prática e eficiente, sendo fornecidos $d_k, k = 1, 2, \dots, N$ e $a_k, k = 1, 2, \dots, N-1$. Colocamos ao longo da diagonal principal da matriz A , a ser construída, os $d_k, k = 1, 2, \dots, N$ e ao longo da primeira paralela abaixo dessa diagonal, os $a_k, k = 1, 2, \dots, N-1$. A partir de $k = 1$ até $k = N-1$, vamos destacando os Blocos Diagonais BL_k e, simultaneamente, escolhendo $b_{k+1}, k = 1, \dots, N-1$ tal que $d_k + b_{k+1} = s_k$.

A seguir completamos a coluna de índice $k, k = 1, 2, \dots, N$, abaixo do elemento d_k , com a_k e acima, com o b_k calculado. E, assim, a matriz A está construída. Analogamente, mutatis mutandis, sendo dados $b_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1$ e $d_k, k = 1, 2, \dots, N$ podemos obter os $a_k, k = 1, 2, \dots, N-1$ e construir $A \in \mathcal{A}$.

- ii) que, uma vez construída A , verificar se os b_{k+1} (ou os a_k), $k = 1, 2, \dots, N-1$ foram corretamente calculados, de vez que devem satisfazer à condição:

$$d_k + b_{k+1} = s_k, \quad s_k = a_k + d_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

2.2.6.1. Exemplos

- a) Sejam $N = 5; d_1 = 2; d_2 = -3; d_3 = 5; d_4 = 3; d_5 = -4$.
 $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 2; a_4 = 1$.

Vamos construir $A \in \mathcal{A}$, de ordem 5, usando a técnica dos BLOCOS DIAGONAIS, como acima descrita em 2.2.5, i):

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ 1 & -3 & & & \\ & 2 & 5 & & \\ & & 2 & 3 & \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & & & \\ 1 & -3 & 10 & & \\ & 2 & 5 & 0 & \\ & & 2 & 3 & -6 \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 10 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = A$$

Para conferir se os $b_{k+1}, k = 1, 2, 3, 4$, foram calculados corretamente, verificamos se

$s_k = a_k + d_{k+1} = d_k + b_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1$. No caso, $s_1 = -2; s_2 = 7; s_3 = 5; s_4 = -3$.

- b) Sejam $N = 5$; $d_1 = 2$; $d_2 = -3$; $d_3 = 5$; $d_4 = 3$; $d_5 = -4$
 $b_2 = -4$; $b_3 = 10$; $b_4 = 0$; $b_5 = -6$.

Construir matriz $A \in \mathcal{A}$, usando a técnica dos BLOCOS DIAGONAIS.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & & & \\ & -3 & 10 & & \\ & & 5 & 0 & \\ & & & 3 & -6 \\ & & & & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & & & \\ 1 & -3 & 10 & & \\ & 2 & 5 & 0 & \\ & & 2 & 3 & -6 \\ & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 10 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = A$$

2.2.7- Construção de $A \in \mathcal{A}$ com prefixados autovalores ou determinantes.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$, ($N \geq 2$, inteiro) números quaisquer. Quer-se construir, se possível, matriz $A \in \mathcal{A}$ que tenha esses N números como seus autovalores.

Escolhemos arbitrariamente $N-1$ números d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, que serão os $N-1$ primeiros elementos diagonais da possível matriz A a ser construída. Daí, obtemos os a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, usando a relação $d_k - a_k = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$,

$$a_k = d_k - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.2.7.1)$$

Obtidos os a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, calculamos d_N , usando a relação:

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k + d_N = S_A = \lambda_N,$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k. \quad (2.2.7.2)$$

A partir de d_k , $k = 1, 2, \dots, N$ e de a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, obtemos b_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$:

$$b_{k+1} = d_{k+1} - d_k + a_k \quad (2.2.7.3)$$

ou

$$b_{k+1} = d_{k+1} - \lambda_k, \quad (2.2.7.4)$$

que decorre de (2.2.6.3).

A relação (2.2.6.3) faculta o uso da técnica dos BLOCOS DIAGONAIS para obtenção dos b_k a partir de d_N , $k=1, 2, \dots, N$ e dos a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$.

Assim, obtidos d_N , a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$ e b_k , $k=2, \dots, N$, matriz $A \in \mathcal{A}$ que tenha os N números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ como seus autovalores pôde ser construído. Evidentemente A não é única.

Se se desejar construir matriz $A \in \mathcal{A}$ tal que, dado número D qualquer, tenha esse número D como seu determinante, basta escolher os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$, tais que

$$\prod_{k=1}^N \lambda_k = D.$$

Daí, para frente, o processo é idêntico ao que acabamos de expor para se obter matriz $A \in \mathcal{A}$ que tenha os números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}, \lambda_N$ como seus autovalores.

Assim, podemos afirmar: “É sempre possível se construir matriz $A \in \mathcal{A}$, de uma dada ordem N ($N \geq 2$, inteiro), com prefixados autovalores ou determinante”. Em particular, sempre se pode construir matriz inteira $A \in \mathcal{A}$ com prefixados autovalores ou determinante inteiros.

2.2.7.1. Exemplos

a) Seja $N=4$; $\lambda_1=2$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=-1$; $\lambda_4=5$.

Construir matriz A de ordem 5, inteira, que tenha os números λ_k , $k=1, 2, 3, 4$, acima, como seus autovalores.

Escolhemos arbitrariamente (porém inteiros) os 3 primeiros elementos diagonais de A :

$$d_1=4; d_2=5; d_3=2$$

Usando (2.2.6.1), calculamos a_k , $k=1, 2, 3$:

$$a_1 = d_1 - \lambda_1 = 4 - 2 = 2; \quad a_3 - d_3 - \lambda_3 = 2 - 3 = -1.$$

$$a_2 = d_2 - \lambda_2 = 5 - 3 = 2;$$

$$\text{Calculamos } d_4 = \lambda_4 - (a_1 + a_2 + a_3) = 5 - 3 = 2.$$

Passamos, então à técnica dos blocos diagonais:

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ 2 & 5 & & \\ & 2 & 2 & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & & \\ 2 & 5 & -1 & \\ & 2 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda_1 = 4 - 2 = 2; \quad \lambda_2 = 5 - 2 = 3; \quad \lambda_3 = 2 - (-1) = 3; \quad \lambda_4 = 2 + 2 - 1 + 2 = 5.$$

b) Seja $N = 4$; $D = 12$

Construir matriz $A \in \mathcal{A}$ tal que $\det. A = D = 12$.

Temos que escolher quatro números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tais que

$$\prod_{k=1}^4 \lambda_k = 12$$

Há várias opções: 1, 1, 1, 12; 1, 2, 2, 3; 1, 1, 4, 3; ...

Vamos escolher a segunda delas.

Então: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 2$; $\lambda_4 = 3$.

Escolhendo arbitrariamente $d_1 = 4$; $d_2 = 5$; $d_3 = 2$.

Daí, $a_1 = 3$; $a_2 = 3$; $a_3 = 0$

$$d_4 = 3 - (6) = -3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & & \\ 3 & 5 & & \\ & 3 & 2 & \\ & & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & & \\ 3 & 5 & 0 & \\ & 3 & 2 & -5 \\ & & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda_1 = 4 - 3 = 1; \lambda_2 = 5 - 3 = 2; \lambda_3 = 2 - 0 = 2; \lambda_4 = 3 + 3 + 0 - 3 = 3;$$

$$\det.A = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

2.2.8 - Construção de matriz $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) com prefixada característica R ($1 \leq R \leq N$, inteiro).

Como consequência do fato de que se pode construir matriz $A \in \mathcal{A}$, com predeterminados autovalores, apresentaremos a seguir, algoritmo para a construção de $A \in \mathcal{A}$ com prefixada característica R ($1 \leq R \leq N$, inteiro).

2.2.8.1 - Algoritmo 1

a) Escolhemos o número R ($1 \leq R \leq N$, inteiro) que desejamos seja a característica de A e o número N ($N \geq 2$, inteiro), ordem de A .

b) Escolhemos $N-1$ números quaisquer d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ que serão os $N-1$ primeiros elementos diagonais de A .

c) Escolhemos $N-1$ números λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ que serão os $N-1$ primeiros autovalores de A :

- $\lambda_j = 0$, para $j = 1, 2, \dots, N-R$;
- $\lambda_j \neq 0$, para $j = N - R + 1, \dots, N-1$.

d) Calculamos a_k , $k= 1, 2, \dots, N-1$:

$$\left. \begin{array}{l} a_j = d_j, j=1, 2, \dots, N-R \\ a_j = d_j - \lambda_j, j=N-R+1, \dots, N-1. \end{array} \right\} \quad (2.2.8.1.1)$$

e) Calculamos d_N , satisfazendo:

$$d_N \neq - \left(\sum_{j=1}^{N-R} d_j + \sum_{j=N-R+1}^{N-1} a_j \right) \quad (2.2.8.1.2)$$

(para garantir que λ_N seja diferente de zero)

e

$$d_N \neq - \sum_{j=N-R+1}^{N-1} a_j \quad (2.2.8.1.3)$$

(tal escolha de d_N será justificada adiante)

f) Calculamos b_{k+1} , $k= 1, 2, \dots, N-1$:

$$\left. \begin{array}{l} b_{j+1} = d_{j+1}, j=1, 2, \dots, N-R; \\ b_{j+1} = d_{j+1} - \lambda_j, j=N-R+1, \dots, N-1 \end{array} \right\} \quad (2.2.8.1.4)$$

g) Calculamos λ_N (N -ésimo autovalor de A) e verificamos que $\lambda_N \neq 0$:

$$\lambda_N = \sum_{j=1}^{N-R} d_j + \sum_{j=N-R+1}^{N-1} a_j + d_N. \quad (2.1.8.1.5)$$

Todos os elementos para construção de $A \in \mathcal{A}$ tal que A tenha característica R estão agora disponíveis.

Analisando-se a matriz A , assim construída, verifica-se que:

- As suas $N-R+1$ primeiras linhas são iguais entre si. logo, as $N-P$ primeiras podem ser descartadas, para determinação da característica de R de A , porque todas as submatrizes de ordem K , $2 \leq K \leq N-R$, construídas a partir dessas $N-R$ linhas têm determinante zero, uma vez que terão ao menos duas linhas iguais entre si. Resta, então, a matriz retangular B , $R \times N$, de R linhas e N colunas. Dela podemos extrair a submatriz A_R , de ordem R , constituídas das últimas R colunas de B :

$$A_R = \begin{pmatrix} d_{N-R+1} & b_{N-R+2} & \dots & b_{N-1} & b_N \\ a_{N-R+1} & d_{N-R+2} & \dots & b_{N-1} & b_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-R+1} & a_{N-R+2} & \dots & d_{N-1} & b_N \\ a_{N-R+1} & a_{N-R+2} & \dots & a_{N-1} & d_N \end{pmatrix} \quad (2.2.8.1.6)$$

A_R da forma (2.2.7.1.6) goza, entre outras, das seguintes propriedades:

- $A \in \mathcal{A}$, da forma (1.2.1), satisfazendo (1.2.2), com

$$S_{A_R} = \left\{ \sum_{k=1}^{R-1} a_{N-R+k} + d_N \right\} \quad (2.2.8.1.7)$$

- Os autovalores de A_R , μ_k , $k = 1, 2, \dots, R$, são facilmente obtidos:

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= d_{N-R+k} - a_{N-R+k} = \lambda_{N-R+k} \neq 0, k=1,2,\dots,R-1 \\ \mu_R &= S_{A_R} = \sum_{k=1}^{R-1} a_{N-R+k} + d_N \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8.1.8)$$

(Essa a razão porque escolhemos d_N como em (2.2.7.1.3), para garantir que tivéssemos $\mu_R \neq 0$).

É possível que existam outras submatrizes de B de ordem R não singulares mas A_R , definida em (2.2.7.1.6) é a mais facilmente manipulável e reúne as condições de ter os seus autovalores praticamente explícitos e assim, a verificação de que ela é não singular, é trivial.

Por outro lado, toda e qualquer submatriz de A de ordem $K > R$ é singular. Assim, existe em A ao menos uma submatriz não singular de ordem R e toda e qualquer submatriz de ordem $K > R$ é singular. Logo, a característica de A é R .

Exibimos, a seguir, para $N = 7$ e $R = 3$, modelo de matriz $A \in \mathcal{A}$, construída segundo o algoritmo proposto em 2.2.7.1.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & d_5 & b_6 & b_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & d_5 & b_6 & b_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & d_5 & b_6 & b_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & d_5 & b_6 & b_7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & d_5 & b_6 & b_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & a_5 & d_6 & b_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \vdots & a_5 & a_6 & d_7 \end{pmatrix}$$

$$N - R = 7 - 3 = 4;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 ; a_1 = d_1; a_2 = d_2 ; a_3 = d_3; a_4 = d_4$$

$$\lambda_5 = d_5 - a_5 \neq 0; \lambda_6 = d_6 - \lambda_6 \neq 0 ; \lambda_7 = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + a_5 + a_6 + d_7 \neq 0$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} d_5 & b_6 & b_7 \\ a_5 & d_6 & b_7 \\ a_5 & a_6 & d_7 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mu_1 &= d_5 - a_5 = \lambda_5 \neq 0 \\ \mu_2 &= d_6 - a_6 = \lambda_6 \neq 0 \\ \mu_3 &= S_{A_3} = a_5 + a_6 + d_7 \neq 0 \end{aligned}$$

$$d_7 \neq - \left(\sum_{j=1}^4 d_j + \sum_{j=5}^6 a_j \right) \text{ e } d_7 \neq - \sum_{j=5}^6 a_j$$

As 5 primeiras linhas de A são iguais entre si e toda e qualquer sub-matriz de A, de ordem maior 3, é singular, pois terá, ao menos, duas linhas iguais. Por outro lado A_3 é não singular, uma vez que todos os seus autovalores são diferentes de zero.

Logo, a característica de A é $R = 3$.

2.2.8.2.1- Exemplo

Sejam $N = 6$; $R = 3$; $d_1 = d_2 = d_3 = 3$; $d_4 = 5$; $d_5 = 2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = 2.$$

Então: $a_1 = d_1 = 3$; $a_2 = d_2 = 3$; $a_3 = d_3 = 3$; $a_4 = d_4 - \lambda_4 = 5 - 1 = 4$;

$$a_5 = d_5 - \lambda_5 = 2 - 2 = 0$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + a_4 + a_5 = 13; a_4 + a_5 = 4 + 0 = 4; N - P = 3$$

Então $d_5 \neq 13$ e $d_5 \neq 4$. Fazemos $d_5 = 5$.

Usando, então, a técnica dos Blocos Diagonais, obtemos as b_k , $k = 2, 3, 4, 5, 6$, e construímos A, de característica $P = 3$.

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ & 3 & 3 & & \\ & & 3 & 5 & \\ & & & 4 & 2 \\ & & & & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ & 3 & 3 & 5 & \\ & & 3 & 5 & 1 \\ & & & 4 & 2 & 3 \\ & & & & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \overline{5} & \overline{1} & \overline{3} \\ 3 & 3 & 3 & \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} \\ 3 & 3 & 3 & \overline{4} & \overline{0} & \overline{5} \end{pmatrix} = A$$

A submatriz de ordem 3, destacada em A, tem os seus três autovalores:

$$\mu_1 = 5 - 4 = 1 ; \mu_2 = 2 - 0 = 2 ; \mu_3 = 4 + 0 + 5 = 9$$

diferentes de zero. Logo é não singular.

Todas as demais submatrizes de A de ordem maior que 3 são singulares. Logo, a característica de A é $R = 3$.

Pode-se verificar que $\lambda_6 = 3 \times 3 + 4 + 0 + 5 = 18$ é diferente de zero.

Pelo que vimos, o ALGORITMO 1, proposto em 2.2.7.1, para a construção de matriz $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), com prefixada característica R ($1 \leq R \leq N$, inteiro), pede quantidade superabundante de dados para realizar tal construção. Na verdade não se necessita saber o valor dos autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1, N$, mas apenas quantos e quais deles são iguais ou diferentes de zero. Assim sendo, somos levados a definir algoritmo mais simples, para efetuar a construção pretendida, a saber:

2.2.8.2 - ALGORITMO 2

a) Escolhemos N ($N \geq 2$, inteiro) e R ($1 \leq R \leq N$), que serão, respectivamente a ordem e a característica da matriz A a ser construída.

b) Escolhemos arbitrariamente d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, como sendo os N-1 primeiros elementos diagonais de $A \in \mathcal{A}$.

c) Escolhemos a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, tais que

$$a_k = d_k, k = 1, 2, \dots, N-R; \quad b_{k+1} = d_{k+1}, k = 1, \dots, N-R.$$

$$a_k \neq d_k, k = N - R + 1, \dots, N-1.$$

d) Escolhemos d_N tal que

$$d_N \neq -\left(\sum_{j=1}^{N-R} d_j + \sum_{j=N-R+1}^{N-1} a_j\right) \text{ e } d_N \neq -\left(\sum_{j=N-R+1}^{N-1} a_j\right)$$

e) Usando a estrutura de Blocos Diagonais, calculamos os restantes b_{k+1} , $k = N - R + 1, \dots, N-1$ e completamos a construção de A.

A matriz A, agora obtida, é, em tudo por tudo idêntica à matriz A que seria construída usando-se o ALGORITMO 1, definido em 2.2.8.1.

2.2.8.2.1- Exemplo

Sejam $N = 4$; $R = 2$

$d_1 = 2$; $d_2 = 3$; $d_3 = 4$.

Então: $N-R=2$; $a_1 = d_1 = 2$; $a_2 = d_2 = 3$; $a_3 = 2$ (por exemplo)

Escolhemos d_4 , tal que:

$$d_4 \neq -(d_1 + d_2 + a_3) = -8 \text{ ou } d_4 \neq -a_3 = -2$$

Escolhemos $d_4 = 5$ (por exemplo)

Usando a Estrutura de Blocos Diagonais, obtemos b_2 , b_3 e b_4 , finalmente A^4 .

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ 2 & 3 & & \\ & 3 & 4 & \\ & & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & & \\ 2 & 3 & 4 & \\ & 3 & 4 & 3 \\ & & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & \overline{4} & \overline{3} \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A$$

A submatriz matriz de A de ordem 2, destacada, tem os autovalores $\mu_1 = 4 - 2 = 2$ e $\mu_2 = 2 + 5 = 7$. Logo seu determinante é $7 \times 2 = 14 \neq 0$. Por outro lado, toda e qualquer submatriz de A de ordem > 2 é singular. Daí, a característica de A é $R = 2$.

2.2.8.3- As matrizes $A \in \mathcal{A}$, com dada característica R, obtidas através tanto do ALGORITMO 1 quanto do ALGORITMO 2 pecam por apresentar grande número de elementos ou de linhas iguais, como por exibir, de maneira quase explícita ou excessivamente óbvia, suas características R. O ideal seria se se pudesse obter, a partir de A, matriz B com a mesma característica R de A mas que não possuísse as citadas especificidades ou obviedades. Tal objetivo se alcança transformando A em B, através da aplicação sobre A de sequência das seguintes operações:

a) operação ℓ - (ou c -) elementares:

- permutação de linhas (ou colunas);
- adição a uma linha (ou coluna) de A, de outra linha (ou coluna) multiplicada por escalar $\alpha \neq 0$.

b) operação de transposição de linhas e colunas (trocas de linha por colunas ou vice-versa).

Tais operações, evidentemente, preservam, na matriz B obtida de A, sua característica R, mas B não apresenta, o que é desejável, as peculiaridades da matriz A, apontadas.

2.2.8.3.1- Exemplo

Seja A a matriz construída no exemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{Seja } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos aplicar à A as seguintes operações, em sequência:

- Permutar as linhas de A, segundo a permutação P dada.
- Permutar as colunas da matriz resultante, segundo a mesma permutação.
- Adicionar a linha 1, ℓ_1 , multiplicada 2, à linha 3, ℓ_3 , $2\ell_1 + \ell_3 \rightarrow \ell_3$, da matriz resultante.
- Adicionar ℓ_1 a ℓ_2 multiplicada por 3, $3\ell_1 + \ell_2 \rightarrow \ell_2$.
- Adicionar à coluna c_3 , da matriz resultante, a coluna c_4 multiplicada por (-2), $-2c_4 + c_3 \rightarrow c_3$.
- Finalmente, tomar a transposta da matriz resultante.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{a)}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{b)}} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{c)}} \\ &\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 12 & 9 & 9 & 6 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d)}} \begin{pmatrix} 10 & 18 & 12 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 9 & 6 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{e)}} \begin{pmatrix} 10 & 18 & -4 & 8 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 12 & 9 & -3 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{f)}} \\ &\begin{pmatrix} 10 & 2 & 12 & 4 \\ 18 & 5 & 9 & 3 \\ -4 & -1 & -3 & -1 \\ 8 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Em B não há linhas iguais entre si e nem colunas. Não há muitos elementos com valores iguais e a característica $R=2$ não está mais tão explícita, como em A, porém, está preservada, como se pode verificar.

2.2.9- Diferentes técnicas para a construção de matriz $A \in \mathcal{A}$.

Associadas a cada matriz $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) há quatro categorias de dados, perfazendo total de $2(2N-1)$ elementos, a saber:

- N elementos diagonais d_k , $k=1, 2, \dots, N$;
- $N-1$ elementos subdiagonais a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$;
- $N-1$ elementos supradiagonais b_k , $k=2, 3, \dots, N$;
- N autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

Conhecidos $2N-1$ deles, distribuídos em, ao menos, duas categorias distintas, pode-se obter os restantes $2N-1$, e consequentemente, $A \in \mathcal{A}$, usando-se sempre as relações (2.2.3) e (2.2.1.1) deste capítulo.

Por exemplo:

- a) Dados: d_k , $k=1, 2, \dots, N$;
 a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$,

obter: b_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$
e, então A e daí, λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

- b) Dados: d_k , $k=1, 2, \dots, N$;
 b_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$,

obter: a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$
e, então A e daí, λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

- c) Dados: d_k , $k=1, 2, \dots, N-1$;
 λ_k , $k=1, 2, \dots, N$,

obter: a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$;
 d_N ;
 b_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$,

e, então A , possuindo os autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

- d) Dados: a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$;
 λ_k , $k=1, 2, \dots, N$,

obter: d_k , $k=1, 2, \dots, N$;
 b_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$
e, então, A , possuindo os autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

- e) Dados: b_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$;
 λ_k , $k=1, 2, \dots, N$,

obter: d_k , $k=1, 2, \dots, N$;
 a_k , $k=1, 2, \dots, N-1$
e, então, A , possuindo os autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$.

f) Dados: $a_k, k=1, 2, \dots, N-1;$
 $d_N;$
 $b_{k+1}, k=1, 2, \dots, N-1,$

obter: $d_k, k=1, 2, \dots, N;$
e, então, A , e daí, os autovalores $\lambda_k, k=1, 2, \dots, N.$

g) Quando se pretende construir $A \in \mathcal{A}$ que seja não singular, não é necessária que se forneça os autovalores $\lambda_k \neq 0, k=1, 2, \dots, N$ que A deva possuir. Basta que se suponha que sejam diferentes de zero.

Assim, dados:

$d_k, k=1, 2, \dots, N-1$, números quaisquer

$a_k \neq d_k, k=1, 2, \dots, N-1$

$$d_N \neq - \sum_{j=1}^{N-1} a_j$$

obter: $b_{k+1}, k=1, 2, \dots, N-1$
e, então A , não singular.

Para se obter $b_{k+1}, k=1, 2, \dots, N-1$ usa-se a estrutura de Blocos Diagonais.

h) Analogamente, se se desejar construir $A \in \mathcal{A}$, singular, fornecemos: $d_k,$
 $k=1, 2, \dots, N-1$, números quaisquer

$a_1 = d_1 (\lambda_1 = 0), a_k \neq d_k, k=2, 3, \dots, N-1$

$$d_N \neq - \sum_{j=1}^{N-1} a_j .$$

$$b_2 = d_2,$$

calculamos: $b_{k+1}, k=2, 3, \dots, N-1.$

A matriz $A \in \mathcal{A}$, obtida, será singular por ter iguais a primeira e a segunda linhas.

Estas são, por assim dizer, as maneiras “naturais” de se fornecer dados para se construir $A \in \mathcal{A}$, tendo em vista o que dela se pretende. Outras, é claro, poderiam ser acrescentadas à lista acima, porém, sem nenhum ganho adicional quanto à eficiência ou à versatilidade.

2.2.10- Propriedades adicionais a que satisfazem as matrizes $A \in \mathcal{A}$.

Antes de abordarmos o problema de explicitação das inversas de matrizes $A \in \mathcal{A}$, quando não singulares (o que faremos no próximo Capítulo III), enunciaremos, sem provas, algumas das importantes propriedades a que satisfazem tais matrizes:

1. Se $A, B \in \mathcal{A}$ e α, β são escalares, então, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{A}$.

2. Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $AB, BA \in \mathcal{A}$.
3. Se $A \in \mathcal{A}$ e A^{-1} existe, então $A^{-1} \in \mathcal{A}$.
4. As matrizes O_N (matriz zero de ordem N) e I_N (matriz identidade de ordem N) pertencem a $\mathcal{A}$.
5. Se $A, B \in \mathcal{A}$ e se λ, μ são, respectivamente, autovalores de A e de B , então $\gamma = \alpha\lambda + \beta\mu$ é autovalor $\alpha A + \beta B$, onde α, β são escalares.
6. Se $A, B \in \mathcal{A}$ e se u, v são, respectivamente, autovetores de A e de B , correspondentes aos autovalores λ e μ , então $\alpha u + \beta v$ é autovetor de $\alpha A + \beta B$ correspondente ao autovalor $\alpha\lambda + \beta\mu$, onde α, β são escalares.
7. Se $A \in \mathcal{A}$, então $A_k, A_{(N-k)} \in \mathcal{A}$, onde A_k e $A_{(N-k)}$ são, respectivamente, as submatrizes de A de ordem k e $(N-k)$, constituídas das k primeiras linhas e k primeiras colunas e das $(N-k)$ últimas linhas e $(N-k)$ últimas colunas de A .

2.2.10.1- Exemplos:

a) Sejam $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $N = 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \lambda_1 = 1; & \mu_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2; & \mu_2 = 3 \\ \lambda_3 = 3; & \mu_3 = 2 \\ \lambda_4 = 4; & \mu_4 = 1 \end{array}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 19 & 4 & 4 & -16 \\ 5 & 18 & 4 & -16 \\ 5 & 5 & 17 & -16 \\ 5 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{llll} \gamma_1 = 14 = 2 \times 1 + 3 \times 4 = & 2\lambda_1 + 3\mu_1 \\ \gamma_2 = 13 = 2 \times 2 + 3 \times 3 = & 2\lambda_2 + 3\mu_2 \\ \gamma_3 = 12 = 2 \times 3 + 3 \times 2 = & 2\lambda_3 + 3\mu_3 \\ \gamma_4 = 11 = 2 \times 4 + 3 \times 1 = & 2\lambda_4 + 3\mu_4 \end{array}$$

(Propriedades 1. e 5.)

b) Sejam A e B as matrizes do exemplo a) acima. Então:

$$AB = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 & -20 \\ 8 & 12 & 4 & -20 \\ 8 & 6 & 10 & -20 \\ 8 & 6 & 4 & -14 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & -14 \\ 2 & 10 & 6 & -14 \\ 2 & 4 & 12 & -14 \\ 2 & 4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

(Propriedade 2.)

c) Sejam $N=4$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & -2 & 6 \\ -3 & -1 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

(Vide item 1.3, Capítulo I)

(Propriedade 3.)

d) Sejam A , B e $2A + 3B$ as matrizes do exemplo a) acima e sejam

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{os autovetores correspondentes, respectivamente, aos}$$

autovetores $\lambda = 1$ e $\mu = 4$, de A e B .

$$\text{Seja } w = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ o autovetor de } 2A + 3B, \text{ correspondente ao autovalor } \gamma = 14 = 2\lambda +$$

3μ , de $2A + 3B$.

Verifica-se que: $w = 2u + 3v$.

(Propriedade 6.)

Sejam U , V as matrizes de autovetores de A e de B :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad W = 2U + 3V = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -12 & -16 & 4 \\ -5 & -10 & -16 & 5 \\ -5 & -10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

Então:

$W = 2U + 3V$ é a matriz dos autovetores de $2A + 3B$, correspondente aos autovalores $\gamma_i = 2\lambda_i + 3\mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, de $C = 2A + 3B$. De fato:

$$CW = W.(\lambda I), \text{ onde } \lambda I = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 4 & 4 & -16 \\ 5 & 18 & 4 & -16 \\ 5 & 5 & 17 & -16 \\ 5 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -10 & -16 & 5 \\ -5 & -10 & -16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -12 & -16 & 5 \\ -5 & -10 & -16 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -112 & -156 & -192 & 55 \\ -70 & -156 & -192 & 55 \\ -70 & -156 & -192 & 55 \\ -70 & -130 & -192 & 55 \end{pmatrix}$$

(Propriedade 6.)

e) Sejam $N=4$;

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}; A_{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(Propriedade 7.)

2.2.10.1- Comentários a respeito das propriedades enunciadas em 2.2.9.

a) As propriedades 1., 2., e 3. afirmam que a classe $\mathcal{A}$ é fechada com respeito às operações de adição, multiplicação e inversão de matrizes e de multiplicação de escalar por matriz.

b) A propriedade 6. permite que se construa matriz $A \in \mathcal{A}$ que seja decomponível em produto $A=LU$, onde L é matriz triangular inferior e U , triangular superior.

c) As propriedades 5. e 6. são, de certo modo surpreendentes, porque não é verdade que toda e qualquer classe de matrizes as possui. Isto é, pode-se exibir exemplos de matrizes A e B tais que os autovalores e os autovetores de $A+B$ não são as somas dos correspondentes autovalores e autovetores de A e de B .

As matrizes A e B :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ possuem, respectivamente, os autovalores $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$

e $\mu_1 = 8, \mu_2 = 3$ e $A + B = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, os autovalores $\gamma_1 = (19 + \sqrt{85})/2$ e

$\gamma_2 = (19 - \sqrt{85})/2$ que evidentemente, não são somas dos correspondentes autovalores de A e de B.

Há outras classes de matrizes que satisfazem à propriedade 5., como, por exemplo, as classes das matrizes triangulares superiores ou inferiores, bem como os seus casos particulares, das matrizes diagonais e escalares.

Quanto aos autovetores, temos:

Matriz U dos autovetores de A, correspondente aos autovalores $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz V dos autovetores de B, correspondente aos autovetores $\mu_1 = 8$ e $\mu_2 = 3$:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Analogamente para A + B,

$$W = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 5 - \sqrt{85} & 5 + \sqrt{85} \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = (19 + \sqrt{85})/2 \\ \gamma_2 = (19 - \sqrt{85})/2$$

Vê-se que não há qualquer relação no que tange à operação de adição de matrizes, entre os autovetores de A, B e de A + B.

Capítulo 3

3.1. Trataremos, neste capítulo, do problema de inversão (determinação de inversas) de matrizes $A \in \mathcal{A}$, da forma (2.2.1) satisfazendo (2.2.2). Mostraremos que esse problema é facilmente solucionável. Mostraremos também que $\mathcal{A}$ contém sub-classe de matrizes, que sendo inteiras e inversíveis, possuem explícitas ou muito facilmente explicitáveis inversas inteiras.

3.2. O problema da explicitação das inversas A^{-1} (quando existirem) de matrizes $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro).

Já vimos que a inversa A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$ (se existir) também pertence a $\mathcal{A}$ ($A^{-1} \in \mathcal{A}$). Sabemos, além disso, que se $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$ são autovalores de uma matriz A inversível, $\mu_k = 1/\lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ são autovalores de A^{-1} . Por outro lado, A^{-1} existe se e somente se $\det.A \neq 0$ ($\det.A$ é o determinante de A).

Assim, se $X = A^{-1}$ existir, podemos escrevê-la sob a forma:

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{N-1} & y_N \\ x_1 & w_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{N-1} & y_N \\ x_1 & x_2 & w_3 & y_4 & \dots & y_{N-1} & y_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & w_{N-1} & y_N \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{N-1} & w_N \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

com:

$$\left. \begin{aligned} w_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{N-1} + y_N &= \\ = x_1 + w_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{N-1} + y_N &= \\ = x_1 + x_2 + w_3 + y_4 + \dots + y_{N-1} + y_N &= \\ \dots &= \\ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + w_{N-1} + y_N &= \\ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{N-1} + w_N &= S_x = \frac{1}{S_A} = \frac{1}{\lambda_N} \\ S_A = \lambda_N \neq 0 \quad (\lambda_N \text{ e o } N\text{-ésimo autovalor de } A). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

De (3.2.1) e (3.2.2), decorre que os autovalores de $X = A^{-1}$ são dados por:

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{\lambda_k} = w_k - x_k = w_{k+1} - y_{k+1}, \quad k=1,2,\dots,N-1 \\ \mu_N &= \frac{1}{\lambda_N} = \frac{1}{S_A} \\ (\lambda_k &\neq 0, k=1,2,\dots,N) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

Então, conhecidos os w_k , $k=1, 2, \dots, N-1$, podemos determinar os x_k , y_{k+1} , $k=1, 2, \dots, N-1$.

$$\left. \begin{aligned} x_k &= w_k - \mu_k = w_k - \frac{1}{\lambda_k}, k=1,2,\dots,N-1 \\ y_{k+1} &= w_{k+1} - \mu_k = w_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}, k=1,2,\dots,N-1 \\ \lambda_k &\neq 0, k=1,2,\dots,N-1 \\ \text{e o } w_N &= \mu_N - \sum_{k=1}^{N-1} x_k = \frac{\lambda_N - b_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

Daí, o problema de explicitação de A^{-1} (se existir) se resume ao de se poder explicitar os elementos diagonais de $X = A^{-1}$.

Pode-se mostrar que se A é inversível, isto é, se

$$\det.A = \prod_{k=1}^N \lambda_k \neq 0 \quad (3.2.5)$$

então os elementos diagonais de $X = A^{-1}$, w_k , $k=1, 2, \dots, N$, se exprimem pelas relações:

$$w_1 = \frac{\lambda_N - a_1}{\lambda_1 \lambda_N} \quad (3.2.6)$$

$$\left(w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1 \lambda_N} + \frac{\sum_{j=3}^N b_j}{\lambda_2 \lambda_N} \right) \quad (3.2.7)$$

$$w_k = \frac{d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j}{\lambda_{k-1} \lambda_N} + \frac{\sum_{j=k+1}^N b_j}{\lambda_k \lambda_N}, \quad k=2,3,\dots,N-1 \quad (3.2.8)$$

$$\left(w_{N-1} = \frac{d_1 + \sum_{j=2}^{N-2} b_j}{\lambda_{N-2} \lambda_N} + \frac{b_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N} \right) \quad (3.2.9)$$

$$w_N = \frac{\lambda_N - b_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N} \quad (3.2.10)$$

e os de fora da diagonal, $x_k, y_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1$, por:

$$x_k = w_k - \frac{1}{\lambda_k}, k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.11)$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}, = x_k + w_{k+1} - w_k, k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.2.12)$$

Observação: As relações (3.2.7) e (3.2.9) foram incluídas apenas para facilitar o cálculo manual, com matrizes de baixa ordem N.

3.2.1. Exemplos

a) Sejam $N = 4$ e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 3$
 $\det.A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 24 \neq 0$.

Logo, A é inversível. Vamos calcular os seus elementos, pelas relações (3.2.6) a (3.2.12):

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - a_1}{\lambda_1 \lambda_4} = \frac{3-3}{3} = 0$$

$$w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1 \lambda_4} + \frac{b_3 + b_4}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{4}{3} + \frac{0-5}{12} = \frac{11}{12}$$

$$w_3 = \frac{d_1 + b_2}{\lambda_2 \lambda_4} + \frac{b_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{4+4}{12} + \frac{-5}{6} = -\frac{2}{12}$$

$$w_4 = \frac{\lambda_4 - b_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{3+5}{6} = \frac{16}{12}$$

$$x_1 = w_1 - \frac{1}{\lambda_1} = 0 - 1 = -\frac{12}{12}$$

$$x_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{11}{12} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12}; \quad y_4 = w_4 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{16}{12} - \frac{1}{2} = \frac{10}{12}$$

$$x_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_3} = -\frac{2}{12} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{12}$$

$$y_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{11}{12} - 1 = -\frac{1}{12}$$

$$y_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_2} = -\frac{2}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{12}$$

Daí,

$$X=A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 10 \\ -12 & 11 & -5 & 10 \\ -12 & 8 & -2 & 10 \\ -12 & 8 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

como se pode verificar, mostrando que $I_4 = XA = AX$.

b) Sejam $N=4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{Autovalores: } \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 1 \\ \lambda_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\det.A = 2 \neq 0$;

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - a_1}{\lambda_1 \lambda_4} = \frac{1-1}{1} = 0; \quad w_2 = \frac{d_1}{\lambda_1 \lambda_4} + \frac{b_3 + b_4}{\lambda_2 \lambda_4} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2};$$

$$w_3 = \frac{d_1 + b_2}{\lambda_2 \lambda_4} + \frac{b_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{4}{2} - \frac{5}{1} = -\frac{6}{2}; \quad w_4 = \frac{\lambda_4 - b_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{1+5}{1} = \frac{12}{2};$$

$$x_1 = -1 = -\frac{2}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -4 = -\frac{8}{2}; \quad y_2 = -\frac{1}{2}; \quad y_3 = -\frac{7}{2}; \quad y_4 = \frac{10}{2}$$

Logo,

$$X=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 & 10 \\ -2 & 1 & -7 & 10 \\ -2 & 0 & -6 & 10 \\ -2 & 0 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

Verificação: calcular $I_4=AX=XA$

c) Dados $N=4$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{Autovalores: } \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1; \lambda_4=-1$$

$$\det.A=-1 \neq 0$$

$$w_1=\frac{\lambda_4-a_1}{\lambda_1\lambda_4}=\frac{-1-1}{-1}=2; \quad w_2=\frac{d_1}{\lambda_1\lambda_4}+\frac{b_3+b_4}{\lambda_2\lambda_4}=\frac{2}{-1}+\frac{3-8}{-1}=3$$

$$w_3=\frac{d_1+b_2}{\lambda_2\lambda_4}+\frac{b_4}{\lambda_3\lambda_4}=\frac{4}{-1}+\frac{-8}{-1}=4; \quad w_4=\frac{\lambda_4-b_4}{\lambda_3\lambda_4}=\frac{-1+8}{-1}=-7$$

$$x_1=w_1-1=2-1=1; \quad x_2=w_2-1=3-1=2; \quad x_3=w_3-1=4-1=3$$

$$y_2=w_2-1=3-1=2; \quad y_3=w_3-1=4-1=3; \quad y_4=w_4-1=-7-1=-8$$

Logo:

$$X=A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}=A.$$

como se pode verificar, calculando $XA=AX=AA=I$.

Veremos, mais adiante, que esta é uma situação geral:

se $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_{N-1}=1$ e $\lambda_N=-1$, $A^{-1}=A$.

Observação: Vimos, então, que se $A \in \mathcal{A}$ é inversível sua inversa A^{-1} é facilmente explicitável.

3.3. Explicitação de inversas inteiras de matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$.

Sabe-se que matriz inteira A possui inversa inteira se e somente se

$$\text{ABS}(\det.A)=1 \tag{3.3.1}$$

onde $ABS(\det.A)$ é o valor absoluto do determinante de A , $\det.A$.

Uma condição suficiente para que isso aconteça é que todos os autovalores de A , $\lambda_k, k=1,2,\dots,N$, satisfaçam à condição:

$$ABS(\lambda_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.2)$$

Esta condição, entretanto, não é necessária, isto, é existem matrizes inteiras A , com $ABS(\det.A)=1$ sem, contudo, terem todos os seus autovalores com valores absolutos iguais a 1.

Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é inteira, com inversa inteira } A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que era de se esperar, pois seu determinante, $\det A=1$.

Seus autovalores $\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{6}$, $\lambda_2 = 5 - 2\sqrt{6}$, $\lambda_3 = 1$

não são todos, em valor absoluto, iguais a 1, mas seu produto, o $\det.A$, é igual 1, em valor absoluto.

Então $ABS(\det.A)=1$ não é equivalente a $ABS(\lambda_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N$.

Porém, com as matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$, $ABS(\det.A)=1$ implica $ABS(\lambda_k) = 1, k = 1, 2, \dots, N$, pelo fato de A , sendo inteira, ter todos os seus autovalores inteiros e $ABS(\det.A) = ABS\left(\prod_{k=1}^N \lambda_k\right) = \prod_{k=1}^N (ABS(\lambda_k)) = 1$.

Então podemos enunciar o seguinte:

Teorema 1: $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), inteira, tem inversa inteira, se e só se $ABS(\lambda_k) = 1, k=1,2,\dots,N$ onde $\lambda_k, k=1,2,\dots,N$ são os autovalores de A .

Como consequência deste Teorema 1, temos:

a) Os autovalores $\mu_k = 1/\lambda_k, k= 1, 2, \dots, N$ de A^{-1} (inteira) coincidem com os autovalores $\lambda_k, k= 1, 2, \dots, N$ de A (inteira).

Isto é:

$$\mu_k = \lambda_k, k= 1, 2, \dots, N \quad 3.3.3)$$

Daí:

$$\mathbf{b)} \quad \det.A^{-1} = \det.A \quad (3.3.4)$$

c) As relações para o cálculo de inversa A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$, para o caso de A inteira com inversa inteira, se simplificam e se tornam:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) \quad (3.3.5)$$

$$\left(w_2 = \lambda_1 \lambda_N d_1 + \lambda_2 \lambda_N \left(\sum_{j=3}^N b_j \right) \right) \quad (3.3.6)$$

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) \quad (3.3.7)$$

$k = 2, 3, 4, \dots, N-1$

$$\left(w_{N-1} = \lambda_{N-2} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{N-2} b_j \right) + \lambda_{N-1} \lambda_N b_N \right) \quad (3.3.8)$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) \quad (3.3.9)$$

$$w_k = w_k - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.3.10)$$

$$\lambda_{k+1} = w_{k+1} - \lambda_k = x_k + w_{k+1} - w_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.3.11)$$

Observação 1: As relações (3.3.6) e (3.3.8) foram incluídas apenas para facilitar o cálculo manual, com matrizes de baixa ordem N .

Observação 2: Para cada escolha dos elementos diagonais d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, podemos formar 2^N seqüências distintas, de N elementos cada, constituídas dos números $\{1, -1\}$, o que corresponde ao número máximo de matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$, de dada ordem N ($N \geq 2$, inteiro), com inversas inteiras A^{-1} , que se pode construir, possuindo, como autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, a seqüência selecionada.

Assim, por exemplo, para $N = 6$, para cada escolha de d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, podemos construir um máximo de 64 matrizes inteiras de ordem 6 distintas, com inversas inteiras.

3.4. Algumas escolhas de seqüências de N autovalores (1 ou -1) que resultem em matrizes $A \in \mathcal{A}$ inteiras, com explícitas inversas inteiras, A^{-1} ou muito facilmente explicitáveis.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{N-1} = 1; \lambda_N = -1.$

Construção de A .

Dados: d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer, calcular:

$$a_k = d_k - \lambda_k = d_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = -1 - \sum_{k=1}^{N-1} (d_k - 1) = -1 - \left(\sum_{k=1}^{N-1} d_k - (N-1) \right) = (N-2) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k$$

$$b_{k+1} = d_{k+1} - \lambda_k = d_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\det A = \prod_{k=1}^N \lambda_k = -1$$

Resumindo:

$$a_k = d_k - 1; \quad b_{k+1} = d_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$d_N = (N-2) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k; \quad \det A = \det A^{-1} = -1.$$

Neste caso, temos inversa A^{-1} explícita,

$$A^{-1} = A$$

(vide item 1.2, Capítulo I)

Prova (usando as relações (3.3.5), (3.3.7) e (3.3.8) a (3.3.11):

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = (-1 - a_1) = (1 + a_1) = d_1.$$

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = - \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j + b_k + \sum_{j=k+1}^N b_j - b_k \right) = \\ &= (\lambda_N - b_k) = -(-1 - b_k) = 1 + b_k = d_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = -(\lambda_N - b_N) = (1 + b_N) = d_N.$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = d_k - 1 \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - \lambda_k = d_{k+1} - 1 \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Resumindo:

$$w_k = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

$$x_k = d_k - 1 = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{k+1} = d_{k+1} - 1 = b_{k+1}$$

Logo, $A = A^{-1}$

Exemplo: $N = 4, d_1 = 5; d_2 = 6; d_3 = -3; d_4 = (4-2) - (5+6-3) = -6$
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1.$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & -7 \\ 4 & 6 & -4 & -7 \\ 4 & 5 & -3 & -7 \\ 4 & 5 & -4 & -6 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Assim A e A^{-1} têm a forma (1.2.1), Capítulo I.

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{N-1} = -1; \lambda_N = 1$

Construção de A .

Dados $d_k, k=1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Calcular:

$$a_k = d_k - \lambda_k = d_k + 1; b_{k+1} = d_{k+1} - \lambda_k = d_{k+1} + 1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} (d_k + 1) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{N-1} d_k + (N-1) \right) = (2-N) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k$$

$$\det.A = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } N \text{ for ímpar} \\ -1, & \text{se } N \text{ for par} \end{cases}$$

Resumindo:

$$a_k = d_k + 1, \quad k=1, 2, \dots, N-1$$

$$b_{k+1} = d_{k+1} + 1, \quad k=1, 2, \dots, N-1$$

$$d_N = (2-N) - \sum_{k=1}^{N-1} d_k;$$

$$\det.A = \det.A^{-1} = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{se } N \text{ for ímpar} \\ -1, & \text{se } N \text{ for par} \end{cases}$$

Neste caso temos, também, A^{-1} explícita,

$$A^{-1} = A.$$

(vide item 1.3, Capítulo I)

A prova, por ser passo a passo idêntica à anterior (caso 1.)), será omitida.

Exemplo: $N=4; d_1=5; d_2=4; d_3=3; d_4=(2-4) - (5+4+3) = -14$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1; \lambda_4 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 & -13 \\ 6 & 4 & 4 & -13 \\ 6 & 5 & 3 & -13 \\ 6 & 5 & 4 & -14 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Assim A e A^{-1} , têm a forma (1.3.1), Capítulo I.

3. $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Construção de A .

Dados d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Calcular:

$$a_k = d_k - \lambda_k = d_k - 1; \quad b_{k+1} = d_{k+1} - \lambda_k = d_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} (d_k - 1) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{N-1} d_k - (N-1) \right) = N - \sum_{k=1}^{N-1} d_k$$

$$\det.A = \prod_{k=1}^N \lambda_k = 1$$

Resumindo:

$$a_k = d_k - 1; \quad b_{k+1} = d_{k+1} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$d_N = N - \sum_{k=1}^{N-1} d_k$$

$$\det.A = \det.A^{-1} = 1$$

Neste caso, temos:

$$w_k = 2 - d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$x_k = 1 - d_k = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_{k+1} = 1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

(vide item 1.4, Capítulo I)

Prova:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = (1 - a_1) = 1 - (d_1 - 1) = 2 - d_1$$

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = \\ &= d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j + b_k + \sum_{j=k+1}^N b_j - b_k = \lambda_N - b_k = 1 - b_k = 1 - (d_k - \lambda_{k-1}) \\ &= 1 - d_k + 1 = 2 - d_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = (1 - b_N) = 1 - (d_N - 1) = 2 - d_N.$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = 2 - d_k - 1 = 1 - d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - \lambda_k = 2 - d_{k+1} - 1 = 1 - d_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

Resumindo:

$$w_k = 2 - d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$x_k = 1 - d_k = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{k+1} = 1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Assim A tem forma (1.4.1) e A^{-1} , a forma (1.4.3), item 1.4, Capítulo I, isto é, A^{-1} é explícita.

Exemplo: $N = 4$; $d_1 = 3$; $d_2 = 3$; $d_3 = 5$; $d_4 = 4 - (3 + 3 + 5) = -7$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 3 & 4 & -8 \\ 2 & 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & -3 & 8 \\ -2 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

4. $\lambda_k = -1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Construção de A .

Dados d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Calcular:

$$a_k = d_k + 1; \quad b_{k+1} = d_{k+1} + 1; \quad d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = -\left(N + \sum_{k=1}^{N-1} d_k\right)$$

$$\det A = \det A^{-1} = \begin{cases} -1, & \text{se } N \text{ for ímpar} \\ 1, & \text{se } N \text{ for par} \end{cases}$$

Neste caso, temos

$$w_k = -2 - d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$x_k = -1 - d_k = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_{k+1} = -1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N-1;$$

(vide item 1.5, Capítulo I).

A prova, por em tudo semelhante à do item 3., anterior, será omitida.

Exemplo: $N = 4$; $d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $d_3 = 2$; $d_4 = -(4 + 5 + 2) = -14$
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -13 \\ 4 & 5 & 3 & -13 \\ 4 & 6 & 2 & -13 \\ 4 & 6 & 3 & -14 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 & 13 \\ -4 & -7 & -3 & 13 \\ -4 & -8 & -4 & 13 \\ -4 & -8 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

Assim, A e A^{-1} têm, respectivamente, as formas (1.5.1) e (1.5.2) item 1.5, Capítulo I. Isto é, A^{-1} é explícita.

5. $\lambda_1 = \lambda_N = -1$, $\lambda_k = 1$, $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Dados d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Construir A . A terá a forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_N - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

Isto é, $a_1 = d_1 + 1$; $a_k = d_k - 1$, $k = 2, 3, \dots, N-1$

$b_2 = d_2 + 1$; $b_{k+1} = d_{k+1} - 1$, $k = 2, 3, \dots, N-1$

$$d_N = (N-4) - \sum_{j=1}^{N-1} d_j; \det.A = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \det.A^{-1} = 1$$

Construção de A^{-1} . A^{-1} terá a forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 - d_1 & w_2 + 1 & & & \\ -1 - d_1 & w_2 & & & \\ -1 - d_1 & w_2 - 1 & \begin{bmatrix} 3^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} N^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 - d_1 & w_2 - 1 & & & & \\ -1 - d_1 & w_2 - 1 & & & & \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

onde: $w_2 = 2a_1 + d_2$; e $\begin{bmatrix} k^a \\ cl \\ A \end{bmatrix}$ designa a k -ésima coluna de A .

Assim, A^{-1} é explícita.

Prova:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = (-1 - a_1) = -1 - a_1 = -1 - (d_1 + 1) = -2 - d_1$$

$$x_1 = w_1 + 1 = -1 - d_1 = -a_1$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \lambda_1 \lambda_N d_1 + \lambda_2 \lambda_N \sum_{j=3}^N b_j = d_1 - (b_3 + b_4 + \dots + b_N + d_1 + b_2) + d_1 + b_2 = \\ &= d_1 - \lambda_N + d_1 + b_2 = 2d_1 + 1 + d_2 + 1 = 2(d_1 + 1) + d_2 = 2a_1 + d_2 \end{aligned}$$

$$x_2 = w_2 - 1$$

$$y_2 = w_2 + 1.$$

Para $k = 3, 4, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = \\ &= - \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j + b_k + \sum_{j=k+1}^N b_j \right) + b_k = \lambda_N + b_k = -1 + d_k + 1 = d_k \end{aligned}$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = -(-1 - b_N) = 1 + b_N = 1 + d_N - 1 = d_N$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = d_k - 1 = a_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1;$$

$$y_k = w_k - \lambda_k = d_k - 1 = b_k, \quad k = 3, 4, \dots, N.$$

Logo, a k -ésima coluna de A^{-1} , $k = 3, 4, \dots, N$, coincide com a k -ésima coluna de A e a primeira e segunda colunas de A^{-1} são como as mostradas em (3.4.2).

Exemplo: $N = 5$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 4$; $d_5 = (5 - 4) - (4 \times 4) = -15$

$$\lambda_1 = \lambda_5 = -1; \quad d_2 = d_3 = d_4 = 1.$$

$$w_1 = -2 - d_1 = -6; \quad x_1 = w_1 - 1 = -5; \quad w_2 = 2a_1 + d_2 = 14; \quad x_2 = w_2 - 1 = 13.$$

Logo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & -16 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -16 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & -16 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & -16 \\ 5 & 3 & 3 & 3 & -15 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 15 & 3 & 3 & -16 \\ -5 & 14 & 3 & 3 & -16 \\ -5 & 13 & 4 & 3 & -16 \\ -5 & 13 & 3 & 4 & -16 \\ -5 & 13 & 3 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

6. $\lambda_1 = \lambda_N = 1, \quad \lambda_k = -1, \quad k = 2, 3, \dots, N-1.$

Dados: $d_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Construir A. A terá a forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

$$a_1 = d_1 - 1; a_2 = d_2 + 1; a_k = d_k - 1, \quad k = 3, 4, \dots, N-1$$

$$b_2 = d_2 - 1; b_{k+1} = d_{k+1} + 1, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$d_N = (4 - N) - \sum_{j=1}^{N-1} d_j; \det.A = \det.A^{-1} \begin{cases} 1, \text{ se } N \text{ for par} \\ -1, \text{ se } N \text{ for impar} \end{cases}$$

Construção de A^{-1} . A^{-1} terá a forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - d_1 & w_2 - 1 & & & \\ 1 - d_1 & w_2 & \begin{bmatrix} 3^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} (N-1)^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} N^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} \\ 1 - d_1 & w_2 + 1 & & & & & \\ \dots & \dots & & & & & \\ 1 - d_1 & w_2 + 1 & & & & & \\ 1 - d_1 & w_2 + 1 & & & & & \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

onde: $w_2 = 2a_1 + d_2 = 2(d_1 - 1) + d_2$

$$x_1 = 1 - d_1 = -a_1$$

$$x_2 = w_2 + 1; y_2 = w_2 - 1; e$$

$$\begin{bmatrix} k^a \\ cl \\ A \end{bmatrix} \text{ designa a } k\text{-ésima coluna de } A.$$

A prova, por ser semelhante à do item 5. anterior, será omitida.

Assim, vemos que A^{-1} é explícita.

Exemplo: $N = 5; d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3; d_5 = (4 - 5) - (3 \times 4) = -13$

$$\lambda_1 = \lambda_5 = 1; \lambda_k = -1, \quad k = 2, \dots, 4.$$

$$w_1 = 2 - d_1 = -1; a_1 = 1 - d_1 = -2; w_2 = 2a_1 + d_2 = 7; x_2 = w_2 + 1 = 8.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & -12 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & -12 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & -12 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & -13 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 & 4 & -12 \\ -2 & 7 & 4 & 4 & -12 \\ -2 & 8 & 3 & 4 & -12 \\ -2 & 8 & 4 & 3 & -12 \\ -2 & 8 & 4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

7. $\lambda_1 = 1, \lambda_k = -1, k = 2, 3, \dots, N.$

Dados: $d_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Construir A. A terá a forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 - 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N + 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} & d_N + 1 \\ d_1 - 1 & d_2 + 1 & d_3 + 1 & \dots & d_{N-1} + 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

$$a_1 = d_1 - 1; a_k = d_k + 1; k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$b_2 = d_2 - 1; b_{k+1} = d_{k+1} + 1, k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{j=1}^{N-1} a_j = (2 - N) - \sum_{j=1}^{N-1} d_j; \det.A = \det.A^{-1} \begin{cases} 1, \text{ se } N \text{ for impar} \\ -1, \text{ se } N \text{ for par} \end{cases}$$

Construção de A^{-1} . A^{-1} terá a forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & w_2 - 1 & -1 - d_3 & \dots & -1 - d_{N-1} & -1 - d_N \\ d_1 - 1 & w_2 & -1 - d_3 & \dots & -1 - d_{N-1} & -1 - d_N \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & -2 - d_3 & \dots & -1 - d_{N-1} & -1 - d_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & -1 - d_3 & \dots & -2 - d_{N-1} & -1 - d_N \\ d_1 - 1 & w_2 + 1 & -1 - d_3 & \dots & -1 - d_{N-1} & -2 - d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

onde:

$$w_1 = d_1; w_2 = (2d_1 + d_2); w_k = -2 - d_k, k = 3, 4, \dots, N.$$

$$x_1 = d_1 - 1; x_2 = w_2 + 1; x_k = -1 - d_k = a_k, k = 3, 4, \dots, N-1;$$

$$y_2 = w_2 - 1; w_{k+1} = -1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, k = 2, 3, \dots, N-1.$$

A 1ª coluna de A^{-1} coincide com a 1ª coluna de A.

Logo, A^{-1} é explícita.

Prova:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = (-1 - a_1) = 1 + a_1 = 1 + d_1 - 1 = d_1$$

$$x_1 = d_1 - 1.$$

$$w_2 = \lambda_1 \lambda_N d_1 + \lambda_2 \lambda_N \left(\sum_{j=3}^N b_j \right) = -d_1 + \sum_{j=3}^N b_j + d_1 + b_2 - d_1 - b_2 =$$

$$= -d_1 + \lambda_N - d_1 - b_2 = -2d_1 - 1 - (d_2 - 1) = -2d_1 - d_2 = -(2d_1 + d_2)$$

$$x_2 = w_2 - \lambda_2 = w_2 + 1; y_2 = w_2 - 1$$

Para $k = 3, 4, \dots, N-1$:

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) =$$

$$= d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j + b_k + \sum_{j=k+1}^N b_j - b_k = \lambda_N - b_k = -1 - b_k = -1(d_k + 1) = -2 - d_k$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = \lambda_N - b_N = -1 - b_N = -1(d_N + 1) = -2 - d_N.$$

$$x_k = w_k + 1 = -2 - d_k + 1 = -1 - d_k = -a_k, \quad k = 3, 4, \dots, N-1;$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} + 1 = -2 - d_{k+1} - 1 = -1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots, N-1.$$

Exemplo.

$$N = 5; d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3; d_5 = (2 - 5) - (3 \times 4) = -15$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_k = -1; \quad k = 2, 3, \dots, N.$$

$$w_k = 2 - d_k = -2 - 3 = -5, \quad k = 3, 4,$$

$$w_2 = -(2d_1 + d_2) = -9; \quad w_5 = -2 + 15 = 13;$$

$$w_k = -a_k, \quad k = 3, 4; \quad y_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 2, 3, 4, 5.$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 & -14 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & -14 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & -14 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & -14 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & -15 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -4 & -4 & 14 \\ 2 & -9 & -4 & -4 & 14 \\ 2 & -8 & -5 & -4 & 14 \\ 2 & -8 & -4 & -5 & 14 \\ 2 & -8 & -4 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

8. $\lambda_1 = -1; \lambda_k = 1, \quad k = 2, 3, \dots, N.$

Dados $d_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Construir A. A terá a forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 + 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} & d_N - 1 \\ d_1 + 1 & d_2 - 1 & d_3 - 1 & \dots & d_{N-1} - 1 & d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.7)$$

$$a_1 = d_1 + 1; a_k = d_k - 1, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$b_2 = d_2 + 1; b_{k+1} = d_{k+1} - 1, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{j=1}^N a_j = (N-2) - \sum_{j=1}^{N-1} d_j$$

$$\det A = \det A^{-1} = -1.$$

Construção de A^{-1} . A^{-1} terá a forma:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & w_2 + 1 & 1 - d_3 & \dots & 1 - d_{N-1} & 1 - d_N \\ d_1 + 1 & w_2 & 1 - d_3 & \dots & 1 - d_{N-1} & 1 - d_N \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & 2 - d_3 & \dots & 1 - d_{N-1} & 1 - d_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & 1 - d_3 & \dots & 2 - d_{N-1} & 1 - d_N \\ d_1 + 1 & w_2 - 1 & 1 - d_3 & \dots & 1 - d_{N-1} & 2 - d_N \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

onde: $w_2 = -(2d_1 + d_2)$;
 $x_2 = w_2 - 1$; $y_2 = w_2 + 1$.

A primeira coluna de A^{-1} coincide com a primeira coluna de A.

$$x_k = 1 - d_k = -a_k, \quad k = 3, 4, \dots, N-1.$$

$$y_{k+1} = 1 - d_{k+1} = -b_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

$$w_k = 2 - d_k, \quad k = 3, 4, \dots, N.$$

Logo, A^{-1} é explícita.

A prova, por ser análoga à do item anterior, será omitida.

Exemplo:

$$N=6; \quad d_k = 2, \quad k = 1, \dots, 5; \quad d_5 = (6-2) - (2 \times 5) = -6.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -6 & -1 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -7 & 0 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & -7 & -1 & 0 & -1 & 7 \\ 3 & -7 & -1 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = -(2d_1 + d_2) = -6; \quad w_k = 2 - d_k = 0; \quad k = 3, 4, \dots, 6.$$

$$x_2 = w_2 - 1; \quad x_k = -a_k, \quad k = 3, 4, 5;$$

$$y_2 = w_2 + 1; \quad y_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = 2, 3, 4, 5.$$

9. N par.

$$\lambda_k = 1, \quad k = 1, 3, \dots, N-1;$$

$$\lambda_k = -1, \quad k = 2, 4, \dots, N$$

Construção de A.

Dados d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.

Calcular:

$$a_k = d_k - 1, \quad k = 1, 3, \dots, N-1; \quad b_{k+1} = d_{k+1} - 1, \quad k = 1, 3, \dots, N-1.$$

$$a_k = d_k + 1, \quad k = 2, 4, \dots, N-2; \quad b_{k+1} = d_{k+1} + 1, \quad k = 2, 4, \dots, N-2.$$

$$d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = -1 - \sum_{k=1}^{N-1} a_k = -\left(\sum_{k=1}^{N-1} d_k\right);$$

$$\det A = \det A^{-1} \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ for impar.} \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \text{a) } w_1 &= d_1; \quad x_1 = a_1 = d_1 - 1 \\ w_N &= d_N; \quad y_N = b_N = d_N - 1 \end{aligned}$$

Isto é, as primeiras e N-ésima colunas de A^{-1} coincidem com as correspondentes colunas de A.

b) Para k, par, $k = 2, 4, \dots, N-2$:

$$w_k = -\left(2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k\right)$$

$$x_k = w_k + 1; \quad y_k = w_k - 1.$$

Para k , ímpar, $k=3, 5, \dots, N-1$:

$$w_k = 2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k$$

$$x_k = w_k - 1; y_k = w_k - 1.$$

A^{-1} não é inteiramente explícita mas é facilmente explicitável.

A e A^{-1} têm, respectivamente, as formas (1.6.1) e (1.6.7), Capítulo I.

Prova:

$$\begin{aligned} \text{a) } w_1 &= \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = -(-1 - a_1) = 1 + a_1 = 1 + d_1 - 1 = d_1 \\ x_1 &= w_1 - 1 = d_1 - 1 = a_1. \\ w_N &= \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = -(-1 - b_N) = 1 + b_N = 1 + d_N - 1 = d_N \\ y_N &= w_N - 1 = d_N - 1 = b_N \end{aligned}$$

b) $k=2, 4, \dots, N-2$ (k par)

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = \\ &= - \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \sum_{j=k+1}^N b_j = - \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \left(\sum_{j=k+1}^{N-1} b_j + b_N \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} d_j + \left(\sum_{j=k+1}^{N-1} d_j - \sum_{j=1}^{N-1} d_j \right) = - \sum_{j=1}^{k-1} d_j - \sum_{j=1}^{k-1} d_j - d_k = - \left(2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k \right) \end{aligned}$$

$$x_k = w_k + 1; y_k = w_k - 1; y_N = w_N - 1.$$

Analogamente, se mostra que, para $k=3, 5, \dots, N-1$, (k ímpar):

$$w_k = 2 \sum_{j=1}^{k-1} d_j + d_k.$$

$$x_k = w_k - 1; y_k = w_k + 1.$$

Exemplo.

$$N=6; d_k=3, k=1, 2, \dots, 5.$$

$$d_6 = -(3 \times 5) = -15$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & -16 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & -16 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 & -16 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & -16 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 3 & -16 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & -15 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 16 & -22 & 28 & -16 \\ 2 & -9 & 16 & -22 & 28 & -16 \\ 2 & -8 & 15 & -22 & 28 & -16 \\ 2 & -8 & 14 & -21 & 28 & -16 \\ 2 & -8 & 14 & -20 & 27 & -16 \\ 2 & -8 & 14 & -20 & 26 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= -(2(d_1) + d_2) = -9; & w_3 &= 2(d_1 + d_2) + d_3 = 15 \\ w_4 &= -(2(d_1 + d_2 + d_3) + d_4) = -21; & w_5 &= 2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + d_5 = 27 \end{aligned}$$

10. N par; $N = 2m$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -1, k = 1, 2, \dots, m = N/2. \\ \lambda_k &= 1, k = m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned}$$

Dados, $d_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, números inteiros quaisquer.
A terá a forma (1.10.1), Capítulo I, onde:

$$\begin{aligned} a_k &= d_k + 1, \quad k = 1, 2, \dots, m; & a_k &= d_k - 1, \quad k = m+1, \dots, N-1. \\ b_{k+1} &= d_{k+1} + 1, \quad k = 1, 2, \dots, m; & b_{k+1} &= d_{k+1} - 1, \quad k = m+1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

$$d_N = - \sum_{j=1}^{N-1} d_j; \quad \det.A = \det.A^{-1} \begin{cases} 1, & \text{se } m = N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } m = N/2 \text{ for impar.} \end{cases}$$

Construção de A^{-1} . A^{-1} terá a forma (1.10.7), Capítulo I, onde:

- As m primeiras colunas coincidem com as correspondentes colunas A.
- A coluna de índice m+1, é obtida por:

$$w_{m+1} = (2-N) - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j + d_{m+1} \right)$$

$$x_{m+1} = w_{m+1} - 1; \quad y_{m+1} = w_{m+1} + 1.$$

As demais colunas, por:

$$w_k = 2 - d_k, \quad k = m+2, \dots, N$$

$$x_k = w_k - 1 = 1 - d_k = -a_k, \quad k = m+2, \dots, N-1$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - 1 = 1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k = m+1, \dots, N-1.$$

Assim, A^{-1} não é explícita mas é facilmente explicitável.

Prova:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = -(1 - a_1) = a_1 - 1 = d_1 + 1 - 1 = d_1$$

$$x_1 = w_1 + 1 = d_1 + 1$$

Para $k=2, 3, \dots, m$,

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = \\ &= - \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) - \sum_{j=k+1}^N b_j = - \left(d_1 + \sum_{j=2}^N b_j \right) + b_k = \end{aligned}$$

$$= -\lambda_N + b_k = -1 + b_k = -1 + d_k + 1 = d_k.$$

$$x_k = w_k + 1 = d_k + 1 = a_k, \quad k=2, 3, \dots, m.$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} + 1 = d_{k+1} + 1 = b_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, m-1.$$

Para $k=m+2, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N b_j \right) = \left(\left(d_1 + \sum_{j=2}^{k-1} b_j \right) + \sum_{j=k+1}^N b_j \right) \\ &= \left(d_1 + \sum_{j=2}^N b_j \right) - b_k = \lambda_N - b_k = 1 - (d_k - 1) = 2 - d_k \end{aligned}$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = (1 - b_N) = 1 - (d_N - 1) = 2 - d_N$$

$$x_k = w_k - 1 = 2 - d_k - 1 = 1 - d_k = a_k, \quad k=m+2, \dots, N-1.$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - 1 = 2 - d_{k+1} - 1 = 1 - d_{k+1} = -b_{k+1}, \quad k=m+1, \dots, N-1.$$

Para $k=m+1$,

$$\begin{aligned} w_{m+1} &= \lambda_m \lambda_N \left(d_1 + \sum_{j=2}^m b_j \right) + \lambda_{m+1} \lambda_N \left(\sum_{j=m+2}^N b_j \right) = \\ &= - \left(d_1 + \sum_{j=2}^m d_j + (m-1) \right) + \left(\sum_{j=m+2}^N d_j - (m-1) \right) = - \left(\sum_{j=1}^m d_j + (m-1) \right) + \\ &+ \left(\sum_{j=m+2}^{N-1} d_j + d_N - (m-1) \right) = - \left(\sum_{j=1}^m d_j - (m-1) \right) + \\ &+ \left(\sum_{j=m+2}^{N-1} d_j - \sum_{j=1}^{N-1} d_j - (m-1) \right) = - \left(\sum_{j=1}^m d_j + (m-1) \right) - \left(\sum_{j=1}^{m+1} d_j + (m-1) \right) = \\ &= - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j + 2(m-1) + d_{m+1} \right) = -2(m-1) - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j + d_{m+1} \right) = \end{aligned}$$

$$= (2-N) - \left(2 \sum_{j=1}^m d_j + d_{m+1} \right)$$

Exemplo.

$$N = 6; \quad d_k = 3, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5; \quad m = 3$$

$$d_6 = -(5 \times 3) = -15$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 2 & -16 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 2 & -16 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & -16 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & -16 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 & -16 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & -15 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & -24 & -2 & 16 \\ 4 & 3 & 4 & -24 & -2 & 16 \\ 4 & 4 & 3 & -24 & -2 & 16 \\ 4 & 4 & 4 & -25 & -2 & 16 \\ 4 & 4 & 4 & -26 & -1 & 16 \\ 4 & 4 & 4 & -26 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

- As três primeiras colunas de A^{-1} coincidem com as correspondentes colunas de A .
- $w_4 = (2-6) - (2(3 \times 3) + 3) = -25$; $x_4 = w_4 - 1 = -26$; $y_4 = w_4 + 1 = -24$
- $w_k = 2 - d_k$, $k = 5, 6$; $x_5 = -a_5 = -2$; $y_5 = -2$; $y_6 = -d_6 = 16$

3.5. Roteiro para a construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, inteiras e de suas inversas A^{-1} inteiras.

Já vimos que, para cada ordem N ($N \geq 2$, inteiro) e para cada sequência dos elementos diagonais d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, pode-se construir um máximo de 2^N matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$, com inversas inteiras A^{-1} . Assim, é impossível se tentar explicitar, de maneira geral, todas as possíveis inversas, para uma dada ordem N elevada. Primeiramente, pelo seu grande número (para $N = 10$, seriam 1024), segundo, porque formas gerais de inversas dependem, na maioria das vezes, da ordem N de A (N par, N ímpar, $N = 3m$, etc.) e formas gerais que independem de N são em número pequeno e fixo, dentre o total de $2N$ (que cresce exponencialmente com N) de inversas possíveis. Algumas dessas formas de inversas, independentes de N , foram exibidas em itens anteriores deste Capítulo ($\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N-1$; $\lambda_N = -1$, $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$, etc.). Assim, o que podemos fazer, é estabelecer critérios gerais, que independam de N , que nos permitam, dado N , a sequência d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ e a sequência dos autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ de A , construir A^{-1} , sem termos que recorrer, a cada vez, às relações (3.3.5) a (3.3.11) para o cálculo de seus elementos. Desse modo:

Sendo λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ autovalores de A , tais que $ABS(\lambda_k) = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$, e tendo em vista as relações (3.3.5) a (3.3.11) para a obtenção dos elementos de A^{-1} , podemos considerar os seguintes 14 casos para a determinação de inversas inteiras de matrizes inteiras $A \in \mathcal{A}$.

c₁ - Se $\lambda_1 \lambda_N = -1$, então a primeira coluna de A^{-1} coincide com a primeira coluna de A .

Prova: **a)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_N = -1$. Neste caso, $a_1 = d_1 - 1$.

De (3.3.5) obtemos, sucessivamente:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = -(-1 - a_1) = 1 + a_1 = 1 + d_1 - 1 = d_1.$$

De (3.3.10), obtemos, então:

$$x_1 = w_1 - \lambda_1 = w_1 - 1 = d_1 - 1 = a_1.$$

Logo, sendo $w_1 = d_1$ e $x_1 = a_1$, a primeira coluna de A^{-1} coincide com a primeira coluna de A .

b) $\lambda_1 = -1$; $\lambda_N = 1$. Nesse caso, $a_1 = d_1 + 1$. Então:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = -(1 - a_1) = a_1 - 1 = d_1 + 1 - 1 = d_1$$

$$x_1 = w_1 - \lambda_1 = d_1 - (-1) = d_1 + 1 = a_1.$$

Sendo $w_1 = d_1$ e $x_1 = a_1$, a primeira coluna de A^{-1} coincide com a primeira coluna de A .

Exemplo:

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 \end{array}$$

Então: $\det A = -1$

(A inversa inteira de A existe).

Como $\lambda_1 \lambda_4 = -1$ a 1ª coluna de A^{-1} coincidirá com a 1ª coluna de A . De fato,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}$$

c₂ - Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = -1$, então, a N -ésima coluna de A^{-1} coincide com a N -ésima coluna de A .

Prova: a) $\lambda_{N-1} = 1$; $\lambda_N = -1$. Neste caso, $b_N = d_N - 1$.

De (3.5), obtemos, sucessivamente:

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = -(-1 - b_N) = 1 + b_N = 1 + d_N - 1 = d_N$$

$$y_N = w_N - \lambda_{N-1} = d_N - 1 = b_N$$

b) $\lambda_{N-1} = -1$; $\lambda_N = 1$. Neste caso, $b_N = d_N + 1$

Então:

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = -(-1 - b_N) = b_N - 1 = d_N + 1 - 1 = d_N$$

$$y_N = w_N - \lambda_{N-1} = d_N + 1 = b_N$$

Sendo $w_N = d_N$ e $y_N = b_N$, a N-ésima coluna de A^{-1} coincide com a N-ésima coluna de A.

Exemplo:

2. No exemplo 1), acima, $\lambda_3 \lambda_4 = -1$. Logo a última coluna de A^{-1} , coincide com a última coluna de A. De fato:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x & x & -5 \\ 1 & x & x & -5 \\ 1 & x & x & -5 \\ 1 & x & x & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 1 \end{bmatrix}$$

c₃ - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = -1$, então a k-ésima coluna de A^{-1} coincide com a k-ésima coluna de A, $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Prova: a) $\lambda_{k-1} = \lambda_k = 1$; $\lambda_N = -1$

Neste caso, $a_k = d_k - 1$; $b_k = d_k - 1$ ($a_k = b_k$)

De (3.3.7), obtemos:

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) + \lambda_k \lambda_N (b_{k+1} + \dots + b_N) =$$

$$\begin{aligned} &= - (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} + b_N) = \\ &= - (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} + b_N - b_k) = \\ &= - (\lambda_N - b_k) = -(-1 - b_k) = b_k + 1 = d_k - 1 + 1 = d_k \end{aligned}$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = d_k - 1 = a_k$$

$$y_k = w_k - \lambda_{k-1} = d_k - 1 = b_k = a_k$$

Logo, sendo $w_k = d_k$ e $x_k = y_k = a_k = b_k$, a k-ésima coluna de A^{-1} coincide com k-ésima coluna de A.

b) $\lambda_{k-1} = \lambda_k = -1$; $\lambda_N = 1$.

Neste caso, $a_k = d_k + 1$ e $b_k = d_k + 1$; $a_k = b_k$

De (3.3.7), obtemos:

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) + \lambda_k \lambda_N (b_{k+1} + \dots + b_N) = \\ &= - (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_{k+1} + \dots + b_N) = \\ &= - (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} + \dots + b_N - b_k) = \\ &= - (\lambda_N - b_k) = -(-1 - b_k) = -(1 - d_k - 1) = d_k \end{aligned}$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = d_k + 1 = a_k;$$

$$y_k = w_k - \lambda_{k-1} = d_k + 1 = b_k; \quad x_k = y_k = a_k = b_k$$

Daí, a k-ésima coluna de A^{-1} coincide com a k-ésima coluna de A.

Exemplo:

3. No exemplo 2) acima, temos:

$$\lambda_1 \lambda_4 = -1 \text{ e } \lambda_2 \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_2 \lambda_4 = -1 \text{ e } \lambda_3 \lambda_4 = -1$$

Então, as 2ª e 3ª colunas de A^{-1} coincidem com as 2ª e 3ª colunas de A, respectivamente.

De fato:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 & 1 & x \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 1 & 2 & x \\ x & 1 & 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Dos casos c_1 , c_2 e c_3 , acima, decorre o caso:

$$c_4 - \text{Se } \lambda_j \lambda_N = -1, j = 1, 2, \dots, N-1$$

ou, equivalentemente,

$$\text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_{N-1} = 1 \text{ e } \lambda_N = -1$$

ou

$$\text{se } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = -1 \lambda_N = 1$$

então, a inversa de A^{-1} de A coincide com A.

Exemplo:

4. Sejam $N=5$;

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & -13 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & -13 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & -13 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & -13 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix}; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1; \lambda_5 = 1$$

Daí, $A^{-1} = A$, como se pode facilmente verificar.

c₅- Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_N = 1$, então:

$$w_1 = 2 - d_1; \quad x_1 = -a_1. \text{ Neste caso, } a_1 = d_1 - 1.$$

Prova:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - a_1) = (1 - a_1) = 1 - (d_1 - 1) = 2 - d_1$$

$$x_1 = w_1 - \lambda_1 = 2 - d_1 - 1 = 1 - d_1 = (d_1 - 1) = -a_1$$

c₆- Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = 1$, então:

$$w_N = 2 - d_N; \quad y_N = -b_N. \text{ Neste caso, } b_N = d_N - 1.$$

Prova:

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - b_N) = (1 - b_N) = 1 - (d_N - 1) = 2 - d_N$$

$$y_N = w_N - \lambda_{N-1} = 2 - d_N - 1 = 1 - d_N = -(d_N - 1) = -b_N$$

Exemplo:

5. Sejam $N = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & -11 \\ 4 & 3 & 5 & -11 \\ 4 & 2 & 6 & -11 \\ 4 & 2 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 1 \end{matrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & x & x & 11 \\ -4 & x & x & 11 \\ -4 & x & x & 11 \\ -4 & x & x & 12 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = 2 - d_1 = 2 - 5 = -3$$

$$x_1 = -a_1 = -4$$

$$w_N = 2 - d_N = 2 - (-10) = 12$$

$$y_N = -d_N = -(-11) = 11$$

c7- Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda_N = 1$, então:
 $w_k = 2 - d_k$; $x_k = -a_k$; $y_k = -b_k$. Neste caso,

$$a_k = d_k - 1; b_k = d_k - 1; (a_k = b_k), k = 2, 3, \dots, N-1$$

Prova:

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) + \lambda_k \lambda_N (b_{k+1} + \dots + b_N) = \\ &= (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} + \dots + b_N - b_k) = \\ &= \lambda_N - b_k = 1 - b_k = 1 - (d_k - 1) = 2 - d_k \end{aligned}$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = w_k - 1 = 2 - d_k - 1 = -(d_k - 1) = -a_k$$

$$y_k = w_k - \lambda_{k-1} = 2 - d_k - 1 = -(d_k - 1) = -b_k = -a_k : (x_k = y_k)$$

Exemplo:

6. Na matriz A do exemplo 5. anterior, temos:

$$\lambda_1 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_4 = 1, \text{ com } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 1$$

e

$$\lambda_2 \lambda_4 = \lambda_3 \lambda_4 = 1, \text{ com } \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & -2 & -5 & x \\ x & -1 & -5 & x \\ x & -2 & -4 & x \\ x & -2 & -5 & x \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} w_2 &= 2 - d_2 = 2 - 3 = -1 \\ x_2 &= y_2 = -2 = -a_2 = -b_2 \\ w_3 &= 2 - d_3 = 2 - 6 = -4 \\ x_3 &= y_3 = -5 = -a_3 = -b_3 \end{aligned}$$

c8- Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_N = -1$, então,
 $w_1 = -2 - d_1$; $x_1 = -a_1$. Neste caso, $a_1 = d_1 + 1$.

c9- Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = -1$, então,
 $w_N = -2 - d_N$; $y_N = -b_N$. Neste caso, $b_N = d_N + 1$.

c10- Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda_N = -1$, então,
 $w_k = -2 - d_k$; $x_k = y_k = -a_k = -b_k$. Neste caso,

$$a_k = b_k = d_k + 1.$$

As provas de c_8 , c_9 e c_{10} são análogas às dos casos c_5 , c_6 e c_7 , anteriores. Por isso, deixam de ser feitas.

Exemplo:

7. Sejam $N = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & -14 \\ 6 & 2 & 5 & -14 \\ 6 & 3 & 4 & -14 \\ 6 & 3 & 5 & -15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \lambda_4 = 1, \text{ com } \lambda_1 = \lambda_4 = -1 \\ \lambda_2 \lambda_4 = 1, \text{ com } \lambda_2 = \lambda_4 = -1 \\ \lambda_3 \lambda_4 = 1, \text{ com } \lambda_3 = \lambda_4 = -1 \end{array}$$

Daí,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -3 & -5 & 14 \\ -6 & -4 & -5 & 14 \\ -6 & -3 & -6 & 14 \\ -6 & -3 & -5 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} w_1 = -2 - d_1 = -2 - 5 = -7; & x_1 = -a_1 = -6 \\ w_2 = -2 - d_2 = -2 - 2 = -4; & x_2 = y_2 = -a_2 = -b_2 = -3 \\ w_3 = -2 - d_3 = -2 - 4 = -6; & x_3 = y_3 = -a_3 = -b_3 = -5 \\ w_4 = -2 - d_4 = -2 + 15 = 13; & y_4 = -b_4 = 14 \end{array}$$

Decorre dos casos c_5 , c_6 e c_7 , o seguinte caso:

c_{11} - Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = \lambda_N = 1$, então a inversa de A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & d_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & d_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & d_N \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2-d_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & 2-d_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & 2-d_3 & \dots & -a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & 2-d_N \end{bmatrix}$$

onde, $a_i = d_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Exemplo:

8. Na matriz A , do exemplo 5. acima, temos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Daí,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 & 11 \\ -4 & -1 & -5 & 11 \\ -4 & -2 & -4 & 11 \\ -4 & -2 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

Dos casos c_8 , c_9 e c_{10} , obtêm-se:

c_{12} - Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{N-1} = \lambda_N = -1$, então a inversa de A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$.

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & d_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & d_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & d_N \end{bmatrix} \text{ é}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2-d_1 & -a_2 & -a_N & \dots & -a_N \\ -a_1 & -2-d_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -2-d_3 & \dots & -a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -2-d_N \end{bmatrix}$$

com $a_i = d_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Exemplo:

9. Vide exemplo 7. acima.

c_{13} - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = 1$ e $\lambda_k \lambda_N = -1$, então,
 $w_k = (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) - (b_{k+1} + \dots + b_N) = S_k$
 $x_k = w_k - \lambda_k$; $y_k = w_k - \lambda_{k-1}$
 $k = 2, 3, \dots, N-1$.

c_{14} - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = -1$ e $\lambda_k \lambda_N = 1$, então,
 $w_k = (b_{k+1} + \dots + b_N) - (d_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) = -S_k$
 $x_k = w_k - \lambda_k$; $y_k = w_k - \lambda_{k-1}$
 $k = 2, 3, \dots, N-1$.

As provas de c_{13} e c_{14} seguem a linha das anteriormente feitas.

Exemplo:

10. Sejam $N = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 & -14 \\ 4 & 3 & 3 & 5 & -14 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & -14 \\ 4 & 4 & 1 & 6 & -14 \\ 4 & 4 & 1 & 7 & -15 \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = -1 \\ \lambda_5 = 1 \end{matrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 10 & -15 & 23 & -14 \\ -4 & 11 & -15 & 23 & -14 \\ -4 & 12 & -16 & 23 & -14 \\ -4 & 12 & -17 & 24 & -14 \\ -4 & 12 & -17 & 25 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_5 = 1 \quad e \quad \lambda_2 \lambda_5 = -1 \quad w_2 &= d_1 - (b_3 + b_4 + b_5) = 5 - (3 + 5 - 14) = 11 \\ \lambda_2 \lambda_5 = -1 \quad e \quad \lambda_3 \lambda_5 = 1 \quad w_3 &= (b_4 + b_5) - (d_1 + b_2) = (5 - 14) - (5 + 2) = -16 \\ \lambda_3 \lambda_5 = 1 \quad e \quad \lambda_4 \lambda_5 = -1 \quad w_4 &= (d_1 + b_2 + b_3) - (b_5) = 10 + 14 = 24 \end{aligned}$$

3.6. Algoritmo para construção de matriz inteira $A \in \mathcal{A}$, cuja inversa A^{-1} é inteira.

A construção de matriz inteira $A \in \mathcal{A}$ cuja inversa A^{-1} é inteira, segue os seguintes passos:

- Escolha da ordem N de A .
- Escolha dos $N-1$ elementos diagonais de A , $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$.
- Atribuição aos autovalores λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ de A , dos valores 1 ou -1.
- Cálculo dos elementos a_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, de A , que ficam abaixo da diagonal principal.
- Cálculo do elemento diagonal d_N de A ,

$$d_N = \lambda_N - (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}) = \pm 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1})$$

- Cálculo dos elementos b_j , $j = 2, \dots, N$, de A , que ficam acima da diagonal principal:

$$b_j = a_{j-1} + d_j - d_{j-1} = d_j - \lambda_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

Construída a matriz A , passa-se à construção de sua inversa A^{-1} , de acordo com os casos c_1 a c_{14} , resumidos e reordenados de maneira conveniente no RECEITUÁRIO 1, abaixo:

3.7. RECEITUÁRIO 1:

Caso A1 - Se $\lambda_1 \lambda_N = -1$, a 1ª coluna de A^{-1} coincide com a 1ª coluna de A .

Caso A2 - Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_N = 1$, $w_1 = 2 - d_1$; $x_1 = -a_1$ ($a_1 = d_1 - 1$).

Caso A3 - Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_N = -1$, $w_1 = -2 - d_1$; $x_1 = -a_1$ ($a_1 = d_1 + 1$).

Caso A4 - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = -1$, a k-ésima coluna de A^{-1} coincide com a k-ésima coluna de A, $k=2, 3, \dots, N-1$.

Caso A5 - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda_N = -1$,
 $w_k = -2 - d_k$; $x_k = y_k = -a_k = -b_k (a_k = d_k + 1)$

Caso A6 - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = 1$ e $\lambda_k \lambda_N = -1$,
 $w_k = (d_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1}) - (b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_N) = S_k$
 $x_k = w_k - \lambda_k$; $y_k = w_k - \lambda_{k-1}$
 $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Caso A7 - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = -1$, e $\lambda_k \lambda_N = 1$,
 $w_k = (b_{k+1} + \dots + b_N) - (d_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k-1}) = -S_k$
 $x_k = w_k - \lambda_k$; $y_k = w_k - \lambda_{k-1}$

Caso A8 - Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_k = \lambda_N = 1$
 $w_k = 2 - d_k$; $x_k = -a_k$; $y_k = -b_k$;
 $(a_k = d_k - 1$; $b_k = d_k - 1, (a_k = b_k))$;
 $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Caso A9 - Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = 1$, $w_N = 2 - d_N$; $y_N = -b_N (b_N = d_N - 1)$

Caso A10 - Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = -1$, $w_N = -2 - d_N$; $y_N = -b_N (b_N = d_N + 1)$

Caso A11 - Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = -1$, a N-ésima coluna de A^{-1} coincide com a N-ésima coluna de A.

Caso A12 - Se $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N-1$; $\lambda_N = -1$, $A^{-1} = A$

ou

Se $\lambda_k = -1$, $k = 1, 2, \dots, N-1$; $\lambda_N = 1$, $A^{-1} = A$.

Caso A13 - Se $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$ a inversa A^{-1} de A é explícita e se tem:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & d_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & d_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & d_N \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-d_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ -a_1 & 2-d_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & 2-d_3 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} & 2-d_N \end{pmatrix}$$

$$a_k = d_k - 1, k = 1, 2, \dots, N.$$

Caso A14 - Se $\lambda_k = -1$, $k = 1, 2, \dots, N$, A^{-1} é explícita e se tem:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & d_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & d_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & d_{N-1} & a_N \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & d_N \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -2-d_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -2-d_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -2-d_3 & \dots & -a_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_N \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -2-d_N \end{pmatrix}$$

$$a_k = d_k + 1, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Para facilitar a consulta ao RECEITUÁRIO 1 para a construção de A^{-1} , é conveniente que se organizem os produtos dos autovalores em grupos, para a obtenção, em sequência, das sucessivas colunas de A^{-1} , como exibido abaixo:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_N &= \\ \lambda_1 \lambda_N &= ; \lambda_2 \lambda_N = \\ \lambda_2 \lambda_N &= ; \lambda_3 \lambda_N = \\ \dots & \\ \lambda_{k-1} \lambda_N &= ; \lambda_k \lambda_N = ; k = 2, 3, \dots, N-1 \\ \dots & \\ \lambda_{N-1} \lambda_N &= \end{aligned}$$

Os exemplos seguintes usam esta técnica:

Exemplos:

10. a) $N = 5$

b) $d_1 = 5$; $d_2 = 7$; $d_3 = 4$; $d_4 = 9$

c) $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$; $\lambda_5 = -1$.

$$\mathbf{d)} \quad \begin{cases} a_1 = d_1 - \lambda_1 = 5 - 1 = 4 \\ a_2 = d_2 - \lambda_2 = 7 + 1 = 8 \\ a_3 = d_3 - \lambda_3 = 4 - 1 = 3 \\ a_4 = d_4 - \lambda_4 = 9 - 1 = 8 \end{cases}$$

$$\mathbf{e)} \quad d_5 = \lambda_N - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -1 - (4 + 8 + 3 + 8) = -24$$

$$\mathbf{f)} \quad \begin{cases} b_2 = d_2 - \lambda_1 = 7 - 1 = 6 \\ b_3 = d_3 - \lambda_2 = 4 + 1 = 5 \\ b_4 = d_4 - \lambda_3 = 9 - 1 = 8 \\ b_5 = d_5 - \lambda_4 = -24 - 1 = -25 \end{cases}$$

Daí,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 & -25 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & -25 \\ 4 & 8 & 4 & 8 & -25 \\ 4 & 8 & 3 & 9 & -25 \\ 4 & 8 & 3 & 8 & -24 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -18 & 29 & 8 & -25 \\ 4 & -17 & 29 & 8 & -25 \\ 4 & -16 & 28 & 8 & -25 \\ 4 & -16 & 27 & 9 & -25 \\ 4 & -16 & 27 & 8 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 1; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = -1$$

$$\lambda_1 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A1)}$$

$$\lambda_1 \lambda_5 = -1; \lambda_2 \lambda_5 = 1 \text{ (caso A7)}$$

$$\lambda_2 \lambda_5 = 1; \lambda_3 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A6)}$$

$$\lambda_3 \lambda_5 = -1; \lambda_4 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A4)}$$

$$\lambda_4 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A11)}$$

11. a) $N = 5$

b) $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$

c) $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = -1; \lambda_2 = \lambda_4 = 1.$

$$d) \begin{cases} a_1 = d_1 - \lambda_1 = 5 + 1 = 6 \\ a_2 = d_2 - \lambda_2 = 5 - 1 = 4 \\ a_3 = d_3 - \lambda_3 = 5 + 1 = 6 \\ a_4 = d_4 - \lambda_4 = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$

e) $d_5 = \lambda_5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -1 - (6 + 4 + 6 + 4) = -21$

$$f) \begin{cases} b_2 = d_2 - \lambda_1 = 5 + 1 = 6 \\ b_3 = d_3 - \lambda_2 = 5 - 1 = 4 \\ b_4 = d_4 - \lambda_3 = 5 + 1 = 6 \\ b_5 = d_5 - \lambda_4 = -21 - 1 = -22 \end{cases}$$

Daí,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 6 & -22 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & -22 \\ 6 & 4 & 5 & 6 & -22 \\ 6 & 4 & 6 & 5 & -22 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & -21 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 18 & -18 & 38 & -22 \\ -6 & 17 & -28 & 38 & -22 \\ -6 & 16 & -27 & 38 & -22 \\ -6 & 16 & -26 & 37 & -22 \\ -6 & 16 & -26 & 36 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = -1$$

$$\lambda_1 \lambda_5 = 1, \text{ com } \lambda_1 = \lambda_5 = -1; \text{ (caso A3)}$$

$$\lambda_1 \lambda_5 = -1; \lambda_2 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A6)}$$

$$\lambda_2 \lambda_5 = -1; \lambda_3 \lambda_5 = 1 \text{ (caso A7)}$$

$$\lambda_3 \lambda_5 = 1 ; \lambda_4 \lambda_5 = -1 \text{ (caso A6)}$$

$$\lambda_4 \lambda_5 = -1 ; \text{ (caso A11)}$$

$$12. \text{ a) } N = 5$$

$$\text{b) } d_1 = 6; d_2 = -4; d_3 = -6; d_4 = 5$$

$$\text{c) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1.$$

$$\text{d) } \begin{cases} a_1 = d_1 - \lambda_1 = 6 - 1 = 5 \\ a_2 = d_2 - \lambda_2 = -4 - 1 = -5 \\ a_3 = d_3 - \lambda_3 = -6 - 1 = -7 \\ a_4 = d_4 - \lambda_4 = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$

$$\text{e) } d_5 = \lambda_5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 1 - (5 - 5 - 7 + 4) = 1 + 3 = 4$$

$$\text{f) } \begin{cases} b_2 = d_2 - \lambda_1 = -4 - 1 = -5 \\ b_3 = d_3 - \lambda_2 = -6 - 1 = -7 \\ b_4 = d_4 - \lambda_3 = 5 - 1 = 4 \\ b_5 = d_5 - \lambda_4 = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$(b_j = a_j, j = 2, 3, \dots, N-1, \text{ como era de se esperar - caso A13})$$

Daí:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -7 & 4 & 3 \\ 5 & -4 & -7 & 4 & 3 \\ 5 & -5 & -6 & 4 & 3 \\ 5 & -5 & -7 & 5 & 3 \\ 5 & -5 & -7 & 4 & 4 \end{bmatrix}; A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 & -4 & -3 \\ -5 & 6 & 7 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 8 & -4 & -3 \\ -5 & 5 & 7 & -3 & -3 \\ -5 & 5 & 7 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1 \quad (\text{caso A13})$$

$$13. \text{ a) } N = 5$$

$$\text{b) } d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 8$$

$$\text{c) } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1.$$

$$\text{d) } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 8 + 1 = 9$$

$$\text{e) } b_2 = b_3 = b_4 = 9$$

$$\text{f) } d_5 = -1 - 4 \times 9 = -37; \quad b_5 = d_5 - \lambda_4 = -37 + 1 = -36$$

Daí,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 9 & -36 \\ 9 & 8 & 9 & 9 & -36 \\ 9 & 9 & 8 & 9 & -36 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & -36 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & -37 \end{bmatrix}; A^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -9 & -9 & -9 & 36 \\ -9 & -10 & -9 & -9 & 36 \\ -9 & -9 & -10 & -9 & 36 \\ -9 & -9 & -9 & -10 & 36 \\ -9 & -9 & -9 & -9 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1 \quad (\text{caso A14})$$

14. a) $N = 5$

b) $d_1 = 2; d_2 = 3; d_3 = 4; d_4 = 5$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1; \lambda_5 = -1$

$$d) \begin{cases} a_1 = d_1 - \lambda_1 = 2 - 1 = 1 \\ a_2 = d_2 - \lambda_2 = 3 - 1 = 2 \\ a_3 = d_3 - \lambda_3 = 4 - 1 = 3 \\ a_4 = d_4 - \lambda_4 = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$

e) $d_5 = \lambda_5 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -1 - (1 + 2 + 3 + 4) = -11$

f) $b_2 = a_2 = 2; b_3 = a_3 = 3; b_4 = a_4 = 4; b_5 = d_5 - \lambda_5 = -11 - (-1) = -12$

Daí,

$$A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & -12 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1; \lambda_5 = -1 \quad (\text{caso A12})$$

Capítulo 4

- 4.1. Introduziremos neste Capítulo, a subclasse $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, das matrizes C , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), onde $\mathcal{A}$ é a classe das matrizes A da forma (2.2.1), satisfazendo (2.2.2), do Capítulo II. Estudaremos os problemas de autovalores e de inversão de tais matrizes, bem como estabeleceremos condições para que, sendo $C \in \mathcal{C}$ inteira e inversível, tenha inversa C^{-1} inteira, facilmente explicitável.
- 4.2. Se em (2.2.1), Capítulo II, exigimos que os d_k , $k = 1, 2, \dots, N$ sejam todos iguais, digamos, a c_1 , de:

$$d_k + b_{k+1} = a_k + d_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

obtemos:

$$c_1 + b_{k+1} = a_k + c_1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.2.1)$$

Se pusermos:

$$c_{k+1} = a_k = b_{k+1},$$

obteremos a classe $\mathcal{C}$ das matrizes C , de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), da forma:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_1 & c_3 & \dots & c_{N-1} & c_N \\ c_2 & c_3 & c_1 & \dots & c_{N-1} & c_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_1 & c_N \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_N & c_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

onde c_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$, são números quaisquer (inteiros, racionais, reais ou complexos) e a soma dos elementos de cada linha de C é um número fixo S_C ,

$$S_C = \sum_{k=1}^N c_k \quad (4.2.3)$$

para cada matriz $C \in \mathcal{C}$.

A sequência $SG_c = \{c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, c_N\}$, que constitui a primeira linha de $C \in \mathcal{C}$, será chamada de “sequência geradora de C ”, SG_c . Da matriz C , diz-se que é gerada pela sequência SG_c .

De (4.2.2) e (4.2.3) e de (2.2.3) e (2.2.1.1), Capítulo II, resulta:

a) Os autovalores de $C \in \mathcal{C}$ serão dados por:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= c_1 - c_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \lambda_N &= S_C = \sum_{k=1}^N c_k \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

e, em consequência de (2.2.3.1), Capítulo II:

b) Os autovalores de $C \in \mathcal{C}$, correspondentes, respectivamente, aos autovalores $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$, são os vetores $v_k, k = 1, 2, \dots, N$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^N c_k \\ -c_2 \\ -c_2 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_2 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} \sum_{k=3}^N c_k \\ \sum_{k=3}^N c_k \\ -(c_2 + c_3) \\ -(c_2 + c_3) \\ \vdots \\ -(c_2 + c_3) \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} \sum_{k=4}^N c_k \\ \sum_{k=4}^N c_k \\ \sum_{k=4}^N c_k \\ -(c_2 + c_3 + c_4) \\ \vdots \\ -(c_2 + c_3 + c_4) \end{bmatrix}; \dots, v_{N-1} = \begin{bmatrix} c_N \\ c_N \\ c_N \\ c_N \\ \vdots \\ c_N \\ -\sum_{k=2}^N c_k \end{bmatrix}; v_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Decorre de (4.2.4) que:

c) O determinante de $C \in \mathcal{C}$, $\det.C$, é dado por:

$$\det.C = \prod_{k=1}^N \lambda_k = \prod_{k=1}^N (c_1 - c_{k+1}) \left(\sum_{j=1}^N c_j \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.6)$$

Exemplo:

1. Sejam $N = 4$:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \text{Autovalores: } \lambda_1 &= 5 - 4 = 1 \\ \lambda_2 &= 5 - 3 = 2 \\ \lambda_3 &= 5 - 2 = 3 \\ \lambda_4 &= (4 + 3 + 2 + 5) = 14. \end{aligned}$$

Autovetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como se pode verificar, calculando:

$AV = V(\lambda I)$, onde $V = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4)$ e

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

$$\det. C = \prod_{k=1}^4 \lambda_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 14 = 84.$$

Assim, o problema de autovalores de $C \in \mathcal{C}$ é facilmente solucionável.

4.3. Propriedades.

- a) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e se α_1, α_2 são escalares $\Rightarrow \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 \in \mathcal{C}$.
Isto é, $\mathcal{C}$ é fechado relativamente às operações de multiplicação de matrizes e de multiplicação de escalar por matriz.
- b) Se λ_k, μ_k são, respectivamente, autovalores de $C_1 \in \mathcal{C}$ e de $C_2 \in \mathcal{C}$ e se α_1, α_2 são escalares, $\gamma_k = \alpha_1 \lambda_k + \alpha_2 \mu_k$ é autovalor de $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$, $k = 1, 2, \dots, N$.
- c) Se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ e se u, v são, respectivamente, autovetores de C_1 e de C_2 , correspondentes aos autovalores λ, μ de C_1 e de C_2 , então $\alpha u + \beta v$ é autovetor de $\alpha C_1 + \beta C_2$ correspondente ao autovalor $\alpha \lambda + \beta \mu$, onde α, β são escalares.
- d) As matrizes O_N e $I_N \in \mathcal{C}$.

Exemplo.

2) Sejam $N = 4$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \alpha_1 = 2; \alpha_2 = 3.$$

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 10 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 12 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 12 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 22 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 22 & 13 \\ 11 & 12 & 13 & 22 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1; & \mu_1 &= 3; & \gamma_1 &= 11 = 2 \times 1 + 3 \times 3 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \mu_1 \\
\lambda_2 &= 2; & \mu_2 &= 2; & \gamma_2 &= 10 = 2 \times 2 + 3 \times 2 = \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \mu_2 \\
\lambda_3 &= 3; & \mu_3 &= 1; & \gamma_3 &= 9 = 2 \times 3 + 3 \times 1 = \alpha_1 \lambda_3 + \alpha_2 \mu_3 \\
\lambda_4 &= 14; & \mu_4 &= 10; & \gamma_4 &= 58 = 2 \times 14 + 3 \times 10 = \alpha_1 \lambda_4 + \alpha_2 \mu_4.
\end{aligned}$$

$$\text{Sejam } u = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ e } v = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

autovetores de C_1, C_2 correspondentes, respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\mu_1 = 3$. Então o autovetor γ , de $\alpha C_1 + \alpha C_2$ é:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 36 \\ -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 u + \alpha_2 v,$$

Sejam:

$$U = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & 2 & 2 \\ -4 & -7 & -9 & 2 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ as matrizes de autovetores de } \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2.$$

Então, $\alpha_1 U + \alpha_2 V$ é a matriz de autovetores de $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$, correspondente aos autovetores $\alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ de $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$. De fato:

$$W = \alpha_1 u + \alpha_2 v = \begin{pmatrix} 36 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & 36 & 5 \end{pmatrix}; \quad \lambda I = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 58 \end{pmatrix}; \quad CW = W(\lambda I):$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 11 & 12 & 13 \\ 11 & 22 & 12 & 13 \\ 11 & 12 & 22 & 13 \\ 11 & 22 & 12 & 13 \\ 11 & 22 & 13 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & -36 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & 25 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & 13 & 5 \\ -11 & -23 & -36 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 58 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 396 & 250 & 117 & 290 \\ -121 & 250 & 117 & 290 \\ -121 & -230 & 117 & 290 \\ -121 & -230 & -324 & 290 \end{pmatrix}$$

Vê-se, claramente, o que se afirma nas propriedades a), b) e c) acima.

Observação: A classe $\mathcal{C}$ não é fechada relativamente às operações de inversão e de multiplicação de matrizes, como mostra o seguinte:

Exemplo:

3) Sejam $N = 4$ e C_1, C_2 as matrizes Exemplo 2).

$$C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 29 & 31 & 36 & 44 \\ 26 & 34 & 36 & 44 \\ 26 & 30 & 40 & 44 \\ 26 & 30 & 37 & 47 \end{pmatrix}; \quad C_2 C_1 = \begin{pmatrix} 44 & 36 & 31 & 29 \\ 41 & 39 & 31 & 29 \\ 41 & 35 & 35 & 29 \\ 41 & 35 & 32 & 32 \end{pmatrix}$$

$$C_1^{-1} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 60 & -39 & -11 & -4 \\ -24 & 45 & -11 & -4 \\ -24 & 3 & 31 & -4 \\ -24 & 3 & 3 & 24 \end{pmatrix}$$

Nem $C_1 C_2, C_2 C_1$ ou C_1^{-1} pertencem a $\mathcal{C}$, muito embora $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

Por outro lado, $C_1 C_2, C_2 C_1$ e $C_1^{-1} \in \mathcal{A}$, da forma (2.2.1), Capítulo II.

e) Dados N ($N \geq 2$, inteiro) números $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ pode-se sempre construir matriz $C \in \mathcal{C}$ que tenha esses N números como seus autovalores.

Prova:

Decorre de (4.2.4) que

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = & & & & & & & = \lambda_1 \\ c_1 - & & c_3 & & & & & = \lambda_2 \\ c_1 - & & & & c_4 & & & = \lambda_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 - & & & & & & c_{N-1} & = \lambda_{N-2} \\ c_1 - & & & & & & -c_N & = \lambda_{N-1} \\ c_1 + c_2 + c_3 & & & \dots & & & +c_N & = \lambda_N \end{cases} \quad (4.3.1)$$

ou equivalentemente:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 & = \lambda_1 \\ c_1 - & = \lambda_2 \\ \dots & \dots \\ c_1 - & c_N = \lambda_{N-1} \\ Nc_1 & = \sum_{k=1}^N \lambda_k \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Da última das equações de (4.3.2), obtemos

$$c_1 = \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k \right) / N \quad (4.3.3)$$

Daí,

$$c_{k+1} = c_1 - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

e $C_2 \in \mathcal{C}$ pôde ser construída tendo $\lambda_k, \quad k = 1, \dots, N$ como seus auto-valores.

Exemplo.

4. $N = 5$; $\lambda_k = k, \quad k = 1, 2, 3, 4; \lambda_5 = 6$.

$$c_1 = \left(\sum_{k=1}^5 \lambda_k \right) / 5 = 16/5 = 3,2$$

$$c_2 = c_1 - \lambda_1 = 3,2 - 1 = 2,2; \quad c_3 = c_1 - \lambda_2 = 3,2 - 2 = 1,2; \quad c_4 = c_1 - \lambda_3 = 3,2 - 3 = 0,2; \\ c_5 = c_1 - \lambda_5 = 3,2 - 6 = -2,8.$$

Daí,

$$C = \begin{pmatrix} 3,2 & 2,2 & 1,2 & 0,2 & -2,8 \\ 2,2 & 3,2 & 1,2 & 0,2 & -0,8 \\ 2,2 & 1,2 & 3,2 & 0,2 & -0,8 \\ 2,2 & 1,2 & 0,2 & 3,2 & -0,8 \\ 2,2 & 1,2 & 0,2 & -0,8 & 3,2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3,2 - 2,2 = 1; \quad \lambda_2 = 3,2 - 1,2 = 2; \quad \lambda_3 = 3,2 - 0,2 = 3; \quad \lambda_4 = 3,2 + 0,8 = 4; \\ \lambda_5 = 2,2 + 1,2 + 0,2 - 0,8 + 3,2 = 6.$$

Observação: Contrariamente ao que sucede com as matrizes $A \in \mathcal{A}$, dados N números inteiros $\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$, nem sempre é possível se construir matriz inteira C , tendo esses números inteiros como seus autovalores.

De fato:

De (4.3.3) decorre que c_1 será inteira se $\sum_{k=1}^N \lambda_k$ for múltiplo (negativo ou positivo de) N ou se for zero.

Já vimos no exemplo 4), anterior que, apesar de serem os autovalores inteiros, a matriz obtida, tendo aqueles autovalores, não pôde ser inteira. Por outro lado, se exigimos que $C \in \mathcal{C}$ seja inteira, os autovalores devem ser escolhidos satisfazendo às condições acima mencionadas.

Exemplo.

5. $N = 5$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 4$; $\lambda_4 = 2$; $\lambda_5 = 5$.

$$\sum_{k=1}^5 \lambda_k = 15 = 3 \times 5 \Rightarrow c_1 = 15/5 = 3$$

$$c_2 = c_1 - \lambda_1 = 3 - 1 = 2; \quad c_3 = c_1 - \lambda_2 = 3 - 3 = 0; \quad c_4 = c_1 - \lambda_3 = 3 - 4 = -1. \\ c_5 = c_1 - \lambda_4 = 3 - 2 = 1.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 3 - 2 = 1 \\ \lambda_2 &= 3 - 0 = 3 \\ \lambda_3 &= 3 + 1 = 4 \\ \lambda_4 &= 3 - 1 = 2 \\ \lambda_5 &= 2 + 0 - 1 + 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$N = 5$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$; $\lambda_5 = -6$.

$$\sum_{k=1}^5 \lambda_k = 0; \quad c_1 = 0.$$

$$c_2 = -\lambda_1 = -2; \quad c_3 = -\lambda_2 = 2; \quad c_4 = -\lambda_3 = -3 \quad c_5 = -\lambda_4 = -3.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = -2 + 2 - 3 - 3 + 0 = -6.$$

Em vista do que acabamos de discutir, podemos enunciar a propriedade:

e. Uma sequência λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ de N números inteiros constituirá uma sequência de autovalores de $C \in \mathcal{C}$, inteira, se somente se $\sum_{k=1}^N \lambda_k$ for múltiplo (negativo ou positivo) de N ou for zero.

Prova:

A condição é suficiente. Se C for inteira, seus autovalores são inteiros, como soma ou diferença de números inteiros e satisfazem à condição $\sum_{k=1}^N \lambda_k = Nc_1$ (N -ésima equação do sistema (4.3.2)).

A condição é necessária, se λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ forem inteiros, serão autovalores de $C \in \mathcal{C}$ inteira se satisfizerem à condição $Nc_1 = \sum_{k=1}^N \lambda_k$.

Observação: Se fixarmos c_1 e permutarmos de todos os modos possíveis os elementos $\{c_2, c_3, \dots, c_{N-1}, c_N\}$, obteremos $(N-1)!$ matrizes $C \in \mathcal{C}$, com mesmos autovalores (a menos da ordem) e, portanto, com mesmos determinantes.

4.4. O problema de inversão das matrizes $C \in \mathcal{C}$.

Se $\det.C \neq 0$, isto é, se $\sum_{k=1}^N \lambda_k \neq 0$ ou, equivalentemente se $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, $C \in \mathcal{C}$ é inversível. E como $C \in \mathcal{A}$, podemos reescrever as relações (3.2.6) a (3.2.12), do Capítulo II, matatis mutantis, para o cálculo dos elementos das inversas C^{-1} de $C \in \mathcal{C}$:

$$w_1 = \frac{\lambda_N - c_2}{\lambda_1 \lambda_N} \quad (4.4.1)$$

$$w_2 = \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_N} + \frac{\sum_{j=3}^N c_j}{\lambda_2 \lambda_N} \quad (4.4.2)$$

$$w_k = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} c_j}{\lambda_{k-1} \lambda_N} + \frac{\sum_{j=k+1}^N c_j}{\lambda_k \lambda_N}, \quad k = 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.4.3)$$

$$w_{N-1} = \frac{\sum_{j=1}^{N-2} c_j}{\lambda_{N-2} \lambda_N} + \frac{c_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N} \quad (4.4.4)$$

$$w_N = \frac{\lambda_N - c_N}{\lambda_{N-1} \lambda_N} \quad (4.4.5)$$

$$w_k = w_k - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.4.6)$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - \frac{1}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.4.7)$$

Exemplo.

6. Sejam $N = 5$;

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 1; \lambda_4 = 15$$

$$w_1 = \frac{\lambda_4 - c_2}{\lambda_1 \lambda_4} = \frac{15 - 4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$w_2 = \frac{c_1}{\lambda_1 \lambda_4} + \frac{c_3 + c_4}{\lambda_2 \lambda_4} = \frac{15}{5} + \frac{6}{45} = \frac{7}{15}$$

$$w_3 = \frac{c_1 + c_2}{\lambda_2 \lambda_4} + \frac{c_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{9}{45} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

$$w_4 = \frac{\lambda_4 - c_4}{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{15 - 4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$x_1 = w_1 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{11}{15} - 1 = \frac{-4}{15}$$

$$x_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$x_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{7}{15} - 1 = \frac{-8}{15}$$

$$y_2 = w_2 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{7}{15} - 1 = \frac{-8}{15}$$

$$y_3 = w_3 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$y_4 = w_4 - \frac{1}{\lambda_3} = \frac{11}{15} - 1 = \frac{-4}{15}$$

Então:

$$C^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 & -4 \\ -4 & 7 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 7 & -4 \\ -4 & 2 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez se observa que a classe $\mathcal{C}$ não é fechada relativamente à operação de inversão de matrizes.

4.5. Matrizes inteiras $C \in \mathcal{C}$, com inversas inteiras C^{-1} .

Sabe-se que a matriz A inteira tem inversa inteira A^{-1} se e somente se $\text{ABS}(\det.A) = 1$, onde $\text{ABS}(\det.A)$ é o valor absoluto do determinante de A .

Uma condição suficiente para que tal fato ocorra é que $\text{ABS}(\lambda_k) = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$ onde λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ são os autovalores de A . No caso das matrizes $C \in \mathcal{C}$ que, sendo inteiras, têm autovalores inteiros, essa condição é também necessária. Daí, matriz inteira $C \in \mathcal{C}$ tem inversa inteira se e somente se $\text{ABS}(\lambda_k) = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$, onde λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ (4.3.1) e (4.3.2) são seus autovalores. Assim, os sistemas lineares para a determinação da sequência $SG_c = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, que gera C , dados os autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, tomam a forma:

$$\begin{cases} c_1 - c_2 & = \pm 1 \\ c_1 - c_3 & = \pm 1 \\ c_1 - c_4 & = \pm 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 - c_{N-1} & = \pm 1 \\ c_1 - c_N & = \pm 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_{N-1} + c_N & = \pm 1 \end{cases} \quad (4.5.1)$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 & = \pm 1 \\ c_1 - c_3 & = \pm 1 \\ c_1 - c_4 & = \pm 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 - c_N & = \pm 1 \\ Nc_1 & = K \end{cases} \quad (4.5.2)$$

onde ou $K = +N$ ou $K = -N$ ou $ABS(K) < N$ ou $K = 0$.

Se $K = N$ então os N autovalores de C são todos iguais a 1,

$$\lambda_k = 1, k = 1, 2, \dots, N$$

e $c_1 = 1; c_k = 0, k = 2, 3, \dots, N$.

A matriz C resultante é a identidade I_N .

Se $K = -N$, analogamente procedendo, concluímos que a matriz C obtida é $-I_N$. Casos esses irrelevantes, que devem ser descartados.

Se $ABS(K) < N$, então c_1 não seria inteiro e portanto, também C não seria matriz inteira.

Se $K = 0$ então o número de autovalores iguais a 1 bate com o dos autovalores iguais a -1. Logo, N terá que ser, necessariamente par. Além disso, resulta da última equação do sistema (4.5.2) que $c_1 = 0$. Então os restantes $c_k, k = 2, 3, \dots, N$ seriam obtidos das $N - 1$ primeiras equações de (4.5.2), usando-se os $N-1$ primeiros autovalores $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, N-1$. Se dentre esses $N-1$ autovalores escolhermos $N/2$ iguais a +1, os correspondentes c_k seriam iguais a -1 e os correspondentes aos restantes $(N/2-1)$ autovalores iguais a -1, seriam positivos. Então, no primeiro membro da última equação de (4.5.1), o número de parcelas iguais a -1 superaria de uma unidade o das parcelas iguais a +1, então λ_N seria igual a -1, $\lambda_N = -1$. E o número de autovalores iguais a -1 bateria com o dos iguais a +1, e teremos assim $N/2$ autovalores iguais a +1 e outro tanto iguais a -1.

Raciocinando analogamente, se $N/2$ dos $N-1$ primeiros autovalores forem tomados iguais a -1, teríamos $\lambda_N = +1$ e o número de autovalores iguais a -1 seria idêntico $(N/2)$ ao dos autovalores iguais a +1 $(N/2)$. Então, concluindo, para se construir $C \in \mathcal{C}$ inteira, com inversa inteira:

- a) Escolhe-se N par.
- b) Faz-se $c_1 = 0$.
- c) Dos $N-1$ primeiros autovalores de C , escolhe-se $N/2$ deles iguais a +1 e, portanto, $(N/2 - 1)$ iguais a -1 ou vice-versa.
- d) a sequência geradora de C , SG_C , de N elementos, é da forma:

$SG_C = \{0, \pm 1, \pm 1; \dots, \pm 1\}$ onde $N/2$ de seus elementos são iguais a -1 e $(N/2 - 1)$, iguais a +1, ou vice-versa.

$$\det.C = \det.C^{-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } N/2 \text{ for par} \\ -1, & \text{se } N/2 \text{ for impar} \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Exemplo.

7. Sejam $N = 6$ e sequência geradora C , $SG_C = \{0, +1 - 1 - 1 + 1 - 1\}$

Então:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_5 = 1; \quad \lambda_6 = -1$$

$$\det. C = -1$$

4.5.1. Construção da inversa C^{-1} inteira de matriz inteira $C \in \mathcal{C}$.

Para se construir C^{-1} inteira, usamos as relações (4.4.1) a (4.4.7), modificadas e simplificadas, levando-se em conta que os autovalores μ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ de C^{-1} coincidem com os de C , λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ e são em valor absoluto, iguais a 1 e $c_1 = 0$. Então, temos:

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - c_2) \quad (4.5.1.1)$$

$$w_2 = \lambda_2 \lambda_N + \left(\sum_{j=3}^N c_j \right) \quad (4.5.1.2)$$

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{k-1} c_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N c_j \right), \quad k = 2, \dots, N-1 \quad (4.5.1.3)$$

$$w_{N-1} = \lambda_{N-2} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{N-2} c_j \right) + \lambda_{N-1} \lambda_N c_N \quad (4.5.1.4)$$

$$w_N = \lambda_{N-1} \lambda_N (\lambda_N - c_N) \quad (4.5.1.5)$$

$$x_k = w_k - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5.1.6)$$

$$y_{k+1} = w_{k+1} - \lambda_k \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5.1.7)$$

Exemplos.

8. Sejam $N = 6$ e C a matriz do Exemplo 7, anterior:
Vamos construir C^{-1} , usando (4.5.1.1) a (4.5.1.6):

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_6 (\lambda_6 - c_2) = (-1 - 1) = -2 \quad ; \quad x_1 = w_1 - \lambda_1 = -2 + 1 = -1$$

$$w_2 = \lambda_2 \lambda_6 (c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = -(-1 - 1 + 1 - 1) = 2 \quad ; \quad x_2 = w_2 - \lambda_2 = 2 - 1 = 1;$$

$$y_2 = w_2 - \lambda_1 = 2 + 1 = 3;$$

$$w_3 = \lambda_2 \lambda_6 (c_2) + \lambda_3 \lambda_6 (c_4 + c_5 + c_6) = -(-1) - (-1) = -1 + 1 = 0; \quad x_3 = w_3 - \lambda_3 = 0 - 1 = -1; \\ y_3 = w_3 - \lambda_2 = 0 - 1 = -1;$$

$$w_4 = \lambda_3 \lambda_6 (c_2 + c_3) + \lambda_4 \lambda_6 (c_5 + c_6) = -1(0) + (0) = 0 \quad ; \quad x_4 = w_4 - \lambda_4 = 0 + 1 = 1; \\ y_4 = w_4 - \lambda_3 = 0 - 1 = -1;$$

$$w_5 = \lambda_4 \lambda_6 (c_2 + c_3 + c_4) + \lambda_5 \lambda_6 c_6 = (-1) - (-1) = 0 \quad ; \quad x_5 = w_5 - \lambda_5 = 0 - 1 = -1; \\ y_5 = w_5 - \lambda_4 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_6 = \lambda_5 \lambda_6 (\lambda_6 c_6) = -(-1 + 1) = 0 \quad ; \quad y_6 = w_6 - \lambda_5 = 0 - 1 = -1;$$

Daí,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det.C^{-1} = \det.C = -1.$$

9. Sejam $N = 6$ e a sequência de autovalores: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$

Então a sequência geradora de C , é: $SG_C = \{0, -1, 1, -1, 1, -1\}$ e:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de C^{-1} (usando (4.5.1.1) a (4.5.1.7)):

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_6 (\lambda_6 - c_2) = -(-1 + 1) = 0 \quad ; \quad x_1 = w_1 - \lambda_1 = 0 - 1 = -1$$

$$w_2 = \lambda_2 \lambda_6 (c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = (1 - 1 + 1 - 1) = 0 \quad ; \quad x_2 = w_2 - \lambda_2 = 0 + 1 = 1; \\ y_2 = w_2 - \lambda_1 = 0 - 1 = -1;$$

$$w_3 = \lambda_2 \lambda_6 (c_2) + \lambda_3 \lambda_6 (c_4 + c_5 + c_6) = (-1) - (-1) = 0; \quad x_3 = w_3 - \lambda_3 = 0 - 1 = -1; \\ y_3 = w_3 - \lambda_2 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_4 = \lambda_3 \lambda_6 (c_2 + c_3) + \lambda_4 \lambda_6 (c_5 + c_6) = -(0) + (0) = 0 \quad ; \quad x_4 = w_4 - \lambda_4 = 0 + 1 = 1;$$

$$y_4 = w_4 - \lambda_3 = 0 - 1 = -1;$$

$$w_5 = \lambda_4 \lambda_6 (c_2 + c_3 + c_4) + \lambda_5 \lambda_6 (c_6) = +(-1) - (-1) = 0 \quad ; \quad x_5 = w_5 - \lambda_5 = 0 - 1 = -1;$$

$$y_5 = w_5 - \lambda_4 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_6 = \lambda_5 \lambda_6 (\lambda_6 - c_6) = -(-1 + 1) = 0 \quad ; \quad y_6 = w_6 - \lambda_5 = 0 - 1 = -1;$$

Então:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Então, sendo os autovalores: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$ ou a sequência geradora de C , $SG_C = \{0, -1, 1, -1, 1, -1\}$ então $C^{-1} = C$.

4.5.2. Algumas escolhas de sequências de autovalores para C inteira que resultam em inversas inteiras C^{-1} explícitas.

1. Seja a sequência de autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ (N , PAR)

$$\lambda_k = 1, \quad k = 1, 3, \dots, N - 1;$$

$$\lambda_k = -1, \quad k = 2, 4, \dots, N; \quad SG_C = (0, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$$

Então:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos mostrar que $C^{-1} = C$ (usando (4.5.1.1) e (4.5.1.7)):

$$w_1 = \lambda_1 \lambda_6 (\lambda_N - c_2) = -(-1 - c_2) = c_2 + 1 = -1 + 1 = 0;$$

$$w_2 = \lambda_2 \lambda_N \sum_{j=3}^N c_j = (0) = 0$$

Para $k=4, 6, \dots, N$ (k , PAR):

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{k-1} c_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N c_j \right) = - (0) + (0) = 0;$$

Para $k=3, 5, \dots, N-1$ (k , ÍMPAR):

$$w_k = \lambda_{k-1} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{k-1} c_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N c_j \right) = (-1) - (-1) = 0$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = 0 + 1 = 1, \quad k=1, 4, \dots, N-2; \quad y_k = w_k - \lambda_{k-1} = 0 + 1 = 1, \quad k=2, 4, \dots, N$$

$$x_k = w_k - \lambda_k = 0 - 1 = -1, \quad k=1, 3, \dots, N-1; \quad y_k = w_k - \lambda_{k-1} = 0 + 1 = 1, \quad k=3, 5, \dots, N-1$$

Logo:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & -1 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

2. Sequência dos autovalores, λ_k , $k=1, 2, \dots, N$ (N PAR):

$$\lambda_k = -1, \quad k=1, 3, \dots, N-1;$$

$$\lambda_k = 1, \quad k=2, 4, \dots, N;$$

$$SG_C = \{0, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1\}$$

Então, pode-se mostrar que $C^{-1} = C$, também neste caso.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

3. Sequência dos autovalores, λ_k , $k=1, 2, \dots, N$ (N PAR)

$$\lambda_k = -1, \quad k=1, 2, \dots, N/2 = m;$$

$\lambda_k = 1, k = m+1, m+2, \dots, N$;
 Sequência geradora de C:
 $c_1 = 0; c_k = 1, k = 2, 3, \dots, m+1$;
 $c_k = -1, k = m+2, \dots, N$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & |1| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & |1| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & |1| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & |1| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & |0| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & |-1| & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ m \\ m+1 \\ \dots \\ N \end{matrix}$$

1 2 3 ... m |m+1| m+2 m+3 ... N-2 N-1 N

Construção de C^{-1} .

- a) As m primeiras colunas de C^{-1} coincidem com as correspondentes colunas de C.
 b) A coluna de índice m+1 está assim constituída:
- o elemento diagonal, $w_{m+1} = -2(m-1)$
 - os elementos abaixo da diagonal, $x_k = w_{m+1} - 1$
 - os acima da diagonal, $y_{m+1} = w_{m+1} + 1$
- c) As colunas de índice k, $k = m+2, \dots, N-1$, estão assim constituídas:
- os elementos diagonais, $w_k, w_k = 2$.
 - os abaixo da diagonal, $x_k = w_k - 1 = 1$;
 - os acima da diagonal, $y_k = w_k - 1 = 1$;
- d) A coluna de índice N está constituída da seguinte maneira:
- o elemento diagonal, $w_N = 2$;
 - os acima da diagonal, $y_N = w_N - 1 = 1$.

Prova (usando (4.5.1.1) a (4.5.1.7)):

$$\begin{cases} w_1 = \lambda_1 \lambda_N (\lambda_N - c_2) = -(1-1) = 0; \\ \quad = w_1 - \lambda_1 = 0 + 1 = 1. \end{cases}$$

Para $k = 2, 3, \dots, m$

$$\begin{aligned} w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{k-1} c_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N c_j \right) = - \sum_{j=2}^{k-1} c_j - \sum_{j=k+1}^N c_j - c_k + c_k = \\ &= - \left(\sum_{j=2}^N c_j \right) + c_k = -\lambda_N + c_k = -1 + 1 = 0; \\ x_k &= w_k - \lambda_k = 0 + 1 = 1, \quad k = 2, 3, \dots, m; \\ y_k &= w_k - \lambda_{k-1} = 0 + 1 = 1, \quad k = 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{m+1} &= \lambda_m \lambda_N \left(\sum_{j=2}^m c_j \right) + \lambda_{m+1} \lambda_N \left(\sum_{j=m+2}^N c_j \right) = -\sum_{j=2}^m c_j + \sum_{j=m+2}^N c_j = \\
&= -(m-1) - (m-1) = -2(m-1) \\
x_{m+1} &= w_{m+1} - \lambda_{m+1} = w_{m+1} - 1; \quad y_{m+1} = w_{m+1} - \lambda_m = w_{m+1} + 1.
\end{aligned}$$

Para $k = m+2, m+3, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
w_k &= \lambda_{k-1} \lambda_N \left(\sum_{j=2}^{k-1} c_j \right) + \lambda_k \lambda_N \left(\sum_{j=k+1}^N c_j \right) = \sum_{j=2}^{k-1} c_j + \sum_{j=k+1}^N c_j + c_k - c_k = \\
&= \lambda_N - c_k = 1 + 1 = 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_k &= w_k - \lambda_k = 2 - 1 = 1, \quad y_k = w_k - \lambda_{k-1} = 2 - 1 = 1, \quad k = m+2, \dots, N-1 \\
y_N &= w_N - \lambda_{N-1} = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Exemplo:

10. $N = 6$; Autovalores: $\{-1, -1, -1, 1, 1, 1\}$
 $SG_c = \{0, 1, 1, 1, -1, -1\}$; $m = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w_4 &= -2(m-1) = -2 \times 2 = -4; \\
x_4 &= w_4 - 1 = -4 - 1 = -5; \quad y_4 = w_4 + 1 = -4 + 1 = -3; \\
w_k &= 2, \quad k = 5, 6; \\
x_5 &= 1; \quad y_k = 1; \quad k = 5, 6.
\end{aligned}$$

4. Sequência dos autovalores:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= 1, \quad k = 1, 2, \dots, m = N/2 \quad (N, \text{ PAR}) \\
\lambda_k &= -1, \quad k = m+1, m+2, \dots, N \\
SG_C &= \{0, -1, -1, \dots, -1, -1, 1, 1, \dots, 1\} = \{0, c_2, c_3, \dots, c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_N\}
\end{aligned}$$

ou seja: $c_1 = 0$; $c_k = -1$, $k = 2, \dots, m+1$; $c_k = +1$, $k = m+2, \dots, N$.

Neste caso, $C = C_1$ (se designarmos por " C_1 " a matriz obtida em 3.). Daí,

$$C^{-1} = -C_1^{-1}$$

Exemplo:

11. $N = 6$; Autovalores: $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$
 $SG_C = \{0, -1, -1, -1, 1, 1\}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & - & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.6. Roteiro para construção de matrizes inteiras $C \in \mathcal{C}$ e de suas inversas inteiras C^{-1} .

Para se construir matriz inteira $C \in \mathcal{C}$, inversível, e sua inversa C^{-1} , procede-se da seguinte maneira:

- Escolhe-se a ordem N de C ($N \geq 2$, inteiro, PAR).
- Escolhe-se os $N-1$ primeiros autovalores de C , $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, sendo $m = N/2$ deles iguais a $+1$ e os restantes $m-1$, iguais a -1 (ou vice-versa). Daí resultará que $\lambda_N = -1$ (ou $\lambda_N = +1$).
- Constroe-se a sequência SG_C geradora de C , que deve ter a forma $\{0, c_2, c_3, \dots, c_{N-1}, c_N\}$ onde $c_{k+1} = -\lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.
- Constroe-se então a matriz C .

Para a construção de C^{-1} , a partir de λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ e da SG_C , usa-se o RECEITUÁRIO 2 abaixo, adaptado às peculiaridades das matrizes $C \in \mathcal{C}$, do equivalente para matrizes $A \in \mathcal{A}$, item 3.6, Capítulo III.

RECEITUÁRIO 2.

- C1)** Se $\lambda_1 \lambda_N = -1$, a 1ª coluna de C^{-1} coincide com a 1ª coluna de C .
- C2)** Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $w_1 = -2$; $x_1 = -c_2$;
- C3)** Se $\lambda_1 \lambda_N = 1$, com $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $w_1 = 2$; $x_1 = -c_2$;
- C4)** Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = -1$, a k -ésima coluna de C^{-1} coincide com a k -ésima coluna de C , $k = 2, 3, \dots, N-1$;
- C5)** Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = 1$, e $\lambda_k \lambda_N = -1$,
 $w_k = (c_2 + c_3 + \dots + c_{k-1}) - (c_{k+1} + \dots + c_N) = S_k$
 $x_k = w_k - \lambda_k$; $y_k = w_k - \lambda_{k-1}$
 $k = 2, 3, \dots, N-1$.

C6) Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = -1$, e $\lambda_k \lambda_N = 1$,

$$w_k = (c_{k+1} + \dots + c_N) - (c_2 + \dots + c_{k+1}) = -S_k$$

$$x_k = w_k - \lambda_k; \quad y_k = w_k - \lambda_{k-1}$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1.$$

C7) Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda_N = -1$,

$$w_k = -2; \quad x_k = y_k = -c_{k+1}$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1.$$

C8) Se $\lambda_{k-1} \lambda_N = \lambda_k \lambda_N = 1$, com $\lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda_N = 1$,

$$w_k = 2; \quad x_k = y_k = -c_{k+1}$$

$$k = 2, 3, \dots, N-1.$$

C9) Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = 1$, $w_N = 2$; $y_N = -c_N$

C10) Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = 1$, com $\lambda_{N-1} = \lambda_N = -1$, $w_N = -2$; $y_N = -c_N$

C11) Se $\lambda_{N-1} \lambda_N = -1$, a N-ésima coluna de C^{-1} coincide com a N-ésima coluna de C .

Observação: Para facilitar a consulta ao RECEITUÁRIO 2, acima, é conveniente se organizar os produtos dos autovalores, em grupos, como a seguir:

$$\lambda_1 \lambda_N =$$

$$\lambda_1 \lambda_N = \quad ; \quad \lambda_2 \lambda_N =$$

.....

$$\lambda_{k-1} \lambda_N = \quad ; \quad \lambda_k \lambda_N = \quad ; k = 2, 3, \dots, N-1;$$

.....

$$\lambda_{N-1} \lambda_N =$$

De acordo com o resultado de cada grupo, consultar o RECEITUÁRIO 2 para determinar os elementos de cada coluna de C^{-1} , como mostra os abaixo:

Exemplos.

12. Sejam $N = 6$; λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$: $\{1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1\}$; $\lambda_6 = -1$

Então $SG_C = \{0, -1, 1, -1, -1, 1\}$;

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinação de C^{-1} :

$\lambda_1 \lambda_6 = -1$: A 1ª coluna de C^{-1} coincide com a 1ª coluna de C (Caso C1)

$\lambda_1 \lambda_6 = -1, \lambda_2 \lambda_6 = 1$ (Caso C6)

$$w_2 = (c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = 0; \quad x_2 = w_2 - \lambda_2 = 0 + 1 = 1; \quad y_2 = w_2 - \lambda_1 = 0 - 1 = -1$$

$\lambda_2 \lambda_6 = 1, \lambda_3 \lambda_6 = -1$ (Caso C5)

$$w_3 = c_2 - (c_4 + c_5 + c_6) = -1 - (-1) = 0; \quad x_3 = w_3 - \lambda_3 = 0 - 1 = -1; \quad y_3 = w_3 - \lambda_2 = 0 + 1 = 1$$

$\lambda_3 \lambda_6 = -1, \lambda_4 \lambda_6 = -1$ (Caso C4): A 4ª coluna de C^{-1} coincide com a 4ª coluna de C .

$\lambda_4 \lambda_6 = -1, \lambda_5 \lambda_6 = 1$ (Caso C6)

$$w_5 = c_6 - (c_2 + c_3 + c_4) = 1 + 1 = 2; \quad x_5 = w_5 - \lambda_5 = 2 + 1 = 3; \quad y_5 = w_5 - \lambda_4 = 2 - 1 = 1$$

$\lambda_5 \lambda_6 = 1$, (Caso C10)

$$w_6 = -2; \quad y_6 = -c_6 = -1.$$

Logo:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

13. Sejam $N = 6$; $\lambda_k, k = 1, 2, \dots, 5: \{1, -1, -1, 1, -1\}$; $\lambda_6 = 1$

$$\text{Então } SG_C = \{0, -1, 1, 1, -1, 1\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Construção de C^{-1} :

$\lambda_1 \lambda_6 = 1$: (Caso C3); $w_1 = 2$; $x_1 = -c_2 = 1$

$\lambda_1 \lambda_6 = 1, \lambda_2 \lambda_6 = -1$ (Caso C5):

$$w_2 = -(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) = -2; \quad x_2 = w_2 - \lambda_2 = -2 + 1 = -1; \quad y_2 = w_2 - \lambda_1 = -2 - 1 = -3$$

$\lambda_2 \lambda_6 = -1, \lambda_3 \lambda_6 = -1$ (Caso C4): a 3ª coluna de C^{-1} coincide com a 3ª de C .

$\lambda_3 \lambda_6 = -1, \lambda_4 \lambda_6 = -1$ (Caso C6):

$$w_4 = (c_5 + c_6) - (c_2 + c_3) = 0 - 0 = 0; \quad x_k = 0 - 1 = -1; \quad y_4 = 0 + 1 = 1;$$

$\lambda_4 \lambda_6 = 1, \lambda_5 \lambda_6 = -1$ (Caso C5):

$$w_5 = (c_2 + c_3 + c_4) - (c_6) = 1 - 1 = 0; \quad x_5 = 0 + 1 = 1; \quad y_5 = 0 - 1 = -1;$$

$\lambda_5 \lambda_6 = -1$, (Caso C11): a 6ª coluna de C^{-1} coincide com a 6ª de C .

Logo:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.7. Subclasse $\mathcal{A}_1$ das matrizes $A \in \mathcal{A}$ que são simétricas.

Se exigirmos que as matrizes $A \in \mathcal{A}$ sejam simétricas elas tomam a forma:

$$A = \begin{bmatrix} d & a & a & \dots & a & a \\ a & d & a & \dots & a & a \\ a & a & d & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & d & a \\ a & a & a & \dots & a & d \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

onde a soma dos elementos de cada linha de $A \in \mathcal{A}_1$ é um número fixo, S_A ,

$$S_A = d + (N-1) a \quad (4.7.2)$$

e d, a são números reais quaisquer.
($N \geq 2$, inteiro, é a ordem de A).

4.7.1. Os autovalores de A são:

$$\begin{aligned} \lambda &= d - a, \text{ de multiplicidade } N - 1. \\ \mu &= S_A = d + (N - 1) a. \end{aligned}$$

4.7.2. Esta subclasse $\mathcal{A}_1$ goza das propriedades:

- a) Se $A, B \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{A}_1$, onde α, β são escalares.
- b) Se $A, B \in \mathcal{A}_1 \rightarrow AB = BA \in \mathcal{A}_1$.
- c) Se $A \in \mathcal{A}_1$ e A^{-1} existe $A^{-1} \in \mathcal{A}_1$.
- d) Se λ, μ são respectivamente autovalores de A e de $B \in \mathcal{A}_1 \rightarrow \alpha \lambda + \beta \mu$ é autovalor de $\alpha A + \beta B$, onde α, β são escalares.
- e) Se $A, B \in \mathcal{A}_1$ e se u, v são autovetores, respectivamente, de A e de B , correspondentes aos autovalores λ, μ de A e de B , então $\alpha u + \beta v$ é autovetor de $\alpha A + \beta B$, correspondente ao autovalor $\alpha \lambda + \beta \mu$, onde α, β são escalares.

- f) Se $A \in \mathcal{A}_I \rightarrow A_k$ e $A_{(N-k)} \in \mathcal{A}_I$, onde A_k e $A_{(N-k)}$ são as submatrizes principais de A , $k=1, 2, \dots, N-1$, isto é, as submatrizes constituídas, respectivamente, das k primeiras linhas e k -primeiras colunas e das últimas $N-k$ linhas e $N-k$ últimas colunas de A .

g) $\det. A = \lambda^{N-1} \cdot \mu = (d-a)^{N-1} (d + (N-1)a)$

4.7.3. Autovetores de A .

Os autovetores de $A \in \mathcal{A}_I$, correspondentes aos autovalores $\lambda = d-a$ (de multiplicidade $N-1$) e $\mu = d + (N-1)a$, são, respectivamente, os vetores $u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} N-1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} N-2 \\ N-2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} N-1 \\ N-3 \\ N-3 \\ \vdots \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \dots, \quad u_{N-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1-N \end{pmatrix}; \quad u_N = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

independendo, assim, dos elementos de $A \in \mathcal{A}_I$. Estes autovetores são linearmente independentes. De fato, a matriz

$$U = (u_1 u_2 u_3 \dots u_{N-1} u_N) = \begin{pmatrix} N-1 & N-2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & N-2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1-N & 1 \end{pmatrix}$$

se transforma na matriz W abaixo, mediante convenientes operações c-elementares sobre suas colunas:

$$W = \begin{pmatrix} N & N & N & \dots & N & 1 \\ 0 & N & N & \dots & N & 1 \\ 0 & 0 & N & \dots & N & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

que é não singular pois $\det. W = N^{N-1}$ ($N \geq 2$, inteiro). Assim, os autovetores $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ são linearmente independentes.

A inversa U^{-1} de U se obtém efetuando-se sobre as colunas da matriz identidade I , a mesma sequência de operações c-elementares que se aplica sobre as colunas de U para se obter I . Daí:

$U^{-1} = X = \{x_{ij} \mid i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N\}$ é tal que

$$x_{ii} = 1/N, \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$x_{i, i+1} = -1/N, \quad i=1, 2, \dots, N-1;$$

$$x_{N, j} = 1/N, \quad j=1, 2, \dots, N-1$$

os demais x_{ij} são iguais a zero.

Por exemplo: $N = 6$

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; U^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desse modo, as matrizes $A \in \mathcal{A}_I$ são diagonalizáveis, pois se tem:

$$AU = U(\lambda I) \quad \text{ou} \quad \lambda I = U^{-1} A U, \text{ onde}$$

$U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{N-1} \ u_N)$ é a matriz dos autovetores e

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \lambda &= d - a \\ \mu &= d + (N-1)a. \end{aligned}$$

4.7.4. As inversas A^{-1} de $A \in \mathcal{A}_I$.

Se $A \in \mathcal{A}_I$ é inversível, isto é, se $\det. A \neq 0$, então A^{-1} existe e é explícita e se tem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda \mu} \begin{bmatrix} \mu - a & -a & -a & \dots & -a & -a \\ -a & \mu - a & -a & \dots & -a & -a \\ -a & -a & \mu - a & \dots & -a & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & \mu - a & -a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & \mu - a \end{bmatrix}$$

onde $\lambda = d - a$ e $\mu = d + (N-1)a$.

Exemplos.

1. Sejam $N = 5$; $d = 6$; $a = 2$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix};$$

Autovalores:
 $\lambda = 6 - 2 = 4$, de multiplicidade 4
 $\mu = 6 + 4 \times 2 = 14$
 $\det.A = 4^4 \times 14 = 3584$

Autovetores de A:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Como se pode verificar, calculando:

$AU = U(\lambda I)$ onde U é a matriz dos autovetores de A

$$\text{e } \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}. \text{ Isto é:}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 & 14 \\ -4 & 12 & 8 & 4 & 14 \\ -4 & -8 & 8 & 4 & 14 \\ -4 & -8 & -12 & 4 & 14 \\ -4 & -8 & -12 & -16 & 14 \end{pmatrix}$$

O exemplo mostra que A é diagonalizável, ou seja:

$U^{-1}AU = D$, onde D é matriz diagonal e U é não singular:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Como $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq 0$, A^{-1} existe e se tem:

$$A^{-1} = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 12 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 12 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 12 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

2. Sejam $N = 4$ e as matrizes A e B, abaixo, e $\alpha = 3$, $\beta = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 17 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 17 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 17 \end{pmatrix}$$

Sejam $\lambda_1 = 3 - 1 = 2$ $\lambda_2 = 4 - 2 = 2$ autovalores de A e B, respectivamente.

Então, $\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = 6 + 4 = 10$ é autovalor de $\alpha A + \beta B$ ($17 - 7 = 10$)

Sejam:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; v = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ autovetores de A e de B, correspondentes aos}$$

autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 2$ de A e de B.

$$\text{Então: } \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -y \\ -y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ é autovetor}$$

de $\alpha A + \beta B$, correspondente ao autovalor $\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = 10$

De modo geral, se U, V são as matrizes de autovetores de A e de B e então $\alpha U + \beta V$ é a matriz de autovetores de $\alpha A + \beta B$, correspondente aos autovalores $\alpha \lambda_i + \beta \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ onde λ_i e μ_i são os autovalores de A e de B, $i = 1, 2, \dots, N$ e α, β são escalares. Então, temos:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \alpha U + \beta V = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 7 & 5 \\ -7 & 14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & -21 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha \lambda_i + \beta \mu_i = \begin{cases} 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 = \gamma_1 \\ 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 = \gamma_2 \\ 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10 = \gamma_3 \\ 3 \times 6 + 10 \times 2 = 38 = \gamma_4 \end{cases}; \lambda I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38 \end{pmatrix}$$

Então: $W(\lambda I) = CW$:

$$\begin{pmatrix} 21 & 14 & 7 & 5 \\ -7 & 14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & -21 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 17 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 17 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 14 & 14 & 5 \\ -7 & 14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & 7 & 5 \\ -7 & -14 & -21 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 & 140 & 70 & 190 \\ -70 & 140 & 70 & 190 \\ -70 & -140 & 70 & 190 \\ -70 & -140 & -210 & 190 \end{pmatrix},$$

o que mostra que $\alpha U + \beta V$ é a matriz de autovetores $\alpha A + \beta B$ de, correspondente aos autovetores $\alpha \lambda_i + \beta \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, de $C = \alpha A + \beta B$, onde λ_i, μ_i são os autovalores de A e de B , respectivamente.

3. Seja $C = AB$, onde A, B são matrizes do Exemplo 2), acima:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 18 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 18 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 18 \end{pmatrix} = BA$$

Então, $AB = BA \in \mathcal{A}_I$ e A e B comutam.

4.7.5. Inversas inteiras A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$, inteira.

Para que existam inversas inteiras A^{-1} de matriz inteira $A \in \mathcal{A}_I$, devem ser satisfeitas as condições:

$$\begin{aligned} \lambda &= d - a = \pm 1: \\ \mu &= d + (N-1)a = \pm 1. \end{aligned}$$

Analisemos todos esses casos possíveis:

a) $d - a = 1$

$d + (N-1)a = 1$. Daí:

$$d = a + 1$$

$$a + 1 + Na - a = 1 \quad \text{ou} \quad Na = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Neste caso, $d = 1$.

A matriz A resultante é a identidade I_N .

b) $d - a = -1$

$d + (N-1)a = -1$. Temos então:

$$d = a - 1$$

$$a - 1 + (N-1)a = -1 \Rightarrow Na = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ e } d = -1$$

Neste caso, a matriz resultante é $-I_N$.

Estes dois casos podem ser descartados, por desinteressantes.

c) $d - a = 1$

$$d + (N-1)a = -1$$

ou

$$Na = -2. \text{ Então teremos matriz inteira, se } N = 2.$$

$$\text{Então, } a = -1 \text{ e } d = 0.$$

d) $d - a = -1$;

$$a + (N-1)a = 1.$$

Neste caso, $Na = 2$ e a será inteiro se $N = 2$. Então $a = 1$ e $d = 0$.

Teremos, nestes dois casos c), d), como resultantes, as matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ cujas inversas são elas próprias. Então podemos,}$$

afirmar, que para $N > 2$, as matrizes inteiras da classe $\mathcal{A}_i$ não possuem inversas inteiras.

4.7.6. Construção de $A \in \mathcal{A}_i$ que, sendo simétrica, seja definida positiva.

Para se construir $A \in \mathcal{A}_i$ que seja definida positiva, basta que se escolha a e d tais que:

$$d > a > 0.$$

Assim, os menores principais $\det. A_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ serão todos positivos, $\det. A_k > 0$, onde A_k são as submatrizes principais de A , isto é, as submatrizes de ordem k , $k = 1, 2, \dots, N$, de A , constituídas das k primeiras linhas e k primeiras colunas de A .

Matrizes simétricas definidas positivamente são decomponíveis em produto $A = S^t S$, onde S é triangular superior e S^t é a matriz transposta de A . Por exemplo, a matriz A e $\mathcal{A}_i$ do exemplo 1) é definida positiva, pois seus menores principais são todos positivos (de vez que $d > a > 0$ ($6 > 2 > 0$)):

$$6 > 0; \det. \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 4 \times 8 > 0; \quad \det. \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 4^2 \times 10 > 0$$

$$\det. \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 4^3 \times 12 > 0; \quad \det. \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 4^4 \times 14 > 0.$$

Capítulo 5

5.1. Exibiremos, neste capítulo, algumas das possíveis aplicações das diferentes classes de matrizes de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), introduzidas e analisadas nos capítulos anteriores.

5.2. Construção de matrizes com prefixados autovalores ou determinantes.

Vimos no Capítulo II, item 2.2.6, que a construção de matrizes com tais características é sempre possível para as matrizes $A \in \mathcal{A}$ e, com restrições, para as matrizes $C \in \mathcal{C}$ (Capítulo IV, item 4.5, Propriedade e)).

ALGORITMO:

a) Para as matrizes $A \in \mathcal{A}$

- Escolhe-se a ordem N de A .
- Escolhem-se os elementos diagonais, d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$.
- Escolhem-se os números λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ que devam ser os autovalores de A .
- Os a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, são obtidos pelas relações:

$$a_k = d_k - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

- obtém-se, então: $d_N = \lambda_N - \sum_{k=1}^{N-1} a_k$

e os

$$b_{k+1} = d_{k+1} - \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Ou usando-se a Estrutura de Blocos Diagonais.

A matriz A , com os autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$, está construída.

EXEMPLO:

Sejam $N = 5$; $d_k = 4$, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = \lambda_4 = 2; \lambda_5 = 3.$$

$$a_1 = a_2 = 4 - 1 = 3; a_3 = a_4 = 4 - 2 = 2; d_5 = 3 - (3 \times 2 + 2 \times 2) = -7;$$

$$b_2 = d_2 - \lambda_1 = 4 - 1 = 3; b_3 = d_3 - \lambda_2 = 4 - 1 = 3; b_4 = d_4 - \lambda_3 = 4 - 2 = 2; b_5 = d_5 - \lambda_4 = -7 - 2 = -9.$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & -9 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & -9 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & -9 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores: } \lambda_1 = 4 - 3 = 1; \lambda_2 = 4 - 3 = 1; \lambda_3 = 4 - 2 = 2; \\ \lambda_4 = 4 - 2 = 2; \lambda_5 = (2 \times 3 + 2 \times 2 - 7) = 3, \quad ; \\ \text{como era de se esperar.} \end{array}$$

b) Para as matrizes $C \in \mathcal{C}$.

Se se deseja que C sendo inteira, tenha autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$, inteiros, então $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = Nc_1$. Daí, c_1 será inteiro se

$\sum_{k=1}^N \lambda_k$ for múltiplo (negativo ou positivo) de N ou for zero. Então:

- Escolhe-se a ordem N de C .
- Escolhem-se os autovalores λ_k , $k=1, 2, \dots, N$ tais que sua soma seja múltiplo, negativo ou positivo, de N ou for zero.
- obtém-se $c_1 = \left(\sum_{k=1}^N \lambda_k \right) / N$ (c_1 é inteiro).
- obtém-se $c_{k+1} = c_1 - \lambda_k$, $k=1, 2, \dots, N-1$.
- A sequência geradora de C , $SG_C = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ está obtida.
- A matriz C pode ser montada.

EXEMPLO:

$N=5$; $\lambda_1=2$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=3$; $\lambda_4=5$; $\lambda_5=4$.

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = (2 + 1 + 3 + 5 + 4) = 15$$

$$c_1 = 15/5 = 3;$$

$$c_2 = c_1 - \lambda_1 = 3 - 2 = 1; c_3 = c_1 - \lambda_2 = 3 - 1 = 2; c_4 = c_1 - \lambda_3 = 3 - 3 = 0;$$

$$c_5 = c_1 - \lambda_5 = 3 - 5 = -2.$$

$$SG_C = \{3, 1, 2, 0, -1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 3 - 1 = 2; \lambda_2 = 3 - 2 = 1; \lambda_3 = 3 - 0 = 3; \\ \lambda_4 = 5; \lambda_5 = (1 + 2 + 0 - 2 + 3) = 4 \end{array}$$

Observação: Se não se exige que, sendo os autovalores inteiros, C seja inteira, então não há restrições para a construção de C e procede-se de modo semelhante.

Se se deseja construir A ou C , com prefixado determinante D , escolhem-se λ_k , $k=1, 2, \dots, N$, tais que

$$\prod_{k=1}^N \lambda_k = D$$

e procede-se de modo análogo aos casos a) e b) anteriores.

EXEMPLO:

- Escolhe-se a ordem N de A , $N = 5$.
Construção de $A \in \mathcal{A}$, com determinante, $\det. A = 25$.
- Escolhem-se λ_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$, tais que

$$D = \prod_{k=1}^5 \lambda_k. \text{ Por exemplo:}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 5; \lambda_4 = 5; \lambda_5 = 1.$$

Daí, procedendo como no caso a), obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & -9 \\ 2 & 3 & 6 & -1 & -9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -9 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 3 - 2 = 1; \lambda_2 = 4 - 3 = 1; \lambda_3 = 6 - 1 = 5; \lambda_4 = 4 + 1 = 5; \\ \lambda_5 = (2 + 3 + 1 - 1 + -4) = 1; \det. A = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25 \end{array}$$

Para se obter C , com $\det. C = 25$, escolhem-se:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 5; \lambda_3 = -5; \lambda_4 = -1; \lambda_5 = 1;$$

$$\text{Daí } c_1 = (1/5) = 0,2$$

$$c_2 = c_1 - \lambda_1 = 0,2 - 1 = -0,8; c_3 = c_1 - \lambda_2 = 0,2 - 5 = -4,8; c_4 = 0,2 + 5 = 5,2$$

$$c_5 = 0,2 + 1 = 1,2$$

$$SG_C = \{0,2; -0,8; -4,8; 5,2; 1,2\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 & -4,8 & 5,2 & 1,2 \\ -0,8 & 0,2 & -4,8 & 5,2 & 1,2 \\ -0,8 & -4,8 & 0,2 & 5,2 & 1,2 \\ 0,8 & -4,8 & 5,2 & 0,2 & 1,2 \\ -0,8 & -4,8 & 5,2 & 1,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 0,2 + 0,8 = 1; \lambda_2 = 0,2 + 4,8 = 5 \\ \lambda_3 = 0,2 - 5,2 = -5; \lambda_4 = 0,2 - 1,2 = -1 \\ \lambda_5 = -0,8 - 4,8 + 5,2 + 1,2 + 0,2 = 1 \end{array}$$

$$\det. C = 1 \cdot 5 \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 1 = 25$$

5.3. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$, de qualquer ordem N ($N \geq 2$, inteiro), que sejam garantidamente não singulares. (Capítulo II)

ALGORÍTMO:

- Escolhe-se a ordem N de A .
- Escolhem-se os elementos diagonais d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, números quaisquer, de A

- Escolhem-se os a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, $a_k \neq d_k$
- Escolhe-se $d_N \neq -\sum_{k=1}^{N-1} a_k$
- Calculam-se os $b_{k+1} = a_k + d_{k+1} - d_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ (ou usando-se a Estrutura de Blocos Diagonais).

A matriz $A \in \mathcal{A}$, não singular, está construída.

EXEMPLO:

Sejam $N = 5$, $d_1 = d_2 = 3$; $d_3 = d_4 = 5$.

$$a_1 = 1 \neq d_1; a_2 = -1 \neq d_2; a_3 = 2 \neq d_3; a_4 = 1 \neq d_4$$

$$d_5 = 5 \neq -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = -3$$

$$b_2 = a_1 + d_2 - d_1 = 1 + 3 - 3 = 1; b_3 = -1 + 5 - 3 = 1; b_4 = 2 + 5 - 5 = 2;$$

$$b_5 = 1 + 5 - 5 = 1.$$

Então:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ Esta matriz é não singular pois seus autovalores são:}$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 3; \lambda_4 = 4; \lambda_5 = 8. \text{ (todos diferentes de zero).}$$

Usando-se alternativamente a Estrutura de BLOCOS DIAGONAIS para-se obter b_2 , b_3 , b_4 e b_5 , e se concluir a construção de A :

$$\begin{pmatrix} 3 & \cdot & & & \\ 1 & 3 & \cdot & & \\ & -1 & 5 & \cdot & \\ & & 2 & 5 & \cdot \\ & & & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & 5 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 5 & 1 \\ \cdot & \cdot & & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Observação: Se se deseja que $A \in \mathcal{A}$, seja inteira, escolhem-se os d_k e os a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, inteiros. Consequentemente, serão inteiros os autovetores, λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$; o determinante, $\det.A$ e os autovalores de A .

5.4. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$, de qualquer ordem N ($N \geq 2$, inteiro) que sejam seguramente não singulares (Capítulo III).

ALGORITMO:

- Escolhe-se a ordem N de C .

- Escolhe-se o elemento c_1 .

- Escolhem-se os c_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$, tais que $c_{k+1} \neq c_1$ e $\sum_{j=1}^N c_j \neq 0$.

(Se se deseja que C seja inteira, escolhem-se os c_k , $k = 1, 2, \dots, N$, inteiros. Então, serão inteiros seus autovalores e autovetores, bem como o seu determinante,

$\det.C$. Nesse caso, $\sum_{k=1}^N \lambda_j$, isto é, a soma de seus autovalores será múltiplo negativo ou positivo de N ou será zero).

- Constroe-se a $SG_C = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, a sequência geradora de C .
A matriz C pode ser montada.

EXEMPLO.

Sejam $N = 6$, $c_1 = 3$;

$$c_2 = 4 \neq c_1; c_3 = 1 \neq c_1; c_4 = 2 \neq c_1; c_5 = -2 \neq c_1; c_6 = -6; \sum_{j=1}^6 c_j = 2 \neq 0.$$

$$SG_C = \{3, 4, 1, 2, -2, -6\}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -2 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & -2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 5; \lambda_5 = 9; \lambda_6 = 2 \\ \text{(todos diferentes de zero)} \\ \det.C = (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 = -180 \end{array}$$

5.5. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$ cujos problemas de autovalores sejam facilmente solucionáveis.

ALGORITMO

a) Matrizes $A \in \mathcal{A}$.

- Escolhe-se a ordem N de A .
- Escolhem-se os elementos diagonais d_k , $k = 1, 2, \dots, N$, que podem ser números quaisquer.
- Escolhem-se os elementos subdiagonais: a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, que podem ser números quaisquer.
- Calculam-se os elementos supradiagonais, $b_{k+1} = a_k + d_{k+1} - d_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ (ou usa-se a Estrutura de Blocos Diagonais). A matriz está construída.
- Calculam-se os autovalores:

$$\lambda_k = d_k - a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\lambda_N = S_A = d_N + \sum_{k=1}^{N-1} a_k$$

- Calculam-se os autovetores pelas relações (2.2.3.1), Capítulo II, item 2.2.3. Está resolvido o problema de autovalores de $A \in \mathcal{A}$.

EXEMPLO:

Sejam $N=5$, $d_1 = d_2 = 3$; $d_3 = 4$; $d_4 = 2$; $d_5 = 7$
 $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 5$; $a_4 = 3$.

Usando a Estrutura de Blocos Diagonais, concluímos a construção de A :

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ & 2 & 4 & & \\ & & 5 & 2 & \\ & & & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & & \\ & 2 & 4 & 3 & \\ & & 5 & 2 & 8 \\ & & & 3 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Autovalores: $\lambda_1 = 3 - 1 = 2$; $\lambda_2 = 3 - 2 = 1$; $\lambda_3 = 4 - 5 = -1$; $\lambda_4 = 2 - 3 = -1$
 $\lambda_5 = 1 + 2 + 5 + 3 + 7 = 18$.

$$\det A = \prod_{k=1}^5 \lambda_k = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 18 = 36$$

Autovetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}; \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificação:

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5] = \begin{bmatrix} 15 & 14 & 11 & 8 & 1 \\ -1 & 14 & 11 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & 11 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & 8 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & -11 & 1 \end{bmatrix}, \text{ temos}$$

$$AV = V \cdot (\lambda I), \text{ onde } \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

b) Matriz $C \in \mathcal{C}$

- Escolhe-se a ordem N de C .
- Escolhe-se a SG_C .
- Monta-se a matriz C .
- Calculam-se seus autovalores e determinante.

$$\lambda_k = c_1 - c_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N-1; \quad \lambda_N = \sum_{k=1}^N c_k$$

- Calculam-se os autovetores de C (relações 4.2.5, Capítulo IV, item 4.2.).
Está resolvido o problema de autovalores de C .

EXEMPLO

Sejam $N = 5$; $SG_C = \{2, 3, 4, 1, -1\}$

Então:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Autovalores:}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 - c_2 = 2 - 3 = -1; \quad \lambda_2 = 2 - 4 = -2; \\ \lambda_3 &= 2 - 1 = 1; \quad \lambda_4 = 2 + 1 = 3 \\ \lambda_5 &= 3 + 4 + 1 - 1 + 2 = 9 \end{aligned}$$

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 = (-1) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 = 54$$

Autovetores (usam-se as relações (4.2.5), Capítulo IV, item 4.2):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pode-se verificar que:

$$CV = C \cdot (\lambda I), \text{ onde}$$

$$V = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5] \text{ e } \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

5.6. Construção de matriz $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$, com pré-determinada característica R ($1 \leq R \leq N$, inteiro). Capítulo II, item 2.2.7).

ALGORITMO

a) Matriz $A \in \mathcal{A}$.

- Escolhe-se a ordem de $\mathcal{A}$ e a característica R que A deva ter ($1 \leq R \leq N$, inteiro).
- Usa-se o ALGORITMO 2, item 2.2.7.2, Capítulo II.

EXEMPLO:

Sejam $N=5$, $d_1 = d_2 = d_3 = 4$; $d_4 = 5$; $R = 3$; $N - R = 5 - 3 = 2$

- Escolhemos a_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, tais que:

$$a_j = d_j, j = 1, 2, \dots, N - R; \quad b_k = d_{k+1}, k = 1, 2, \dots, N - R.$$

$$a_j \neq d_j, j = 3, 4, 5:$$

- Escolhemos d_5 , tal que:

$$d_5 \neq - \left(\sum_{j=1}^2 d_j + \sum_{j=3}^4 a_j \right) \text{ e } d_5 \neq - \sum_{j=3}^4 a_j$$

- Usando a Estrutura de Blocos Diagonais, calculamos os restantes b_{k+1} , $k = 3, 4, 5$.

$$a_1 = 4; a_2 = 4; a_3 = 2 \neq d_3; a_4 = 3 \neq d_4$$

$$d_5 \neq -[(d_1 + d_2) + (a_3 + a_4)] = -(8 + 5) = -13$$

$$d_5 \neq -(a_3 + a_4) = -5. \text{ Pomos } d_5 = 10.$$

Usando a Estrutura de Blocos Diagonais, montamos $A \in \mathcal{A}$, com característica $R = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 4 & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 & 4 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 5 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 4 & 4 & 4 & 3 & 8 & & & \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 8 & & & \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 8 & & & \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 8 & & & \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 10 & & & \end{array} \right) = A$$

A sub-matriz destacada $A_{(3)}$ tem determinante, $\det.A_{(3)} = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 60 \neq 0$. As de ordens maiores que 3 são singulares.

É conveniente, para ocultar a transparência da característica R exibida por A , aplicar-lhe as seguintes operações, que preservam a sua característica:

- permutações de linhas (ou colunas).
- adição a uma linha (ou coluna) de outra linha (ou coluna) multiplicada por fator $\alpha \neq 0$.
- tomar a transposta.

Assim, vamos aplicar a A , em sequência as seguintes operações:

a) adicionar à 1ª linha a 4ª.

b) adicionar à 2ª linha, da matriz resultante, a 5ª multiplicada por 2.

c) aplicar às colunas da matriz resultante a permutação P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

d) adicionar à 1ª coluna a 2ª, da matriz resultante.

Daí, resulta a matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 8 & 16 & 6 \\ 20 & 8 & 12 & 28 & 9 \\ 8 & 4 & 4 & 8 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

com a mesma característica $R = 3$ de A, mas muito menos aparente que em A.

b) Matriz $C \in \mathcal{C}$

- Escolhe-se a ordem N de C e a característica R ($1 \leq R \leq N$, inteiro) que C deva ter.
- Escolhe-se os elementos $c_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N$ tais que:
os $N - R + 1$ deles sejam iguais entre si:
 $c_1 = c_2 = \dots = c_{N-R+1}$;
os restantes $R - 1$ deles, $c_{N-R+2}, c_{N-R+3}, \dots, c_N$ sejam diferentes dos $N-R+1$ primeiros.
- Monta-se a $SG_C = \{c_1, c_1, \dots, c_1, c_{N-R+2}, c_{N-R+3}, \dots, c_N\}$

A matriz gerada por SG_C terá as $N-R+1$ primeiras linhas iguais entre si, bem como as $N-R$ primeiras colunas. Assim, os $N-R$ primeiros autovalores serão iguais a zero e os restantes R , diferentes de zero. A sub-matriz de C constituída das R últimas linhas e das R últimas colunas de C será não singular e nenhuma outra sub-matriz de ordem maior que R será não singular. Daí, a característica de C é R .

EXEMPLOS.

1. $N = 6$; $R = 3$; $N - R = 3$; $N-R+1 = 4$; $R - 1 = 2$.

$$SG_C = \{c_1, c_1, c_1, c_1, c_5, c_6\}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_5 & c_1 & c_6 \\ c_1 & c_1 & c_1 & c_1 & c_6 & c_1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de C são :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = c_1 - c_5 \neq 0; \lambda_5 = c_1 - c_6 \neq 0$$

$$\lambda_N = \sum_{k=1}^6 c_k \neq 0 \quad (c_k > 0, k = 1, 2, \dots, N)$$

A submatriz destacada C_3 é não singular pois seus autovalores:

$$\mu_1 = c_1 - c_5 \neq 0; \quad \mu_2 = c_1 - c_6 \neq 0; \quad \mu_3 = 2c_1 + c_6 \neq 0.$$

Logo, a característica de C é $R = 3$.

2. $N = 5$; $R = 2$; $N - R = 3$; $N - R + 1 = 4$; $R - 1 = 1$.
 $SG_C = \{3, 3, 3, 3, 5\}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & \bar{3} & \bar{5} \\ 3 & 3 & 3 & |5 & 3 \end{pmatrix}$$

A submatriz destacada é não singular e nenhuma outra submatriz de C, de ordem maior que 2, será não singular. Logo, a característica de C é $R = 2$.

Para que a característica de C não fique tão transparente, é conveniente transformá-la em outra matriz B, mediante a aplicação a C das operações definidas no subitem a) deste item 5.6, que preservam a característica de A.

Assim procedendo, obtemos:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & 14 & 14 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 5 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

- 5.7. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$, cujos problemas de inversão (cálculo de inversas) sejam facilmente solucionáveis (Capítulos III e IV).

ALGORITMO

- Escolhe-se a ordem N de A ou de C.
- Constroem-se A ou C não singulares (vide itens 5.3 e 5.4, deste Capítulo)
- Calculam-se os autovalores de A ou de C: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.
- Usando-se, respectivamente as relações (3.2.6) a (3.2.12), item 3.2, Capítulo III e as relações (4.4.1) a (4.4.7), item 4.4, Capítulo IV, obtêm-se os elementos, respectivamente, das inversas de $A \in \mathcal{A}$ e de $C \in \mathcal{C}$.

EXEMPLOS

1. Sejam $N = 5$ e a matriz A não singular, $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Autovalores:

$$\lambda_1 = 5 - 1 = 4; \quad \lambda_2 = 5 - 2 = 3; \quad \lambda_3 = 5 - 3 = 2; \\ \lambda_4 = 5 - 4 = 1; \quad \lambda_5 = 1 + 2 + 3 + 4 - 8 = 2$$

$$\det.A. = 4.3.2.1.2 = 48$$

Então, usando as relações (3.2.6) a (3.2.12), item 3.2, Capítulo II, obtemos:

$$w_1 = (\lambda_5 - a_1)/(\lambda_1 \lambda_5) = (2-1)/8 = 1/8 = 3/24$$

$$x_1 = w_1 - (1/\lambda_1) = 1/8 - 1/4 = (1-2)/8 = -1/8 = -3/24$$

$$w_2 = d_1/(\lambda_1 \lambda_5) + \left(\sum_{j=3}^5 b_j \right) / (\lambda_2 \lambda_5) = 5/8 - 4/6 = -1/24$$

$$x_2 = w_2 - 1/\lambda_2 = -1/24 - 1/3 = -9/24$$

$$y_2 = w_2 - 1/\lambda_1 = -1/24 - 1/4 = -7/24$$

$$w_3 = (d_1 + b_2)/(\lambda_2 \lambda_5) + (b_4 + b_5)/(\lambda_3 \lambda_5) = 6/6 - 6/4 = -1/2 = -12/24$$

$$x_3 = w_3 - 1/\lambda_3 = -1/2 - 1/2 = -1 = -24/24$$

$$y_3 = w_3 - 1/\lambda_2 = -1/2 - 1/3 = -5/6 = -20/24$$

$$w_4 = (d_1 + b_2 + b_3)/(\lambda_3 \lambda_5) + b_5/\lambda_4 \lambda_5 = 8/4 - 9/2 = -10/4 = -60/24$$

$$x_4 = w_4 - 1/\lambda_4 = -10/4 - 1 = -14/4 = -84/24$$

$$y_4 = w_4 - 1/\lambda_3 = -10/4 - 1/2 = -11/4 = -66/24$$

$$w_5 = (\lambda_5 - b_5)/(\lambda_4 \lambda_5) = (2 + 9)/2 = 11/2 = 132/24$$

$$y_5 = w_5 - 1/\lambda_4 = 11/2 - 1 = 9/2 = 108/24$$

Daí, $X = A^{-1}$:

$$A^{-1} = X = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -20 & -66 & 108 \\ -3 & -1 & -20 & -66 & 108 \\ -3 & -9 & -12 & -66 & 108 \\ -3 & -9 & -24 & -60 & 108 \\ -3 & -9 & -24 & -84 & 132 \end{pmatrix}; \quad \det.A^{-1} = 1/\det.A = 1/48$$

2. Sejam $N = 5$ e a matriz C não singular:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 4; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = 15. \end{array}$$

Então, usando as relações (4.4.1) a (4.4.7), item 4.4, Capítulo IV, obtemos:

$$C^{-1} = \frac{1}{180} \begin{pmatrix} 42 & 6 & 6 & 6 & -48 \\ -3 & 51 & 6 & 6 & -48 \\ -3 & -9 & 66 & 6 & -48 \\ -3 & -9 & -24 & 96 & -48 \\ -3 & -9 & -24 & -84 & 132 \end{pmatrix}$$

5.8. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ que sendo inteiras e inversíveis possuem inversas A^{-1} inteiras, explícitas ou facilmente explicitáveis (Capítulo III, item 3.3 e seguintes).

O problema foi exaustivamente analisado no Capítulo III, itens 3.3 a 3.6, inclusive com a apresentação de algoritmo, com um RECEITUÁRIO 1, que permite a construção da inversa A^{-1} de $A \in \mathcal{A}$, coluna após coluna, da primeira à última e exibe algumas escolhas dos autovalores que levam a matrizes cujas inversas são explícitas. Para cada escolha dos elementos diagonais d_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, pode-se construir 2^N tais matrizes, inteiras com inversas inteiras.

5.9. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$ que sendo inteiras inversíveis possuem inversas inteiras explícitas ou facilmente explicitáveis.

Também este problema mereceu tratamento especial no Capítulo IV, item 4.5, com destaque para o RECEITUÁRIO 2 que facilita a construção, passo a passo, das k -ésimas colunas de C^{-1} , $k = 1, 2, \dots, N$. O número de tais matrizes, inteiras com inversas inteiras é:

$(N-1)! / ((N/2)!(N/2-1)!)$, onde N , a ordem da matriz C , é sempre um número par.

5.10. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}$ cujos menores principais sejam diferentes de zero ($\det A_k \neq 0$, onde A_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$, N , são as submatrizes principais de A).

Sabemos que A_k , $k = 1, 2, \dots, N$, as submatrizes principais de $A \in \mathcal{A}$ também pertencem a $\mathcal{A}$.

Para se construir matriz $A \in \mathcal{A}$ tal que $\det A_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, procede-se da seguinte forma:

ALGORITMO.

- Escolhe-se $d_1 \neq 0$.
- Escolhe-se a_1 e d_2 tais que $d_1 - a_1 \neq 0$ e $a_1 + d_2 \neq 0$;

- Calcula-se $b_2 = a_1 + d_2 - d_1$:
- Escolhe-se a_2 e d_3 tais que $d_2 - a_2 \neq 0$ e $a_1 + a_2 + d_3 \neq 0$;
Calcula-se $b_3 = a_2 + d_3 - d_2$. E assim por diante.
 - Escolhe-se a_k, d_{k+1} , tais que $d_k - a_k \neq 0$ e $a_1 + a_2 + \dots + a_k + d_{k+1} \neq 0$;
Calcula-se $b_{k+1} = d_k - a_k$;
 $k = 1, 2, \dots, N-1$.

A matriz A, assim construída:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{d_1} & \underline{b_2} & \underline{b_3} & \dots & \underline{b_{N-2}} & \underline{b_{N-1}} & \underline{b_N} \\ \underline{a_1} & \underline{d_2} & \underline{b_3} & \dots & \underline{b_{N-2}} & \underline{b_{N-1}} & \underline{b_N} \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \underline{d_3} & \dots & \underline{b_{N-2}} & \underline{b_{N-1}} & \underline{b_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \underline{a_3} & \dots & \underline{d_{N-2}} & \underline{b_{N-1}} & \underline{b_N} \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \underline{a_3} & \dots & \underline{a_{N-2}} & \underline{d_{N-1}} & \underline{b_N} \\ \underline{a_1} & \underline{a_2} & \underline{a_3} & \dots & \underline{a_{N-2}} & \underline{a_{N-1}} & \underline{d_N} \end{pmatrix}$$

é tal que $\det.A_1 = d_1 \neq 0$; $\det.A_k \neq 0$, $k = 2, 3, \dots, N$, pois seus autovalores:

$$\lambda_1^{(k)} = d_1 - a_1 \neq 0; \lambda_2^{(k)} = d_2 - a_2 \neq 0; \dots, \lambda_{k-1}^{(k)} = d_{k-1} - a_{k-1} \neq 0;$$

$$\lambda_k^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1} a_j + d_k \neq 0.$$

EXEMPLO

Sejam $N = 5$;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} 3 &\neq 0; \det.A_2 = (3-2).(2+2) = 4; \\ \det.A_3 &= (3-2)(2-1)(2+1+3) = 6; \\ \det.A_4 &= (3-2)(2-1)(3+1).6 = 24 \\ \det.A_5 &= \det.A = (3-2)(2-1)(3+1)(4-1).5 = 60 \end{aligned}$$

As matrizes A tais que seus menores principais são todos diferentes de zero, são decomponíveis em produto $A = LU$, onde L é a matriz triangular inferior e U, triangular superior. Então, a possibilidade de se construir matrizes $A \in \mathcal{A}$, com $\det.A_k \neq 0$, é de interesse.

5.11. Construção de matrizes $C \in \mathcal{C}$ cujos menores principais ($\det.C_k \neq 0$, onde C_k , $k = 1, 2, \dots, N$ são as submatrizes principais de C).

Sabe-se que se $C \in \mathcal{C} \rightarrow C_k \in \mathcal{C}$, $k = 1, 2, \dots, N$.

ALGORÍTMO.

- Escolhe-se a ordem N de C ,
- Escolhe-se $c_1 \neq 0$,
- Escolhe-se c_{k+1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$ tais que $c_1 - c_k \neq 0$; $c_1 + c_2 + \dots + c_{k+1} \neq 0$;
- A $SG_C = \{c_1, c_2, \dots, c_{N-1}, c_N\}$ assim construída gera matriz $C \in \mathcal{C}$ cujos menores principais, $\det.C_k$ são diferentes de zero, $k = 1, 2, \dots, N$.

EXEMPLO

Sejam $N = 5$ e $SG_C = \{3, 4, 2, 1, 5\}$

$$C = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{4} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{5} \\ \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{5} \\ \underline{4} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{1} & \underline{5} \\ \underline{4} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{3} & \underline{5} \\ \underline{4} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{5} & \underline{3} \end{pmatrix}$$

$\det.C_1 = 3 \neq 0$; $\det.C_2 = (3-4) \cdot (4+3) = -7 \neq 0$; $\det.C_3 = (3-4)(3-2)(4+2+3) = -9 \neq 0$.
 $\det.C_4 = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10 = -20 \neq 0$; $\det.C_5 = \det.C_5 = \det.C = (1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 15 = 60 \neq 0$.

5.12. Construção de matriz $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$, que sejam decomponíveis em produtos $A = LU$, $C = LU$, onde L é a matriz triangular inferior e U , triangular superior.

Vide itens 5.9 e 5.10, acima. Sabe-se que a condição para que exista tal decomposição é que as suas matrizes de $A \in \mathcal{A}$ ou $C \in \mathcal{C}$ sejam todas não singulares: $\det.A_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, N$.

5.13. Construção de sistemas lineares algébricos, de N equações a N incógnitas ($N \geq 2$, inteiro) cuja solução é previamente estabelecida.

Consideremos o sistemas linear algébrico:

$$AX = B \quad (5.13.1)$$

onde A , matriz não singular de ordem N , é a matriz dos coeficientes do sistema; X , matriz coluna $N \times 1$, é a matriz solução do sistema, $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1} \ x_N)^t$ e B , matriz coluna $N \times 1$, é a “matriz dos termos conhecidos”, $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{N-1} \ b_N)^t$.

Para construir sistema linear algébrico, tal que se conheça previamente sua solução X , procedemos da seguinte maneira.

ALGORITMO

- Escolhe-se a ordem N de A .
- Constroe-se $A \in \mathcal{A}$, não singular.
- Anote-se o N -ésimo autovalor λ_N de A .
- Faz-se $B = (\alpha \ \alpha \ \alpha \ \dots \ \alpha \ \alpha)$, onde os N elementos iguais a α de B são números quaisquer.

- A solução $X = A^{-1} B$ do sistema (5.12.1) é:

$$X = (\mu_N \alpha \quad \mu_N \alpha \quad \dots \quad \mu_N \alpha \quad \mu_N \alpha) \quad (5.13.2)$$

onde $\mu_N = 1/\lambda_N$ é o N-ésimo autovalor de A^{-1} .
($\lambda_N \neq 0$).

De fato, $\mu = S$ é a soma fixa dos elementos de cada linha de A^{-1} . Assim, o produto de cada linha de A^{-1} por B é a matriz X definida em (5.12.2).

Observação: Não é necessário que conheça A^{-1} . Basta que se saiba que existe e o valor μ_N de seu N-ésimo autovalor, $\mu_N = 1/\lambda_N$, onde $\lambda_N \neq 0$ é o N-ésimo autovalor de A , $\lambda_N = S_A$, soma dos elementos de cada linha de A .

EXEMPLOS:

1. Sejam $N = 5$;

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = 2; \quad \mu_5 = 1/2; \quad B = (4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4)^t$$

$$X = (\mu_5 \cdot 4 \quad \mu_5 \cdot 4 \quad \mu_5 \cdot 4 \quad \mu_5 \cdot 4 \quad \mu_5 \cdot 4)^t = (2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2).$$

O sistema

$AX = B$ tem solução $X = (2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2)^t$, como se pode verificar, efetuando o produto AX , obtém-se:

$$AX = B.$$

Se a matriz escolhida $A \in \mathcal{A}$ for inteira, com inversa inteira e se $B = (\alpha \ \alpha \ \dots \ \alpha \ \alpha)^t$ é a matriz de N elementos iguais a α , então a matriz solução será: $X = (\lambda_N \alpha \ \lambda_N \alpha \ \dots \ \lambda_N \alpha)$ de vez que $\mu_N = \lambda_N$, com $\lambda_N = \pm 1$.

2. Sejam $N = 5$; $B = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3)^t$ e A , matriz inteira com inversa inteira:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = 1$$

$$X = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3)^t = (3\lambda_5 \ 3\lambda_5 \ 3\lambda_5 \ 3\lambda_5 \ 3\lambda_5)^t$$

é a solução do sistema $AX = B$.

Se se preferir usar matriz não singular $C \in \mathcal{C}$, monta-se a SG_C tal que $c_{k+1} \neq c_1$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ e $\sum_{j=1}^N c_j \neq 0$, e então: $\lambda_N = \sum_{j=1}^N c_j$.

3. Sejam $N = 5$; $SG_C = \{2, 3, 1, -1, 4\}$

$$B = (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3)^t$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \lambda_5 = 9 \text{ (N-esimo autovalor de C)} \\ \mu_5 = 1/9 \text{ (N-esimo autovalor de } C^{-1}) \\ X = (1/9) \cdot (3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3)^t = (1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/3)^t. \end{array}$$

A solução do sistema $CX = B$ é $X = (1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/3)^t$.

5.14. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}_t$ simétricas definidas positivamente e, portanto, decomponíveis em produto $A = S^t S$, onde S é matriz triangular superior e S^t , a transposta de S . (Capítulo IV, item 4.6.6).

ALGORITMO

- Escolhe-se a ordem N de $A \in \mathcal{A}_t$.
- Escolhe-se $d > 0$.
- Escolhe-se a tal que $d - a > 0$ e
- $d + (k-1)a > 0$, $k = 2, 3, \dots, N$.

A matriz simétrica A :

$$A = \begin{pmatrix} d & a & a & \dots & a & a & a \\ a & d & a & \dots & a & a & a \\ a & a & d & \dots & a & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & d & a & a \\ a & a & a & \dots & a & d & a \\ a & a & a & \dots & a & a & d \end{pmatrix}$$

será definida positiva, pois seus menores principais $\det A_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ serão todos positivos.

Na verdade, basta que se escolha $d > 0$ e $a > 0$, tais que $d - a > 0$ que teremos $d + (k-1)a > 0$, $k = 2, 3, \dots, N$.

EXEMPLO

$N = 6$; $d = 5$; $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{5} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{2} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{5} & \underline{2} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{5} & \underline{2} \\ \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{2} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det.A_1 &= 5 > 0; \det.A_2 = (5-2)(2+5) = 21 > 0; \det.A_3 = (5-2)^2 \cdot (4+5) = 81 > 0 \\ \det.A_4 &= (5-2)^3 (6+5) = 297 > 0; \det.A_5 = (5-2)^4 (8+5) = 1053 > 0 \\ \det.A_6 &= \det.A = (5-2)^5 (10+5) = 3645 > 0. \end{aligned}$$

5.15. Construção de matrizes $A \in \mathcal{A}_n$, cujos problemas de autovalores e de inversão são facilmente solucionáveis. Na verdade, são explícitos os autovalores, os autovetores, os determinantes e as inversas (quando existem).
(Capítulo IV, item 4.6 e subitens 4.6.1 a 4.6.5)

EXEMPLOS

1. Sejam $N = 5$; $d = 4$; $a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda = 4 - 2 = 2, \text{ de multiplicidade } 4 \\ \mu = 4 \times 2 + 4 = 12 \\ \det.A = 2^4 \cdot 12 = 192. \end{array}$$

Autovetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como se pode verificar efetuando os produtos:

$$AV = V(\lambda I)$$

onde:

$$V = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

A é diagonalisável, pois V é não singular e se tem:

$$\lambda I = V^{-1} A V \quad (\text{vide item 4.6.3, capítulo IV}),$$

$$\text{onde } V^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.16. Construção de matrizes e de sistemas lineares algébricos mal condicionados.

Uma matriz A não singular, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) se diz mal condicionada se seu número de condição, $\text{cond}(A)$, é muito elevado. Um sistema linear $Ax = b$ se diz mal condicionado se a matriz A dos coeficientes das equações do sistema é mal condicionada.

O número de condição de A, $\text{cond}(A)$, é definido por:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (A, \text{ não singular})$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma de matriz.

Se se usa a norma euclideana, $\text{cond}(A)$ se exprime por:

$$\text{cond}(A) = \mu/\lambda$$

onde μ, λ são, respectivamente, o maior e o menor valores singulares de A.

Valores singulares de matriz A são definidos como as raízes quadradas não negativas dos autovalores de $A A^*$ (no caso real, $A A^t$). Assim, os valores singulares de A são necessariamente números reais não negativos. Se A é simétrica, seus valores singulares são os valores absolutos de seus autovalores. Desse modo, $\text{cond}(A) \geq 1$.

Como vamos ver, um sistema mal condicionado é aquele em que pequenas perturbações nos elementos da matriz A ou nos componentes do vetor b podem acarretar grandes perturbações nas soluções (no vetor x das soluções) do sistema.

Pode-se mostrar que a perturbação relativa na solução do sistema $\|\Delta x\|/\|x\|$, se exprime por:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \text{ou} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\mu/\lambda) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

onde $\|\Delta b\|/\|b\|$ é a perturbação relativa em b .

Vamos construir matriz $A \in \mathcal{A}_1$ (A , matriz simétrica), de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) e sistemas lineares algébricos $Ax = b$ em que A pode ter número de condição, $\text{cond}(A)$, muito grande.

Seja $A \in \mathcal{A}_1$, com:

$$d = 10^r; a = 10^r - 10^{-s}$$

onde r, s são números inteiros não negativos.

Então A tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 10^r & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & \dots & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} \\ 10^r - 10^{-s} & 10^r & 10^r - 10^{-s} & \dots & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} \\ 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & 10^r & \dots & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & \dots & 10^r & 10^r - 10^{-s} \\ 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & 10^r - 10^{-s} & \dots & 10^r - 10^{-s} & 10^r \end{pmatrix} \quad (5.16.1)$$

Os valores singulares de A (que, no caso, coincidem com os seus autovalores) são:

$$\lambda = d - a = 10^{-s}$$

$$\mu = d + (N-1)a = 10^r + (N-1)(10^r - 10^{-s}) = N \cdot 10^r - (N-1)10^{-s}$$

Então:

$$\text{cond}(A) = (\mu/\lambda) = N(10^{r+s}) - (N-1).$$

EXEMPLO:

Sejam $N = 4$; $r = s = 2$. Então:

$$\text{Cond}(A) = 4 \cdot 10^4 - 3 = 39997.$$

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99,99 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 100 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 100 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 99,99 & 100 \end{pmatrix}$$

Consideremos o sistema linear $Ax = b$, com A dada acima e

$$b = (399,97 \quad 399,97 \quad 399,97 \quad 399,97)^t = (\mu, \mu, \mu, \mu)^t.$$

A solução deste sistema, de acordo com o item 5.13, é:

$$x = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t.$$

Vamos dar a b a perturbação $\Delta b = (-0,01 + 0,01 - 0,01 + 0,01)$.

Então $b + \Delta b = (399,96 \ 399,98 \ 399,96 \ 399,98)$.

A solução $\bar{x}$ do sistema, com esta perturbação em b ,

$A \bar{x} = b + \Delta b$ é (com oito decimais exatas):

$$\bar{x} = (0 \ 2 \ 0 \ 2)$$

Então

$$x - \bar{x} = \Delta x = (1 \ -1 \ 1 \ -1) \text{ para } \Delta b = (-0,01 + 0; \ 01 - 0,01 + 0,01)$$

Usando a norma euclideana, temos:

$$\|\Delta x\| = 2; \ \|\Delta b\| = 0,02$$

$$\|x\| = 2; \ \|b\| = 799,94$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1; \ \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 0,000025; \ (\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|) = 39997.$$

Ou seja, para uma perturbação relativa em b de 0,000025 tivemos uma perturbação relativa em x de 1, ou seja, 39997 vezes maior.

Como se vê, o sistema é altamente mal condicionado e a matriz A , que tem esse elevado número de condição é também dita mal condicionada, com respeito à solução do sistema linear, $Ax = b$.

A transparência do mau condicionamento do sistema depende de convenientes escolhas de Δb . No caso, Δb foi escolhido tal que Δb fosse ortogonal a b .

Se, por exemplo escolhermos $\Delta b = (0,01 \ 0,01 \ 0,01 \ 0,01)^t$ em que as perturbações se fizerem todas num mesmo sentido, com as componentes Δb , respectivamente, de mesmo sinal que as de b , ou todas de sinal contrário às de b , nada de anormal ocorreria:

De fato, nesse caso, temos, de acordo com o item 5.13:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1,000025 \ 1,000025 \ 1,000025 \ 1,000025)^t \\ &= (1 + 0,01/\mu \ 1 + 0,01/\mu \ 1 + 0,01/\mu \ 1 + 0,01/\mu)^t. \end{aligned} \text{ Daí,}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 0,000025; \ \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 0,000025$$

$$(\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|) = 1.$$

Logo, a perturbação em x foi idêntica à perturbação em b . Assim, para esta escolha de Δb , o sistema se comportou muito bem.

Se fizermos $\Delta b = (-0,01 \ -0,01 \ -0,01 \ -0,01)^t$,

teremos $\Delta x = -(0,0000251 \ 0,0000251 \ 0,0000251 \ 0,0000251)^t$.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 0,0000251; \quad \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{0,02}{799,94}$$

$$(\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|) = 1,004.$$

Tivemos, praticamente, em x a mesma perturbação que em b .
O sistema, também desta vez, se comportou muito bem.

A relação $(\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|)$ varia de 1 a $\text{cond}(A)$, podendo atingir qualquer valor entre esses dois extremos, como vimos no exemplo acima.

Observação: A escolha de matriz simétrica $A \in \mathcal{A}_n$, da forma (5.16.1), deveu-se ao fato de ser muito fácil a explicitação de seus valores singulares, que coincidem com seus autovalores (que são explícitos) e, portanto, também muito facilmente explicitável seu número de condição, $\text{cond}(A)$, qualquer que seja a ordem N de A .

Além disso, a solução x do problema linear $Ax = b$, nestes casos, com $A \in \mathcal{A}_n$, da forma (5.16.1) é muito simples (vide item 5.1.12, acima):

a) Se as componentes de b são iguais entre si, a solução x é dada por:

$$x = (1/\mu) b$$

onde μ é o maior valor singular de A (ou seu maior autovalor).

b) Se, ao contrário, são diferentes as componentes de b , então:

$$x = A^{-1} b.$$

Como A^{-1} é explícita, x é obtido por mera multiplicação de matriz por vetor. (vide item 4.6.4, Capítulo IV).

EXEMPLO:

Sejam $r = s = 2$; $N = 6$.

Então: $d = 10^2 = 100$; $a = 10^2 - 10^2 = 99,99$.

$$\mu = d + (N-1) a = 100 + 5(99,99) = 599,95.$$

$$\lambda = 10^{-s} = 0,01.$$

$$\text{Cond}(A) = (\mu/\lambda) = 59995.$$

$$\mu \cdot \lambda = N(10^{r-s}) - (N-1) 10^{-2s} = N - (N-1) 10^{-4} = 5,9995.$$

$$\mu - a = (N-1) 10^r - (N-2) 10^s = 499,96.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5,9995} \begin{bmatrix} 499,96 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 \\ -99,99 & 499,96 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 \\ -99,99 & -99,99 & 499,96 & -99,99 & -99,99 & -99,99 \\ -99,99 & -99,99 & -99,99 & 499,96 & -99,99 & -99,99 \\ -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & 499,96 & -99,99 \\ -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & -99,99 & 499,96 \end{bmatrix}$$

Consideremos os casos:

a) $b = (\mu \ \mu \ \mu \ \mu \ \mu)^t$ com os seis componentes iguais a μ .

Então $x = (1/\mu) (b) = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$.

Então $Ax = b$ tem a forma:

$$\begin{pmatrix} 100 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 100 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 100 & 99,99 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 99,99 & 100 & 99,99 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 100 & 99,99 \\ 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 99,99 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 599,95 \\ 599,95 \\ 599,95 \\ 599,95 \\ 599,95 \\ 599,95 \end{pmatrix}$$

com $x = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$.

$$b) \bar{b} = (b+0,01 \ b+0,01 \ b+0,01 \ b+0,01 \ b+0,01 \ b+0,01)^t = \\ (599,96 \ 599,96 \ 599,96 \ 599,96 \ 599,96 \ 599,96)$$

Então

$$\bar{x} = (1/\mu) (\bar{b}) \text{ tem as suas seis componentes iguais a } 1,0000167.$$

Daí, $\Delta x = \bar{x} - x$ tem as suas seis componentes iguais a 0,0000167.

Então, usando a norma euclideana:

$$\|\Delta x\| = 0,0000409; \ \|x\| = 2,4494897.$$

$$\|\Delta x\| / \|x\| = 0,0000166.$$

$$\|\Delta b\| = 0,0244948; \ \|b\| = 1469,5714,$$

Então, a perturbação relativa em x é a mesma que a perturbação relativa em b . Logo, o sistema se comporta bem.

$$\begin{aligned} \text{c) } \bar{b} &= (b-0,01 \quad b+0,01 \quad b-0,01 \quad b+0,01 \quad b-0,01 \quad b+0,01)^t = \\ &= (599,94 \quad 599,96 \quad 599,94 \quad 599,96 \quad 599,94 \quad 599,96)^t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então: } \Delta x &= A^{-1}(\Delta b) = A^{-1}(-0,01 \quad 0,01 \quad -0,01 \quad 0,01 \quad -0,01 \quad 0,01)^t \\ &= (-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1). \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \bar{x} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2)$$

Daí,

$$\|\Delta x\| = 2,4494897; \quad \|x\| = 2,4494897;$$

$$\|\Delta x\| / \|x\| = 1.$$

$$\|\Delta b\| = 0,0244948; \quad \|b\| = 1469,5714;$$

$$\|\Delta b\| / \|b\| = 0,000016668;$$

$$(\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|) = 59995 = \text{cond}(A).$$

Assim, para uma perturbação relativa de 0,000016668 em b , tivemos uma perturbação relativa em x de 1, ou seja, 59995 vezes maior. O sistema é altamente mal condicionado.

$$\text{d) } b = (599 \quad 599 \quad 599 \quad 599 \quad 599 \quad 599)^t$$

$$\Delta b = (-0,95 \quad -0,95 \quad -0,95 \quad -0,95 \quad -0,95 \quad -0,95)^t$$

$$\bar{x} = (1/\mu) \bar{b}. \text{ Então } \bar{x} \text{ tem as suas seis componentes iguais a } 0,9984165.$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = \frac{0,0038786}{2,4494857} = 0,0015834.$$

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \frac{2,3270153}{1469,5714} = 0,0015834.$$

A perturbação relativa em x é a mesma que a perturbação relativa em b . Logo, o sistema se comporta bem, apesar de ser grande a perturbação absoluta em b .

Às vezes se relaciona o mau condicionamento de uma matriz A ou sistema, $Ax = b$, ao fato de ser muito pequeno o determinante de A , $\det.A$.

De fato, no caso, $\det.A = (\lambda)^5 \cdot \mu = 5,9995 \times 10^{-8}$ é muito pequeno.

Por outro lado, pode-se construir $A \in \mathcal{A}_1$, simétrica, com número de condição elevada, que pode resultar em mau condicionamento do sistema $Ax = b$, com determinante, $\det.A$, muito grande. Por exemplo;

$$\begin{aligned} N &= 4; \quad d = 10000; \quad a = 9999. \\ \mu &= 10.000 + 3(9999) = 39.997. \\ \lambda &= 1; \quad \text{cond}(A) = 39.997. \\ \det.A &= 1^3 \times 39997 = 39997. \end{aligned}$$

A matriz A , no caso, tem número de condição elevado, $\text{cond}(A) = 39997$, que pode motivar o mal condicionamento de $Ax = b = (\mu \mu \mu \mu)^t$ e, no entanto, $\det.A$ não é pequeno.

Assim, $\det.A$ muito pequeno não pode ser considerado como fator determinante do mau condicionamento de uma matriz ou sistema linear:

$$\begin{aligned} \text{Seja } N &= 10; \quad d = 1; \quad a = 0,9. \\ \mu &= 10 - 9(0,1) = 9,1. \\ \lambda &= 0,1; \quad \text{cond}(A) = (\mu/\lambda) = 91. \\ \det.A &= (0,1)^9 \times 9,1 = 9,1 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

O número de condição de A é baixo, mas seu determinante, $\det.A$ é muito pequeno. A relação entre a perturbação relativa em x , devido a uma permutação relativa em b será, no máximo, de 91 vezes:

$$(\|\Delta x\| / \|x\|) / (\|\Delta b\| / \|b\|) \leq 91.$$

$$\text{Se } (\|\Delta b\| / \|b\|) = 0,001, \quad (\|\Delta x\| / \|x\|) \leq 0,091.$$

Como se vê, $\det.A$ muito pequeno não faz prever-se mau condicionamento do sistema $Ax = b$, nem determinante de A grande garante seu bom condicionamento.

Referência:

FORSYTHE & MOLER - Computer Solution of Linear Algebraic Systems. Prentice Hall [2-8], 1967.

5.17. Matrizes $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$ e $A_1 \in \mathcal{A}_1$ que sejam diagonalizáveis.

Matriz A , quadrada, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro) é diagonalizável, isto é, é similar a matriz diagonal D (ao longo de cuja diagonal estão os autovalores λ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ de A) se e somente se o espaço onde estão os elementos de A possui uma base constituída dos N autovetores de A . Ou, equivalentemente, se os N autovetores de A são linearmente independentes ou se a matriz V cujas colunas são esses autovetores é não singular. Tal base é chamada de autobase do espaço (eigenbasis).

I) Seja $A \in \mathcal{A}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro).

Sabemos que os autovetores de A , correspondentes aos autovalores $\lambda_k = d_k - a_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ e $\lambda_N = S_A$, são os vetores $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N$, definidos em (2.2.3.1), item 2.2.3, Capítulo II. Assim, a matriz V dos autovetores de A é:

$$V = \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^N b_k & \sum_{k=3}^N b_k & \sum_{k=4}^N b_k & \dots & b_N & 1 \\ -a_1 & \sum_{k=3}^N b_k & \sum_{k=4}^N b_k & \dots & b_N & 1 \\ -a_1 & -(a_1 + a_2) & \sum_{k=4}^N b_k & \dots & b_N & 1 \\ -a_1 & -(a_1 + a_2) & -(a_1 + a_2 + a_3) & \dots & b_N & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -(a_1 + a_2) & -(a_1 + a_2 + a_3) & \dots & b_N & 1 \\ -a_1 & -(a_1 + a_2) & -(a_1 + a_2 + a_3) & \dots & -\sum_{k=1}^{N-1} a_k & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar em que condições V é não singular e assim os vetores $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N$ constituam uma base (autobase) do espaço ($\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$).

Para isso, adicionamos, respectivamente, à 1ª, à 2ª, ..., à $(N-1)$ -ésima coluna de V a última, multiplicada por conveniente fator, de modo a tornar iguais a zero os elementos situados abaixo da diagonal principal de V , nas colunas 1, 2, ..., $N-1$. Usando as definições de λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ e de λ_N , obtemos a matriz triangular superior W , abaixo:

$$W = \begin{bmatrix} \lambda_N - \lambda_1 & \lambda_N - \lambda_2 & \lambda_N - \lambda_3 & \dots & \lambda_N - \lambda_{N-1} & 1 \\ 0 & \lambda_N - \lambda_2 & \lambda_N - \lambda_3 & \dots & \lambda_N - \lambda_{N-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_N - \lambda_3 & \dots & \lambda_N - \lambda_{N-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N - \lambda_{N-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N - \lambda_{N-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } \det.W = \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda_N - \lambda_k)$$

Daí, W será não singular, e consequentemente, também V (que é equivalente a W), se $\lambda_N \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Então os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_N$ serão uma autobase do espaço, se e somente se $\lambda_N \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Logo, é esta a condição para que A seja diagonalizável, ou seja, que existe V não singular tal que

$$D = V^{-1} A V$$

onde D é matriz diagonal ao longo de cuja diagonal estão os autovalores λ_k , $k= 1, 2, \dots, N$ de A e V é a matriz dos autovetores de A, correspondentes a esses autovalores.

Para se determinar a inversa V^{-1} de V, aplicamos à matriz identidade I_N a mesma sequência de operações elementares que aplicamos a V para obter I_N . Resulta, então, que V^{-1} é explícita. Pondo

$$V^{-1} = Y = \{y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N\}, \text{ temos:}$$

$$y_{ii} = \frac{1}{\lambda_N - \lambda_i}, i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_{NN} = \frac{b_N}{\lambda_N - \lambda_{N-1}};$$

$$y_{i, i+1} = -y_{ii}, i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_{Nj} = -x_{j-1} + x_j, j = 1, 2, \dots, N-1;$$

com

$$x_j = \frac{\sum_{k=1}^j a_k}{\lambda_N - \lambda_j} = -\frac{v_{Nj}}{\lambda_N - \lambda_j}, j = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$x_0 = 0;$$

$$y_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, N-2; j = i+2, \dots, N$$

$$y_{ij} = 0, i = 2, 3, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, i-1$$

Para $N = 5$, V^{-1} teria o seguinte aspecto:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_3} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_4} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_4} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & \frac{b_5}{\lambda_5 - \lambda_4} \end{pmatrix}$$

$$y_{51} = \frac{a_1}{\lambda_5 - \lambda_1}; y_{52} = -\frac{a_1}{\lambda_5 - \lambda_1} + \frac{a_1 + a_2}{\lambda_5 - \lambda_2};$$

$$y_{53} = -\frac{a_1 + a_2}{\lambda_5 - \lambda_2} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\lambda_5 - \lambda_3}; y_{54} = -\frac{a_1 + a_2 + a_3}{\lambda_5 - \lambda_3} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\lambda_5 - \lambda_4}$$

Os demais elementos são iguais a zero.

EXEMPLOS

1. Os autovalores são todos distintos. $N = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 3; \lambda_4 = 4; \\ \lambda_4 - \lambda_1 = 3 \neq 0; \lambda_4 - \lambda_2 = 2 \neq 0; \lambda_4 - \lambda_3 = 1 \neq 0 \end{array}$$

Logo, A diagonalizável:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 & \frac{-2}{1} \end{pmatrix}$$

$$y_{41} = \frac{1}{3}; y_{42} = -\frac{1}{3} + \frac{a_1 + a_2}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_{43} = -1 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\lambda_4 - \lambda_3} = -1 + 3 = 2$$

$$VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 2/3 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & - & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & & 0 & 3 & -3 \\ 4/3 & & 8/3 & 8 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

2. Sejam $N = 4$;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{Autovalores:}$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 2;$$

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 - \lambda_2 = -1.$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y_{41} = 1; \quad y_{42} = -1 + 2 = 1; \quad y_{43} = -2 - 1 = -3; \quad y_{44} = 2.$$

$$AV = VD;$$

$$D = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 2 \\ -1 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. $N = 4$. Os autovalores λ_k , $k = 1, 2, 3$, são iguais a 1 e $\lambda_4 = 2$.
Então:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1; \lambda_4 = 2 \\ \lambda_4 - \lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_2 = \lambda_4 - \lambda_3 = 1 \neq 0 \end{array}$$

Logo, A é diagonalizável.

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}; \quad A = VDV^{-1}$$

$$y_{41} = \frac{a_1}{\lambda_4 - \lambda_1} = 1; \quad y_{42} = -1 + \frac{a_1 + a_2}{\lambda_4 - \lambda_2} = -1 + 3 = 2; \quad y_{43} = -3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\lambda_4 - \lambda_3} = -3 + 6 = 3$$

Observação: Os exemplos 2 e 3, acima, evidenciam um caso geral: Se $A \in \mathcal{A}$ é inteira, tal que seus autovalores $\lambda_k, k=1, 2, \dots, N-1, N$ satisfazem:

$$\lambda_N - \lambda_j = \pm 1, \quad j=1, 2, \dots, N-1,$$

então A é diagonalizável e a matriz V que transforma A em D (onde D é matriz diagonal, tal que $A = V^{-1}DV$) é matriz inteira com explicita inversa inteira V^{-1} .

4. Se alguns ou todos os autovalores $\lambda_k, k=1, 2, \dots, N-1$, de $A \in \mathcal{A}$, coincidem com λ_N , então A não é diagonalizável, pois a matriz V de seus autovetores é singular e, portanto, não inversível. Neste caso, A pode ser transformada em forma canônica de Jordan, J. Isto é, existe matriz T não singular tal que $AT = TJ$. Por exemplo:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Os autovalores de A são:} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1. \\ \text{Portanto, } \lambda_4 - \lambda_k = 0, \quad k=1, 2, 3. \end{array}$$

Logo, A não é diagonalizável. Podemos, porém, transformá-la em matriz J e obter T não singular tal que:

$$AT = TJ$$

mediante o seguinte procedimento:

- a) Por meio de operações elementares sobre a matriz $A - \lambda I$, chegamos a matriz polinomial diagonal $B(\lambda)$, ao longo de cuja diagonal estão os polinômios invariantes de A:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix} = B(\lambda)$$

Aqui, 1, $\lambda - 1$, $\lambda - 1$ e $(\lambda - 1)^2$ são os polinômios invariantes de A e $\lambda - 1$, $\lambda - 1$ e $(\lambda - 1)^2$, seus divisores elementares. Daí, obtemos:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No processo de transformação de $A - \lambda E$ em $B(\lambda)$, anotamos as operações elementares efetuadas sobre as colunas de $A - \lambda E$:

$$Q_1(\lambda) = [12][1^a \times (\lambda-2) + 2^a][1^a \times (-1) + 3^a][1^a \times (3) + 4^a][4^a \times (-1)][2^a + 3^a][3^a \times (-1) + 4^a]$$

- b) Em seguida, transformamos, por meio de operações elementares, $J - \lambda E$ em matriz polinomial diagonal $C(\lambda)$ idêntica a $B(\lambda)$, uma vez que $A - \lambda E$ e $J - \lambda E$ são matrizes equivalentes e têm, portanto, os mesmos polinômios invariantes e os mesmos divisores elementares:

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix} = B(\lambda)$$

Anotamos as operações elementares efetuadas sobre as colunas de $J - \lambda E$, no processo de transformação de $J - \lambda E$ em $B(\lambda)$:

$$Q_2(\lambda) = [14][1^a (\lambda-1) + 3^a][34].$$

- c) Definimos $Q(\lambda)$ por:

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) Q_2(\lambda)^{-1}; Q_2(\lambda)^{-1} = [34][1^a \times (1-\lambda) + 3^a][14].$$

Aplicamos às colunas da matriz identidade I_4 as operações elementares $Q(\lambda)$. Obtemos:

$$I_4(Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda - 3 & \lambda - 2 & 1 - 2\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda$$

Dáí, substituindo λ por J , obtemos T ,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos, então, verificar que $AT = TJ$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar que $\det.T = -1 \neq 0$. Logo T é não singular e T^{-1} existe e, como T , é inteira. Então:

$$J = T^{-1} AT.$$

5. Se são conhecidos os autovalores e os autovetores de $A \in \mathcal{A}$, a explicitação da matriz J , de Jordan, similar a A , pode ser obtido por método mais simples e eficiente.

Seja A a matriz do EXEMPLO 4 acima. Seus autovalores são $\lambda_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$. Seu polinômio característico, $p_4(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. Portanto, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 4. Vamos determinar o número e a natureza dos blocos de Jordan, na matriz J . Para isso, determinamos a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$, ou seja, a dimensão do espaço nulo de $(A - 1.I)$. No caso, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como a característica (posto) de $(A-1.I)$ é igual a 1, segue-se que a dimensão do espaço nulo de $(A-1.I) = 4 - 1 = 3$. Logo, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é igual a 3. A. Daí, a forma canônica de Jordan de A, similar a J, tem três blocos de Jordan, a saber:

$$\{[1] [1], \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}. \text{ Ou seja:}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos, agora, obter uma base de Jordan para A.

Da equação: $x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$, obtemos, sucessivamente $v_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 0)$, $v_2 = (1 \ 0 \ -1 \ 0)$ e $v_3 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$ que são três autovetores linearmente independentes de A associados a $\lambda = 1$. Para se obter o quarto elemento v_4 da base de Jordan, calculamos:

$$(A - 1. \lambda) v_4 = v_3 \quad \text{ou} \quad v_{41} + v_{42} + v_{43} - 3v_{44} = 1.$$

Fazendo: $v_{41} = v_{42} = v_{44} = 0$, tem-se: $v_{43} = 1$.

Logo: $v_4 = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$. v_4 é autovetor generalizado de A, de ordem 2.

Daí,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que V é não singular.

Logo, $AV = VJ$ ou $J = V^{-1} AV$

$$AV = VJ = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

II) Seja $C \in \mathcal{C}$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro)

Sabemos que os autovetores de $C \in \mathcal{C}$, são os vetores $u_1, u_2, \dots, u_N$, dados por:

$$u_1 = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^N c_j \\ -c_2 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_2 \end{bmatrix}; u_2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=3}^N c_j \\ \sum_{j=3}^N c_j \\ -(c_2 + c_3) \\ \vdots \\ -(c_2 + c_3) \end{bmatrix}; \dots; u_{N-1} = \begin{bmatrix} c_N \\ c_N \\ c_N \\ \vdots \\ c_N \\ \sum_{j=2}^N c_j \end{bmatrix}; u_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo U , a matriz dos autovetores é:

$$U = \begin{bmatrix} \sum_{j=2}^N c_j & \sum_{j=3}^N c_j & \dots & c_N & 1 \\ -c_2 & \sum_{j=3}^N c_j & \dots & c_N & 1 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & \dots & c_N & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ & & \dots & c_N & 1 \\ -c_2 & -(c_2 + c_3) & \dots & \left(\sum_{j=2}^N c_j \right) & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se mostrar, analogamente ao que fez no caso I), que a condição para que U seja não singular, isto é, para que $C \in \mathcal{C}$ seja diagonalizável, é que:

$$\lambda_N \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots, N - 1,$$

onde $\lambda_N = \sum_{j=1}^N c_j$; $\lambda_k = c_1 - c_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Neste caso, pode-se explicitar $Y = U^{-1}$:

$$Y = \{y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N\}, \text{ tais que}$$

$$y_{ii} = 1/(\lambda_N - \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$y_{NN} = c_N/(\lambda_N - \lambda_{N-1});$$

$$y_{i,i+1} = -y_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$y_{N,j} = x_{j-1} + x_j, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1, \text{ com}$$

$$x_0 = 0; \quad x_j = \frac{\sum_{k=2}^{j+1} c_k}{\lambda_N - \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-2; \quad j = i+2, \dots, N$$

$$y_{ij} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \quad j = 1, 2, \dots, i-1.$$

Para $N = 5$, U^{-1} teria o seguinte aspecto:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_5 - 1} & -\frac{1}{\lambda_5 - 1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_2} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_3} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_4} & -\frac{1}{\lambda_5 - \lambda_4} \\ y_{15} & y_{25} & y_{35} & y_{45} & \frac{c_5}{\lambda_5 - \lambda_4} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO:

1. Sejam $N = 4$;

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 7 \\ \lambda_4 - \lambda_1 = 5; \lambda_4 - \lambda_2 = 6; \lambda_4 - \lambda_3 = 5 \end{array}$$

Logo, C é diagonalizável.

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 3/10 & 3/10 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$y_{14} = c_2 / (\lambda_4 - \lambda_1) = 1/5; \quad y_{24} = -1/5 + 3/6 = 3/10$$

$$y_{34} = -3/6 + 3/5 = 3/10; \quad y_{44} = c_4 / (\lambda_4 - \lambda_3) = 1/5$$

$$D = U^{-1} C U =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & 9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & -3 & -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Sejam $N = 4$;

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Autovalores:}$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6; \lambda_4 = 2$$

$$\lambda_4 - \lambda_1 = 0; \lambda_4 - \lambda_2 = 0; \lambda_4 - \lambda_3 = -4$$

Logo C não diagonalizável, mas pode ser reduzida à forma canônica de Jordan.

O polinômio característico de C , $p_C(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 2)^3$.

Ao autovalor $\lambda = 6$, corresponde um bloco de Jordan, $[6]$, uma vez que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 6$ é igual à sua multiplicidade algébrica (ambas iguais à 1).

Para o autovalor $\lambda = 2$, vamos determinar sua multiplicidade geométrica. Sua multiplicidade algébrica é 3. Calculamos a dimensão do espaço nulo de $C - 2I$:

$$C - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem característica (posto) igual a 2. Logo, a dimensão de seu espaço nulo é $4 - 2 = 2$.

Logo, ao auto-valor $\lambda = 2$, correspondem, na matriz J , de Jordan, dois blocos, a saber: $[2]$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então,

$$J = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinada J, passamos à construção de matriz não singular V, tal que $C V = V J$.

Correspondente ao auto-valor $\lambda = 6$ temos o autovetor linearmente independente $v_1 = (-3 \ -3 \ -3 \ 1)^t$.

Das duas últimas linhas de $C - 2I$, obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_3 - 3x_4 = -(x_1 + x_2) = a \\ -3x_3 + x_4 = -(x_1 + x_2) = a \end{cases}$$

$$\text{Logo } x_3 = \frac{-a}{2} = x_4$$

Fazendo $x_1 = 2$; $x_2 = 0$, obtemos $x_3 = x_4 = 1$.

Logo $v_2 = (2 \ 0 \ 1 \ 1)^t$ é um autovetor de A correspondente a $\lambda = 2$.

Fazendo-se $x_1 = x_2 = 1$, obtemos $x_3 = x_4 = 1$.

Logo, $v_3 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^t$ é outro autovetor de A correspondente a $\lambda = 2$. v_1 , v_2 e v_3 são linearmente independentes.

O quarto vetor, v_4 , da base de Jordan é obtido pela relação: $(C - 2I) v_4 = v_3$, onde v_4 é um autovetor generalizado de C de ordem 2.

Ou:

$$\begin{cases} v_{41} + v_{42} + v_{43} - 3v_{44} = 1 \\ v_{41} + v_{42} - v_{43} + v_{44} = 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{aligned} v_{43} - 3v_{44} &= 1 - (v_{41} + v_{42}) = a \\ -3v_{43} + v_{44} &= 1 - (v_{41} + v_{42}) = a \end{aligned}$$

Daí:

$$v_{43} = \frac{-a}{2} = v_{44}$$

Fazendo-se $v_{41} = 3$; $v_{42} = 0$, obtemos:

$$v_{43} = v_{44} = 1$$

Logo: $v_4 = (3 \ 0 \ 1 \ 1)^t$. Daí:

$$V = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De fato, temos:

$$CV = VJ = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 4 & 2 & 7 \\ -18 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar que V é não singular. Logo, C é similar a J : $J = V^{-1} C V$.

III- Seja $A_1 \in \mathcal{A}_p$, de ordem N ($N \geq 2$, inteiro), simétrica.

Sabemos que os autovetores de A_1 , correspondentes aos autovalores $\lambda_k = d - a$, $k = 1, 2, \dots, N-1$ e $\lambda_N = d + (N-1)a$, são os vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}, v_N$ dados por:

$$v_1 = \begin{bmatrix} N-1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} N-2 \\ N-2 \\ -2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} N-3 \\ N-3 \\ N-3 \\ -3 \\ \vdots \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}; \dots; v_{N-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1-N \end{bmatrix}; v_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{N-1} \ v_N)$ dos autovetores de A_1 ,

$$V = \begin{bmatrix} N-1 & N-2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & N-2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & N-3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 1-N & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é não singular, de vez que}$$

pode ser transformada, por operações elementares sobre suas colunas, na matriz:

$$\begin{bmatrix} N & N & N & \dots & N & 1 \\ 0 & N & N & \dots & N & 1 \\ 0 & 0 & N & \dots & N & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cujo determinante é } N^{(N-1)} \neq 0.$$

Logo, os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, v_N$ de A_1 são linearmente independentes e são, portanto, uma base do espaço. Logo, A_1 é diagonalizável *sempre*, pois o espaço possui uma autobase (eigenbasis). Daí, existe matriz diagonal D ao longo de cujo digonal principal estão os autovalores de A_1 e tal que:

$$A_1 V = V D$$

onde V é a matriz cujas colunas são os autovetores de A_1 . Como V é não singular, logo inversível, temos:

$$D = V^{-1} A_1 V.$$

A matriz V^{-1} pode ser facilmente explicitável e se tem:

$$V^{-1} = Y = \{y_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N\}, \text{ onde}$$

$$y_{ii} = 1/N, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$y_{i, i+1} = -1/N, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_{Ni} = 1/N, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Os demais elementos y_{ij} são iguais a zero.

Para $N = 6$, a matriz V^{-1} teria o seguinte aspecto:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS:

1. $N = 5$;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Autovalores:} \\ \lambda = 8 - 2 = 6 \\ \mu = 8 + 4 \times 2 = 16 \end{array}$$

$$V = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = V^{-1} A_1 V =$$

$$= 1/5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

2. $N = 4$; Autovalores: $\lambda = 0$ de multiplicidade 3 e $\mu = 8$;

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; V = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}; V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

IV) Referências

1. Gantmacher, F.R. - The Theory of Matrices, vol. 1 e 2, New York: Chelsea, 1959 [4, 6, 7].
2. Golub, G. H. e Van Loan, G. F. - Matrix Computations, Baltimore, M.D.: Johns Hopkins Univ. Press, 3ª edição, 1998.
3. Lancaster, P. e Tismenetsky, M. - The Theory of Matrices, with Applications, New York: Academic Press, 2ª edição, 1985 [4, 5, 6, 7].

REFERÊNCIAS:

1. Bellman, R. E. - Introduction to matrix analysis, New York: McGraw-Hill, 1960.
2. Gantmacher, F.R. - The theory of matrices, vol. 1 e 2, New York: Chelsea, 1959 [4, 6, 7].
3. Golub, G.H. e Van Loan, G.F. - Matrix Computations, Baltimore Johns Hopkins Univ. Press, 3ª edição, 1998.
4. Gregory, R.T. e Karney, D.L. - A collection of matrices for testing computational algorithms. New York, Wiley Interscience, 1969.
5. Lancaster, P. e Tismenetsky, M. - The theory of matrices with applications, New York, Academic Press, 2ª edição, 1985 [4-7].
6. Linhares, O.L. - Sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável. Ci. e Cultura 8, 914-919, 1977.
7. Linhares, O.L. e Andrade, E.X.L. - Sobre classe de matrizes quadradas com certas características desejáveis facilmente explicitáveis. Ci. e Cultura 31(6): 652, 1979.
8. Linhares, O.L. e Andrade, E.X.L. - Classes de matrizes quadradas inteiras com inversas inteiras facilmente explicitáveis. Ci. e Cultura 32(7): 908-914, 1980.
9. Linhares, O.L. - Classes de matrizes quadradas para teste de algoritmos computacionais. Notas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, nº 14, São Carlos (SP), 1985.
10. Linhares, O.L. - Matrizes de teste inteiras, com inversas inteiras e autovalores e autovetores inteiros, facilmente explicitáveis. Notas do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-USP, nº 25, São Carlos (SP), 1987.
11. Newman, M. - Integral Matrices. New York, Academic Press, 1972.
12. Renaud, J.C. - Matrices with integer entries and integer eigenvalues. American Mathematical Monthly, vol.90, p.202-203, 1983.
13. Valvi, F. - Explicit presentation of the inverses of some types of matrices. J. Maths Applics., vol. 19, p. 107-117.

NOTAS DO ICMC

SÉRIE MATEMÁTICA

- 068/98 CONDE, A.; MENDES, M.P. – Gröbner bases and the immersions of real flag manifolds in Euclidean spaces.
- 067/98 MOCHIDA, D.K.H.; ROMERO-FUSTER, M.C.; RUAS, M.A.S. – Osculating hyperplanes and asymptotic directions of condimension two submanifolds of euclidean spaces.
- 066/98 CARVALHO, A.N.; PRIMO, M.R.T. – Boundary synchronization in parabolic problems with nonlinear boundary conditions.
- 065/98 BRUCE, J.W.; FLETCHER, G.J.; TARI, F. – Bifurcations of binary differential equations.
- 064/98 BRUSCHI, S.; CARVALHO, A. N.; RUAS-FILHO, J.G. – The dynamics of a one-dimensional scalar parabolic problem versus the dynamics of its discretization.
- 063/98 LEIVA, H. - A new sufficient algebraic condition for the controllability and observability of linear time varying systems.
- 062/98 ARRIETA, J.M.; CARVALHO, A.N.; RODRÍGUEZ-BERNAL, A. - Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds.
- 061/98 MANOEL, M.; BARBOSA, J.C. - A mathematical model for the spectrum of a two-dimensional schrödinger equation with magnetic field under dirichelet boundary conditions.
- 060/98 OLIVEIRA, R.D.S.; TARI, F. - On pairs of differential 1-forms in the plane.
- 059/97 ARRIETA, J.M.; CARVALHO, A.N.; RODRIGUEZ-BERNAL, A. - Parabolic problems with nonlinear boundary condition and critical nonlinearities.