Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Introdução à teoria básica das EDP's

Prof. Éder Ritis Aragão Costa

Março de 2020

Prefácio

O objetivo destas notas é esclarecer alguns aspectos preliminares sobre a teoria clássica básica das EDP's lineares de primeira e segunda ordem em duas variáveis independentes, sendo elas resultado de notas de aula da disciplina SMA0169 Equações Diferenciais Parciais, que ministrei nos anos de 2019 e 2020. Pretendemos, com elas, oferecer um material complementar de estudos aos alunos do nosso instituto, visando uma abordagem mais qualitativa das EDP's em detrimento a postura comumente adotada na exposição desse curso, pelas universidades brasileiras, que o direcionam à apresentação de métodos de resolução de certas EDP's (como um curso de Cálculo), não dando a atenção merecida às construções teóricas que sustentam tais mecanismos.

Nossa exposição inicia-se no contexto...

Como pré-requisitos necessários à leitura deste texto, gostaríamos de destacar os seguintes:

(1) Linguagem da Álbegra Linear: Espaços vetoriais, combinações lineares, norma, produto interno, transformações lineares, etc.

(2) Vocabulário da topologia dos espaços métricos: Conjuntos abertos, fechados, compactos, conexos, fronteira, fecho, interior, etc.

(3) Um entendimento razoável sobre as principais propriedades das sequências e séries de funções, mais especificamente, as propriedades associadas às convergências pontual e uniforme.

(4) Familiaridade com as propriedades das funções $F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$: Limite, continuidade, derivadas parciais, funções coordenadas, etc.

(5) O Teorema da Função Inversa.

(6) Saber aplicar os Teoremas de Existência e Unicidade de soluções **máximas** para PVI's associados a EDO's do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x),\ t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

em que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação dada e $(t_0, x_0) \in \Omega$.

✓

Sumário

Capítulo 1

Notações e conceitos preliminares

Neste primeiro capítulo, estabeleceremos algumas notações e as primeiras definições, com o intuito de fixarmos um vocabulário inicial que nos possibilite discutir, nos próximos capítulos, a teoria básica das EDP's lineares de primeira e segunda ordens em duas variáveis independentes.

1 Notações para derivadas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente diferenciável. Pondo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ para representar as variáveis em Ω, indicaremos a j-ésima derivada parcial de u, ou a derivada parcial de primeira ordem de u com relação à j-ésima variável x_j, por qualquer um dos símbolos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad \partial_{x_j} u, \quad \partial_j u, \text{ ou } \; u_{x_j},$$

ficando subentendido que tratam-se das **funções derivadas parciais**.

Em particular, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ significa a derivada parcial de primeira ordem de u com relação à primeira variável, enquanto que $\partial_2 u$ significa a derivada parcial de u relativamente à segunda variável.

Observação 1.1. *A notação $\partial_j u$ é "superior" às demais no sentido de que ela fica independente da letra usada para representar as variáveis de Ω, ou seja, $\partial_j u$ sempre significa a derivada parcial de primeira ordem de u com relação à j-ésima variável, independentemente de estarmos chamando ela de t_j, x_j, y_j, etc. Embora seja muito mais comum a utilização do símbolo $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, para indicar essa derivada.*

De modo análogo, as derivadas de maior ordem serão escritas como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \partial_i \partial_j u, \text{ ou } \; u_{x_j x_i},$$

significando a derivada parcial de segunda ordem de u, primeiro, com relação à j-ésima variável e, segundo, com relação à i-ésima variável. Explicitando a primeira e a terceira notações

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \text{ e } u_{x_j x_i} = (u_{x_j})_{x_i}.$$

No caso especial em que se tem $i = j$ é comum escrever $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ ao invés de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}$.

Quando, em particular, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e pusermos $(t, x, y) \in \Omega$, escreveremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ u_{tt}, \ u_{xt}, \text{ etc.}$$

As de ordem três, por exemplo, poderão ser indicadas por

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \ u_{ttt}, \ u_{yxt}, \text{ e assim sucessivamente.}$$

Observação 1.2. *Por que devemos nos preocupar com a ordem em que as derivadas são tomadas? Isso acontece porque, nem sempre, os "operadores" derivadas parciais comutam entre si. Para que isso aconteça, é preciso restringir o espaço em que as funções são consideradas de modo que, assim, o Teorema de Schwarz possa ser aplicado (veja [7], para o enunciado e demonstração deste resultado).*

2 Definição de EDP

A primeira coisa que devemos fazer é dizer o que é uma EDP, que são os objetos dos quais queremos tirar conclusões. Dizer o que uma EDP é, como a definição a seguir apresenta, pode não parecer muito esclarecedora, embora todos concordem que elas sempre são reconhecidas em qualquer lugar onde são vistas.

Definição 1.3 (EDP). *Uma* **equação à derivadas parciais** *(termo antigo) ou uma* **equação diferencial parcial** *(EDP) é uma equação evolvendo derivadas parciais de uma função (real ou complexa) que depende, portanto, de duas ou mais variáveis reais (caso contrário, seria uma EDO).*

A forma mais geral de uma EDP em $n \geq 2$ variáveis independentes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e incógnita u (variável dependente) é

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n x_1}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0, \quad (1.1)$$

para algum natural $m \in \mathbb{N}$ *e* $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^m} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função dada* [1].

Observação 1.4 (Opcional). *Muitas vezes, no estudo das EDP's, é muito útil introduzirmos as chamadas "co-variáveis"* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$*, cujo papel é o de ajudar na classificação de certos tipos de equações, principalmente, quando a ferramenta empregada neste estudo é a Transformada de Fourier (confira [4, 5]).*

Dada a equação (1.1)*, substitui-se cada derivada parcial* $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ *por* ξ_j*, as de ordem maior, como, por exemplo, a de ordem três* $\frac{\partial^3 u}{\partial x_i x_j x_k}$ *é substituída pelo produto dos três fatores* $\xi_i \cdot \xi_j \cdot \xi_k$ *e a função* u *pelo número* 1*. Essas substituições, transformam a EDP* (1.1) *numa equação numérica, a saber, a equação*

$$F\left(x_1, ..., x_n, 1, \xi_1, ..., \xi_n, \xi_1^2, ..., \xi_n \cdot \xi_1, ..., \xi_1 \cdot \xi_n, ..., \xi_n^2, ..., \xi_1 \cdot \xi_n^{m-1}, ..., \xi_n^m\right) = 0. \tag{1.2}$$

Observação 1.5. *Quando, na equação acima, a variável independente* $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *varia em um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, é comum dizer que a EDP é uma EDP em* Ω*, ou que* Ω *é o domínio da EDP.*

Observação 1.6. *Na forma geral apresentada acima, a função* u *é a incógnita, ou seja, o objeto que pretenderemos determinar em "algum lugar".*

Lá, a função F *é a responsável por dar a "forma", da equação, ou seja, é ela quem "opera" com as variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$*, com a função* u *e suas derivadas parciais, dando origem ao formato da EDP.*

Note ainda que U *é um conjunto aberto no produto cartesiano* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^m}$*, deixando claro que, no primeiro fator* $\mathbb{R}^n$ *variam as* n *variáveis independentes, no segundo fator* $\mathbb{R}$*, varia a função* u*, no terceiro fator* $\mathbb{R}^n$ *variam as* n *derivadas parciais de primeira ordem de* n*, o terceiro fator* $\mathbb{R}^{n^2}$ *é ocupado pelas* n^2 *derivadas de segunda ordem de* u *(cada uma das* n *derivadas de primeira ordem possui* n *derivadas de primeira ordem, produzindo as* n^2 *derivadas de segunda ordem) e assim sucessivamente, até que no último fator* $\mathbb{R}^{n^m}$*, variam as* n^m *derivadas de ordem* m *de* u*.*

Exemplos 1.7. *(1)* $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + xu = y$*, é uma EDP em* $\mathbb{R}^2$*.*

[1] (1.1) deve ser entendido como

$$F\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n x_1}(x), \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}(x), \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x), \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}(x)\right) = 0,$$

para todo $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, em algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(2) $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2\frac{\partial u}{\partial y} = \log y$, *é uma EDP em* $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(3) $\frac{1}{y-x^2}\frac{\partial u}{\partial t} = u$, *é uma EDP em* $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : y \neq x^2\}$.

(4) $e^{u_x+u_y} = 0$, *é uma EDP em* $\mathbb{R}^2$.

(5) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$ *é uma EDP em* $\mathbb{R}^3$.

(6) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$, *é uma EDP em* $\mathbb{R}^4$.

(7) $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$, *é uma EDP em* $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.8. *O nosso objetivo principal neste curso é discutir condições que assegurem a existência de alguma "solução" para certos tipos de EDP.*

Dito isso, observemos que, ao definir uma EDP de modo tão genérico, como feito na Definição 1.3, podem surgir EDP's cuja própria definição é contraditária, como ocorreu no quarto ítem do exemplo anterior, uma vez que a exponencial de qualquer número jamais será igual a 0.

3 Ordem

Assim como acontece com as EDO's, as EDP's podem também classificar-se segundo as ordens de derivação que ela apresenta.

Definição 1.9 (Ordem). *A* **ordem** *de uma EDP é definida como sendo a ordem da derivada parcial de maior ordem da incógnita* u *que figura nesta equação (portanto, a ordem é sempre* $m \geq 1$*).*

Tendo em mente a forma geral de uma EDP, dizer que ela é de ordem m, significa dizer que F, como função de alguma derivada de ordem m de u é não constante.

É como definir o grau de um polinômio, nele procuramos a maior potência de x que aparece lá e aquilo é o grau, aqui a classificação consiste em procurar a derivada parcial de maior ordem que ocorre na EDP e essa ordem é a ordem da EDP. A ordem é também mais simples de ser explicada por meio de exemplos.

Exemplos 1.10. *(1)* $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy^2$, *é uma EDP de ordem* 1, *ou de primeira ordem.*

(2) $u_{tt} + u_t u_x u_y = u^5$*, é uma EDP de segunda ordem, ou de ordem* 2.

(3) $x = \sin\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$*, é uma EDP de terceira ordem, ou de ordem* 3*, e assim por diante.*

4 Linearidade

Definição 1.11 (Linearidade). *Diremos que uma EDP é* **linear***, quando ela é do primeiro grau na incógnita* u *e em todas as suas derivadas parciais, caso contrário ela se diz* **não-linear***.*

Observação 1.12. *Em outras palavras, dizer que uma EDP é linear, significa dizer que a expressão que a define pode ser escrita como uma igualdade, em que um dos lados consiste em uma combinação linear de* u *e de todas as suas derivadas parciais, na qual os coeficientes são funções dependendo apenas da variável independe* x *(e não da variável dependente* u*), e o outro consiste em uma função que depende apenas de* x *(e não da variável dependente* u*)* [2]*.*

Observação 1.13 (Opcional). *Classificar uma EDP quanto a sua linearidade fica bastante simples se utilizamos as co-variávies* $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *na equação* (1.1)*. Com efeito,* (1.1) *é linear quando* (1.2) *é uma* **equação polinômial** *nas variáveis* $\xi_1, \cdots, \xi_n$ *com coeficientes consistindo de funções apenas das variáveis* $x_1, \cdots, x_n$*.*

Observação 1.14. *Em complemento à observação anterior, podemos deduzir a* **forma geral** *de uma EDP linear de segunda ordem em* n *variáveis independentes* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$*, como tendo a forma*

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u}_{\text{combinação linear de } u \text{ e de suas derivadas parciais até a } 2^a \text{ ordem}} \quad = \quad \underbrace{f(x),}_{\text{função dependendo apenas de } x} \tag{1.3}$$

em que os coeficientes $a_{ij}, b_j, c, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções dadas na variável independente* $x \in \Omega$ *e ao menos um dos* a_{ij} *é não identicamente nulo.*

[2] A maneira de se escrever a EDP neste formato não tem porque ser única.

Observação 1.15 (Opcional). *Observe que, substituindo as derivadas pelas co-variáveis na EDP da observação anterior, obtemos a equação polinômial*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\xi_j + c(x) = f(x).$$

As EDP's lineares classificam-se em dois tipos, as homogêneas e as não-homogênas, assim como as EDO's. Esta definição pode ser dada para EDP's lineares de qualquer ordem, mas como, neste curso, estudaremos apenas as de primeira e segunda ordem, limitaremos nossa definição a estes casos, acreditando, entretanto, que o leitor não terá dificuldade alguma em estender esta definição para ordens superiores.

Definição 1.16 (Homogeneidade). *A EDP linear* (1.3) *é dita* **homogênea**, *quando a função f for identicamente nula, de outro modo ela é dita* **não-homogênea**.

Definição 1.17 (Laplaciano). *Quando $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que possui derivadas parciais de segunda ordem, definimos o seu* **Laplaciano** [3] *por*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \tag{1.4}$$

ou seja, para cada $x \in \Omega$, tem-se $\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$.

Mais geralmente, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+n}$, com suas variávies escrevendo-se como $(t_1, \cdots, t_k, x_1, \cdots, x_n)$, e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais de segunda ordem relativamente as variáveis x_j's, definimos o seu **Laplaciano na variável** x *pondo*

$$\Delta_x u(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t, x). \tag{1.5}$$

Munidos destas notações, podemos apresentar os principais modelos de EDP's de segunda ordem existentes na teoria.

Exemplos 1.18. *(1)* **Equação de Poisson:** $\Delta u = f \Longleftrightarrow \Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(2) **Equação de Laplace:** $\Delta u = 0 \Longleftrightarrow \Delta u(x) = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

[3] Podemos encontrar em [4, 5], inúmeoras informações valiosas sobre este operador que o elevam a um lugar de destaque no estudos das equações diferenciais.

Observação 1.19. *Quando uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação de Laplace em Ω, ou seja, satisfaz $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$, dizemos que u é uma função* **harmônica** *em Ω.*

(3) **Equação do Calor:** $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta_x u$, *em que $u = u(t, x)$, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$ é uma constante fixa.*

(4) **Equação da Onda:** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x u$, *em que $u = u(t, x)$, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $c > 0$ é uma constante fixa.*

Todas as equações apresentadas acima são lineares de segunda ordem. As três últimas são homogêneas e a primeira é não-homogênea, quando $f(x) \neq 0$ para algum $x \in \Omega$. Observemos ainda que os domínios da equação do calor e da onda é o aberto de $\mathbb{R}^{1+n}$, $(0, \infty) \times \Omega$.

Definição 1.20 (Parte Principal). *A* **parte principal** *de uma EDP arbitrária* (1.1) *é a parte desta EDP que agrupa todas as derivadas parciais de maior ordem da variável dependente u. Indicaremos, muitas vezes, essa parte principal por Lu* [4].

Exemplo 1.21. *A parte principal da EDP linear de segunda ordem* (1.3) *é o termo*

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

que contém todas as derivadas de segunda ordem de u, desde que algum a_{ij} seja não identicamente nulo.

Definição 1.22 (EDP semi-linear). *Quando a parte principal de uma EDP não-linear é linear em u, dizemos que ela é uma EDP* **semi-linear**.

Exemplo 1.23. *(1) $u_t - u^2 = 0$, é uma EDP não-linear. Sua parte principal é $Lu = u_t$, que é portanto linear em u. Logo $u_t - u^2 = 0$ é uma EDP semi-linear.*

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} - xy^2 u = e^u$ é uma EDP não-linear. Sua parte principal é $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, que é portanto linear em u. Logo $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} - xy^2 u = e^u$ é uma EDP semi-linear.

[4]É importante ter em mente que a parte principal é uma "parte" da EDP, ou seja, ela faz parte da formulação da equação e deve ser entendida como uma função da variável dependente u.

Quando a EDP é de ordem m, muitas vezes, sua parte principal define um "operador" $L : C^m(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ (Confira a Definição 1.24 abaixo), se este operador é linear e a EDP é não-linear, recaímos na Definição 1.22 de EDP semi-linear.

5 Solução Clássica

Neste curso, pretendemos "resolver" certas EDP's particulares, o que significa procurar algum tipo de "solução" para elas. A partir de tudo o que dissemos acima, parece razoável esperar que as "soluções" das nossas equações serão funções de algum tipo.

Por outro lado, destacamos que as aspas empregadas nas três palavras acima, devem-se ao fato de que o conceito de solução para uma EDP é um conceito muito amplo que envolve, muitas vezes, a necessidade de se estender o próprio conceito de função (o que não será discutido aqui, confira [6] para maiores detalhes).

Isso posto, a fim de estabelecer um ponto de partida para o estudo da "resolubilidade" das EDP's que discutiremos (confira a Definição 1.27 abaixo), precisamos esclarecer que tipo de função aceitaremos como soluções das mesmas.

Definição 1.24. *Fixado $n \in \mathbb{N}$, seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e m um número natural, definimos os espaços de funções:*

(i) $C(\Omega) = C^0(\Omega) := \big\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u$ *é uma função contínua em* $\Omega\big\}$.

(ii) $C^m(\Omega) := \big\{u \in C(\Omega) : u$ *possui todas as derivadas parciais até a ordem* m *contínuas em* $\Omega\big\}$.

(iii) $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m(\Omega)$.

Note que, naturalmente, valem as inclusões

$$C^\infty(\Omega) \subset \cdots C^m(\Omega) \subset \cdots C^2(\Omega) \subset C^1(\Omega) \subset C(\Omega).$$

Quando $u \in C^k(\Omega)$, dizemos que u é uma **função de classe** C^k, *para $k = 0, 1, 2, \cdots, \infty$.*

Definição 1.25 (Solução Clássica). *Uma* **solução clássica** *(ou apenas solução) para uma EDP de ordem m em Ω é uma função $u \in C^m(\Omega)$ que verifica a EDP em todos os pontos de Ω. Noutras palavras, quando, para cada $x \in \Omega$, ao inserir x e $u(x)$, juntamente com todas as suas derivadas parciais até a ordem m avaliadas em x, na equação* (1.1)*, a mesma torna-se uma expressão verdadeira.*

Exemplos 1.26. *(1)* $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *é uma EDP de primeira ordem em* $\mathbb{R}^2$*. Todas as funções* $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *do tipo* $u(x, y) = g(x)$*, para alguma* $g \in C^1(\mathbb{R})$*, são soluções clássicas para ela.*

Note que a função $v(x, y) = |x|$*, embora verifique* $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, não é uma solução clássica da EDP, porque ela não é uma função* $C^1(\mathbb{R}^2)$*.*

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} - 2x = 0$ *é uma EDP de primeira ordem em* $\mathbb{R}^2$*. A função* $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $u(x, y) = x^2$ *é uma solução clássica para ela* $\mathbb{R}^2$*.*

Mais geralmente, para qualquer $h \in C^1(\mathbb{R})$*, a função* $v(x, y) = x^2 + h(y)$*,* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, é uma solução clássica para* $\frac{\partial u}{\partial x} - 2x = 0$*.*

Por outro lado, se $f \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$*, então a função* $w(x, y) = x^2 + f(y)$*, mesmo verificando a EDP* $\frac{\partial w}{\partial x} - 2x = 0$*, não é uma solução clássica para ela.*

Definição 1.27 (Resolubilidade)**.** *Estudar a* **resolubilidade** *de uma EDP, significa estudar o problema de encontrar soluções para ela.*

Exemplo 1.28 (Importantíssimo)**.** *Dada* $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$*, estudemos a resolubilidade da EDP linear de primeira ordem não-homogênea*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f. \tag{1.6}$$

Com efeito, lembremos que, se $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função* C^1*, então, para cada* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*, calcular o valor da derivada parcial* $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$ *significa calcular o valor da derivada ordinária*

$$\frac{du(a, \cdot)}{dy}(b),$$

ou seja, calcular a derivada ordinária da função de uma única variável real $u(a, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que se obtém fixando* a *e permitindo o* y *variar em* $\mathbb{R}$*, isto é, da função dada por*

$$u(a, \cdot)(y) := u(a, y), \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *verifica* (1.6) *se, e somente se, para cada* $a \in \mathbb{R}$ *fixo definindo também a função de uma única variável* $f(a, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}$*, vale a igualdade*

$$\frac{du(a, \cdot)}{dy}(y) = f(a, y), \;\; y \in \mathbb{R}.$$

De acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo, a igualdade acima é verdadeira se, e somente se, para cada $a \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\int_0^y \frac{du(a,\cdot)}{dy}(t)dt = \int_0^y f(a,t)dt,$$

o que, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo, equivale a

$$u(a,y) = u(a,0) + \int_0^y f(a,t)dt, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução de $\frac{\partial u}{\partial y} = f$ se, e somente se, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$u(x,y) = u(x,0) + \int_0^y f(x,t)dt.$$

O exemplo anterior, na verdade, demonstrou o primeiro teorema do nosso curso:

Teorema 1.29. *Se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, então toda solução clássica da EDP*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

é da forma

$$u(x,y) = g(x) + \int_0^y f(x,t)dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

para alguma função C^1 da reta, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercício 1.30. *Dada $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, demonstre que, $v \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução de*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f, \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

se, e somente se, v é da forma

$$v(x,y) = h(y) + \int_0^x f(s,y)ds, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

para alguma função $h \in C^1(\mathbb{R})$.

6 Condições Iniciais e de Contorno

Recordemos que, no caso das EDO's, uma vez obtida sua "solução geral", impondo o valor dessa solução e de suas derivadas até certa ordem em um ponto específico, geralmente, obtemos unicidade de solução.

Para as EDP's, por outro lado, a simples especificação do valor da solução em um único ponto não é suficiente para obter-se a unicidade. Isso acontece, porque agora, o espaço das variáveis independentes é multi-dimensional e as condições iniciais, usualmente dadas nos extremos de um intervalo, precisarão ser substituídas pelo valor da solução no bordo $\partial\Omega$ da região sobre a qual a EDP está sendo considerada, ou em uma superfície $M \subset \Omega$ de co-dimensão 1, ou seja, uma hiperfície (quase sempre essa superfície é, ou o gráfico de alguma função, ou uma reunião de gráficos).

De modo resumido, os problemas de contorno, ou de valor inicial, consistem em um problema duplo:

A resolubilidade de alguma EDP em um certo domínio Ω, acoplada a uma exigência adicional sobre quais valores a solução dessa EDP deve satisfazer em um determinado conjunto M associado ao domínio Ω.

Definição 1.31 (Condição de Contorno). *Um* **problema de valor de contorno***, ou problema de contorno, consiste no problema da resolubilidade de uma EDP em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, no qual se exige que as soluções dessa EDP, e suas derivadas, satisfaçam certos valores previamente especificados no bordo $\partial\Omega$. Esses valores dizem-se as* **condições de fronteira***.*

Observação 1.32. *Observemos que, fica implícito na definição acima, o fato de que uma u resolve todo o problema de contorno, se está, pelo menos, definida no fecho $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, já que precisará satisfazer a EDP no aberto Ω e sua restrição a $\partial\Omega$ satisfazer as condições de contorno.*

Exemplo 1.33. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja um aberto cuja fronteira admita vetor normal unitário apontando para fora de Ω em cada ponto, $\vec{n}(x)$, $x \in \partial\Omega$. Nesse caso, podemos destacar as condições de contorno da forma:*

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega, \tag{1.7}$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são reais dados e $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada [5].

[5] Lembre-se que, para cada $x \in \partial\Omega$, a derivada normal $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ é definida como sendo a derivada direcional lateral:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \lim_{h \to 0^-} \frac{u(x + \vec{n}(x)h) - u(x)}{h}.$$

(i) Quando $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$, a condição $\alpha u(x) = \varphi(x),\ x \in \partial\Omega$, é chamada uma **Condição de Dirichlet**. *Se, além disso, $\varphi \equiv 0$, essa condição diz-se uma* **Condição de Dirichlet homogênea.**

(ii) Quando $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, a condição $\beta \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x),\ x \in \partial\Omega$, é chamada uma **Condição de Neumann**. *Se, além disso, $\varphi \equiv 0$, essa condição diz-se uma* **Condição de Neuman homogênea.**

Definição 1.34 (Problema de Cauchy - PVI). *Um* **problema de Cauchy**, *ou Problema de Valor Inicial (PVI), consiste no problema da resolubilidade de uma EDP em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, no qual se exige que as soluções dessa EDP, e suas derivadas, satisfaçam certos valores previamente especificados em uma hiperfície $M \subset \Omega$. Esses valores dizem-se as* **condições iniciais**.

Em particular, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, as condições iniciais serão dadas sobre a imagem de uma curva $\gamma : I \longrightarrow \Omega$, cuja imagem está contida em Ω.

Exemplos 1.35. *(1) Se $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então o problema*

$$\begin{cases} u_y = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é um problema de Cauchy para a equação $u_y = 0$.

(2) Sejam $p, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções, com ψ contínua e $p \in C^1(\mathbb{R})$, então o problema

$$\begin{cases} yu_x + x^2 u_y = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(p(y), y) = \psi(y), & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é um problema de Cauchy para a equação $yu_x + x^2 u_y = 0$.

(3) Sejam $\mathbb{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ o disco unitário do plano e $\varphi : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, então o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{D} \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

é um problema de Dirichlet para a equação de Laplace.

(4) Nas mesmas condições do item anterior, o problema

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \mathbb{D} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, & \text{em } \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

é um problema de Neumann para a equação de Poisson.

7 Exercícios

(1) Classifique segundo ordem e linearidade (para as lineares, diga se é homogênea ou não, e para as não-lineares, diga se podem, ao menos, ser semi-lineares) cada uma das EDP's nas variáveis $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ a seguir:

(i) $u_x - 3u_{xt} = t^2 u$

(ii) $u_{tt} + u_{xx} = \log(u)$

(iii) $u_{tt} - \cos(u_{xx}) = x^2 u$

(iv) (Equação de Burger) $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x}$, em que ν é uma constante.

(iv) (Equação KdV) $u_t = u_{xxx} + uu_x$

(v) (Equação de Sine-Gordon) $u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0$

(vi) (Equação de Shrödinger, "primeiro postulado da Mecânica Quântica")

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(t, x)u,$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante, i é a unidade imaginária e V é uma função dada.

(2) Especifique o tipo de condição adicional (inicial e/ou fronteira) acoplada a cada uma das EDP's a seguir:

(i)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = xy, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(|y|^{1/2}, y) = f(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} \Delta u = h(x,y) \ \text{ em } \mathbb{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi \ \text{ em } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \text{ se } x^2 + y^2 < 1 \\ u(\sin\theta, \cos\theta) = e^\theta, \ \theta \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \ \text{para} \ \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(v)

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \ \text{para} \ \ (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0) = g(x), x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(3) Considere o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = f(y), y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determine $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, para que este problema:

(i) Não tenha solução.

(ii) Tenha solução.

(iii) É possível determinar f a fim de que ele tenha solução única?

(4) Sejam $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ funções dadas e considere o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y), \ \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(p(y),y) = f(y), y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.8}$$

(i) Determine condições sobre p a fim de que seja possível encontrar uma mudança de coordenadas $\xi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi = \xi(z,w)$, de modo a simplificar a estrutura da condição inicial para que ela seja do tipo "$U(0,w) = f(w)$" e a forma da EDP seja "$\frac{\partial U}{\partial z} = H(z,w)$".

Mais especificamente, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução de (1.8) se, e somente se, $U := u \circ \xi$ resolve $\frac{\partial U}{\partial z} = H(z,w)$ e $U(0,w) = f(w)$, para alguma $H = H(z,w)$.

(ii) Verifique que, no caso em que $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, então é possível encontrar uma mudança de coordenadas $\Psi = \Psi(z,w)$ de modo que, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução de (1.8) se, e somente se, $U := u \circ \Psi$ resolve $\frac{\partial U}{\partial w} = H(z,w)$ e $U(0,w) = f(w)$, para alguma $H = H(z,w)$.

(5) Verifique que todas as funções da forma:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

em que $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ são arbitrárias, são soluções da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(6) Considere a EDP em $\mathbb{R}^2$ dada por $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} = 0$. Pedimos:

(i) Fixado $c > 0$, defina $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $\Phi(x,t) := (x+ct, x-ct)$. Verifique que Φ é um difeomorfismo C^∞.

(ii) Verifique que, $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução de $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} = 0$ se, e somente se, $u = U \circ \Phi$ é solução da equação da onda.

(iii) Conclua que todas as soluções da equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, em $\mathbb{R}^2$, são da forma:

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

em que $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ são arbitrárias.

(7) Verifique que a função $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $u(x,y) =: \frac{1}{2\pi} \log(x^2+y^2)$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ou seja, que ela cumpre $\Delta u(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \neq 0$.

(8) Sejam $u, v \in C^2(\mathbb{D})$ funções tais que para todo $(x,y) \in \mathbb{D}$ valem as igualdades

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Demonstre que u e v são harmônicas em $\mathbb{D}$.[6]

Obs: O sistema de equações acima constitue as então chamadas *equações de Cauchy-Riemann*.

(9) Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função harmônica e defina $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(x,y) := \int_0^y u_x(x,t)dt - \int_0^x u_y(s,0)ds,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verifique que v é também uma função harmônica em $\mathbb{R}^2$ e que o par de funções (u,v) satisfaz as equações de Cauchy-Riemann.

Obs: Quando isso acontece dizemos que u e v são *conjugadas harmônicas* (uma da outra) e é demonstrado, na Análise Complexa, que a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$$

é uma função *holomorfa*.

(10) **Exercício opcional:** Seja $P : [0,1) \times [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ o "Núcleo de Poisson" dado por

$$P_r(\theta) = P(r,\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Pedimos:

(0) Verifique que, para cada $r \in [0,1)$, vale que $P_r(-\pi) = P_r(\pi)$.

(i) Mostre que a série que define $P(r,\theta)$ converge uniformemente a P em cada compacto $K \subset [0,1) \times [-\pi,\pi]$.

(ii) Prove que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta)d\theta = 1$, qualquer que seja $r \in [0,1)$.

(iii) Fixado $(r,\theta) \in [0,1) \times [-\pi,\pi]$, calcule a soma da série que define $P(r,\theta)$ e conclua que

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

(iv) Verifique que $P(r,\theta) \geq 0$ para todo $(r,\theta) \in [0,1) \times [-\pi,\pi]$.

[6] Lembre-se que $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ é o disco unitário do plano.

(v) Usando o item (iii) demonstre que, para cada $\delta > 0$ fixo, tem-se que [7]

$$\lim_{r\to 1} \sup_{\delta \le |\theta| \le \pi} P(r,\theta) = 0.$$

(vi) Verifique que

$$\lim_{r\to 1} P(r,0) = \infty.$$

Obs: Unindo as propriedades (v) e (vi), use-as para fazer uma representação geométrica do comportamento da família de funções $(P_r)_{r\in[0,1)}$ em $C([-\pi,\pi])$.

(vii) Seja $\varphi \in C([-\pi,\pi])$, com $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$, e defina a função

$$u(x,y) = u(re^{i\theta}) = (P_r * \varphi)(\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)P(r,\theta - t)dt.$$

Prove que, fixado $\theta \in [-\pi,\pi]$, vale a convergência

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = \varphi(\theta).$$

(viii) Demonstre que $u = P_r * \varphi$, acima definida, é harmônica em $\mathbb{D}$.

Obs: Note que os dois últimos ítens dizem que, num certo sentido, a função u, acima definida, resolve o problema de fronteira de Dirichlet no disco

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ em } \mathbb{D}, \\ u = \varphi \ \text{ em } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

[7] Quando uma família de funções $(P_r)_{r\in[0,1)}$ em $C^\infty([-\pi,\pi])$ cumpre as quatro condições (0), (ii), (iv) e (v) ela é chamada uma *aproximação da identidade no toro* $\mathbb{T} = S^1$.

Capítulo 2

Problemas de Cauchy para EDP's lineares de 1^a ordem

Neste capítulo estudaremos resultados bastante gerais relacionados à resolubilidade de problemas de Cauchy para EDP's lineares de 1^a ordem cujos coeficientes precisam de pouca regularidade. Resultados estes, gerais no sentido de que não podem ser reproduzidos para as EDP's lineares de ordem maior.

1 Introdução

Comecemos analisando a resolubilidade de alguns PVI's bem simples:

Dada $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1, consideremos:

$$\begin{cases} u_y = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Conforme o Teorema 1.29 nos ensina, as soluções de $u_y = 0$ são da forma $u(x,y) = g(x)$, para $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Assim, se queremos que u resolva todo o problema proposto, devemos então impor que

$$g(x) = u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$$

dizendo que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ resolve o PVI se, e somente se, $u(x,y) = \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, provando também a unicidade de solução.

Consideremos, por outro lado, uma pequena variação na condição inicial do problema acima

$$\begin{cases} u_y = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = \psi(y), \ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1.

Analogamente, do Teorema 1.29, segue que as soluções de $u_y = 0$ são da forma $u(x,y) = g(x)$, para $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Assim, impondo a condição inicial em u resulta que

$$g(0) = u(0,y) = \psi(y), \ y \in \mathbb{R}$$

nos mostrando que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ resolve o PVI se, e somente se, $\psi(y) = g(0)$, para todo $y \in \mathbb{R}$, o que, em outras palavras, diz que o PVI possui solução se, e somente se, a condição inicial ψ for uma função constante $\psi \equiv c$. Neste a caso, para toda $g \in C^1(\mathbb{R})$, com $g(0) = c$, a função $u(x,y) = g(x)$, é uma solução do PVI, dizendo assim que, para este problema, não há unicidade de solução.

Observe que este problema traz duas situações completamente distintas do que aconteceu com o primeiro:

(1^a) Se ψ não for constante, ele não possui solução.

(2^a) Se ψ for constante, ele possui infinitas soluções, uma vez que, fixado $c \in \mathbb{R}$, existem infinitas funções $g \in C^1(\mathbb{R})$ com $g(0) = c$.

Este fenômeno ocorre, porque a curva $y \mapsto (0,y)$, sobre a qual se impõe a condição inicial, é "característica" para a equação $u_y = 0$ (enquanto que $x \mapsto (x,0)$ é "não-característica" para $u_y = 0$), como explicaremos na Seção 3.

Observe ainda que, as duas exigências sobre as soluções são impostas sobre a variável y: A derivada é na direção y e a condição inicial é dada no eixo y.

Finalmente, sejam $p, \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, e consideremos o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = f, & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(x,p(x)) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

A seguir, queremos mostrar que é possível substituir a condição inicial "$u(x,p(x)) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}$" pela condição mais simples "$u(z,0) = \varphi(z), \ z \in \mathbb{R}$." Mais especificamente, mostraremos como é possível mudar as coordenadas (x, y) para outras (z, w), sem mudar a estrutura da EDP, de modo a simplificar a condição inicial.

Para isso, consideremos $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, a aplicação dada por $\Phi(x, y) = (x, y - p(x))$.

Note que Φ é uma bijeção C^1, pois $p \in C^1(\mathbb{R})$, cuja inversa é $\xi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\xi(z, w) = (z, w + p(z))$ e que, além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\Phi(x, p(x)) = (x, 0),$$

em outras palavras, Φ transforma o gráfico de p, nas variáveis (x, y), no eixo z, nas variáveis (z, w). Analogamente, $\xi(z, 0) = (z, p(z))$, $z \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, ξ é também diferenciável e a matriz de sua derivada [1] é, em cada ponto $(z, w) \in \mathbb{R}^2$, dada por

$$\xi'(z, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial z}(z, w) & \frac{\partial \xi_1}{\partial w}(z, w) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial z}(z, w) & \frac{\partial \xi_2}{\partial w}(z, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p'(z) & 1 \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que Φ é um difeomorfismo C^1.

Nessas condições, suponhamos que u seja uma solução de (2.1) e calculemos, pela Regra da Cadeia, a derivada de $u \circ \xi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ na direção w

$$\frac{\partial(u \circ \xi)}{\partial w}(z, w) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi(z, w))\frac{\partial \xi_1}{\partial w}(z, w) + \frac{\partial u}{\partial y}(\xi(z, w))\frac{\partial \xi_2}{\partial w}(z, w) = \frac{\partial u}{\partial y}(\xi(z, w)) = f(\xi(z, w)).$$

Isso demostra que, pondo $F := f \circ \xi$, resulta que $U := u \circ \xi$ resolve o novo PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial w} = F, \ \text{em } \mathbb{R}^2 \\ U(z, 0) = \varphi(z), \ z \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

que mantém a mesma estrutura da EDP inicial (derivada em uma direção igual a um termo não-homogêneo), porém com uma condição inicial simplificada.

Reciprocamente, se $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ resolve o PVI (2.2), então é fácil ver que $u := U \circ \Phi$ resolve o PVI (2.1).

A conclusão é, portanto, a demosntração da

Proposição 2.1. *$u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução do PVI (2.1) se, e somente se, $u = U \circ \Phi$, em que $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$ é solução do PVI (2.2).*

[1] Ou seja, a sua matriz jacobiana.

2 Teorema de Frobenius

Queremos, neste capítulo, oferecer um resultado bastante geral para o tratamento de EDP's lineares de primeira ordem do tipo

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \tag{2.3}$$

em que $a, b \in C^2(\Omega)$ em algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que contém a origem. Conhecido como o Método das Características, ele transfere o problema de resolver um PVI para a EDP (2.3) para o problema de se resolver uma família de PVI's para certas EDO's.

O método se sustenta em um resultado auxiliar, que aqui chamaremos "Teorema de Frobenius" (confira [8] para uma formulação mais completa), segundo o qual é possível encontrar um sistema de coordenadas numa vizinhança da origem [2] que reduz, localmente, a estrutura da EDP (2.3) a uma do tipo $U_z(z,w) = F(z,w)$, cuja resolubilidade está dada no Teorema 1.29.

Comecemos com a

Proposição 2.2 (Teorema de Frobenius). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto que contém a origem, $a, b \in C^2(\Omega)$, com $a(0,0) \neq 0$, e consideremos $(Lu)(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$, a parte principal da EDP* (2.3).

Nessas condições, existem abertos de $\mathbb{R}^2$, $A = A_{(z,w)}$ e $B = B_{(x,y)} \subset \Omega$ [3], contendo $(0,0)$, e um difeomorfismo $\xi : A \longrightarrow B$, de classe C^1, tal que para toda $u \in C^1(B)$ e todo $(z,w) \in A$, vale a igualdade

$$\frac{\partial(u \circ \xi)}{\partial z}(z,w) = (Lu)\big(\xi(z,w)\big). \tag{2.4}$$

A demonstração desta proposição será dividida em cinco passos, que enunciaremos como lemas:

Lema 2.3 (1^o Passo). *Se uma aplicação $\xi : A \longrightarrow B$, de classe C^1 entre abertos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, é tal que suas funções coordenadas $\xi_1, \xi_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazem, em todos os pontos $p = (z,w) \in A$, o sistema de EDP's*

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial z}(z,w) = a(\xi(z,w)), \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial z}(z,w) = b(\xi(z,w)), \end{cases} \tag{2.5}$$

então ela satisfaz (2.4).

Demonstração. Com efeito, seja $\xi : A \longrightarrow B$ uma aplicação C^1 entre abertos A, B de $\mathbb{R}^2$ satisfazendo o sistema (2.5). Dados $u \in C^1(B)$ e $(z,w) \in A$, pela Regra da Cadeia, vemos que o lado

[2] Ou seja, um difeomorfismo C^1, $\xi : A_{(z,w)} \longrightarrow B_{(x,y)}$, entre abertos de $\mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$.

[3] Os sub-índices indicam as variáveis a que se referem cada um desses abertos.

esquerdo de (2.4) fica

$$\frac{\partial(u\circ\xi)}{\partial z}(z,w)=\frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(z,w)\big)\frac{\partial\xi_1}{\partial z}(z,w)+\frac{\partial u}{\partial y}\big(\xi(z,w)\big)\frac{\partial\xi_2}{\partial z}(z,w)=$$

$$a\big(\xi(z,w)\big)\frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(z,w)\big)+b\big(\xi(z,w)\big)\frac{\partial u}{\partial y}\big(\xi(z,w)\big),$$

o que é, precisamente, o valor $(Lu)\big(\xi(z,w)\big)$, demonstrando que ξ satisfaz (2.4), como queríamos. $\square$

Lema 2.4 (2^o Passo). *Definindo o campo de vetores $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^2$ por $F(x,y)=\big(a(x,y),b(x,y)\big)$, $(x,y)\in\Omega$, o sistema* (2.5) *escreve-se como*

$$\frac{\partial\xi}{\partial z}(z,w)=F(\xi(z,w)),\ \ (z,w)\in A. \tag{2.6}$$

Demonstração. Com efeito, a derivada parcial de uma aplicação dada em coordenadas é obtida derivando-se coordenada a coordenada:

$$\frac{\partial\xi}{\partial z}(z,w)=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial z}(z,w),\frac{\partial\xi_2}{\partial z}(z,w)\right).$$

Assim, dizer que (ξ_1,ξ_2) satisfaz (2.5) é o mesmo que dizer que

$$\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial z}(z,w),\frac{\partial\xi_2}{\partial z}(z,w)\right)=\Big(a\big(\xi(z,w)\big),b\big(\xi(z,w)\big)\Big)=F\big(\xi(z,w)\big)$$

e a simples igualdade entre pares ordenados diz que, (ξ_1,ξ_2) satisfaz (2.5) se, e somente se, (ξ_1,ξ_2) satisfaz (2.6), demonstrando o lema. $\square$

Lema 2.5 (3^o Passo). *Uma aplicação $\xi:A\longrightarrow B$, contínua entre abertos $A,B\subset\mathbb{R}^2$ e possuindo derivada parcial em z, satisfaz* (2.6) *se, e somente se, ela satisfaz a equação integral*

$$\xi(z,w)=\xi(0,w)+\int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta,\ \ (z,w)\in A. \tag{2.7}$$

Demonstração. Realmente, porque o Teorema Fundamental do Cálculo diz que, $\xi:A\longrightarrow B$ contínua e possuindo derivada parcial em z satisfaz $\frac{\partial\xi}{\partial z}(z,w)=F(\xi(z,w))$ se, e somente se, suas coordenadas (ξ_1,ξ_2) satisfazem

$$\begin{cases}\xi_1(z,w)=\xi_1(0,w)+\int_0^z a\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta,\ \ (z,w)\in A \text{ e}\\ \xi_2(z,w)=\xi_2(0,w)+\int_0^z b\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta,\ \ (z,w)\in A,\end{cases}$$

que é o significado de (2.7), levando em consideração a definição de F e o modo como se define a integral de uma aplicação dada em coordenadas. $\square$

Observação 2.6. *Suponhamos que exista uma aplicação C^1, $\xi : A' \longrightarrow B'$, com $\xi(0,0) = (0,0)$, satisfazendo*

$$\xi(z,w) = \xi(0,w) + \int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta, \;\; (z,w) \in A'.$$

É fácil ver que então a matriz de sua derivada no ponto $(0,0)$ seria

$$\xi'(0,0) = \begin{pmatrix} a(0,0) & \frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0,0) \\ b(0,0) & \frac{\partial \xi_2}{\partial w}(0,0), \end{pmatrix}$$

Por outro lado, sabemos do Teorema da Função Inversa (Veja [7]), que se tivéssemos $\det\big(\xi'(0,0)\big) \neq 0$, então existiria uma vizinhança menor $A \subset A'$ da origem, restrita a qual ξ será um difeomorfismo.

Como o determinante de $\xi'(0,0)$ é

$$\det\big(\xi'(0,0)\big) = a(0,0)\frac{\partial \xi_2}{\partial w}(0,0) - b(0,0)\frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0,0),$$

usando a hipótese $a(0,0) \neq 0$, podemos exigir valores para $\frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0,0)$ e para $\frac{\partial \xi_2}{\partial w}(0,0)$, de maneira a não anular este determinante. Uma escolha simples seria $\frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial \xi_2}{\partial w}(0,0) = 1$, o que nos daria $\det\big(\xi'(0,0)\big) = a(0,0) \neq 0$.

Finalmente, observemos que esta exigência de valores para a derivada $\frac{\partial \xi}{\partial w}(0,0)$ estaria satisfeita no caso em que $\xi(0,w) = (0,w)$, ou seja, $\xi_1(0,w) = 0$ e $\xi_2(0,w) = w$.

Esta observação dá sentido, e demonstra, a conclusão contida no resultado a seguir.

Lema 2.7 (4^o Passo)**.** *Sejam A' e B' abertos de $\mathbb{R}^2$, contendo $(0,0)$. Se uma aplicação $\xi : A' \longrightarrow B'$, de classe C^1, satisfaz a equação de ponto fixo*

$$\xi(z,w) = (0,w) + \int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta, \;\; (z,w) \in A',$$

então existem abertos $A \subset A'$ e $B \subset B'$, contendo a origem, tais que $\xi\,|_A\colon A \longrightarrow B$ é um difeormorfismo de classe C^1 que satisfaz (2.4).

Lema 2.8 (5º Passo). *Existem abertos de* $\mathbb{R}^2$, A' *e* $B' \subset \Omega$, *contendo* $(0,0)$, *e uma aplicação* $\xi : A' \longrightarrow B'$, *de classe* C^1, *satisfazendo o problema de ponto fixo*

$$\xi(z,w) = (0,w) + \int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta, \quad (z,w) \in A'. \tag{2.8}$$

Demonstração. Este lema será demonstrado mostrando que existe um **espaço métrico completo** [4] conveniente X, formado por certas aplicações entre subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, de tal modo que o operador $T : X \longrightarrow X$, dado por

$$\big(T\varphi\big)(z,w) = (0,w) + \int_0^z F\big(\varphi(\theta,w)\big)d\theta,$$

está bem definido e é uma **contração**. Por isso, do Teorema do Ponto Fixo de Banach, concluiremos a existência de um único $\xi \in X$ tal que $T\xi = \xi$, ou seja, um único ξ que cumpre (2.8).

Para isso, consideraremos $\mathbb{R}^2$ munido da norma do máximo e fixaremos alguns parâmetros:

• Consideremos o compacto $K := [-\alpha,\alpha] \times [-\alpha,\alpha]$, para algum $\alpha > 0$, de modo que $K \subset \Omega$. Como F é C^2, do Teorema de Weierstrass, podemos encontrar uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{(x,y)\in K} |F(x,y)|_{\mathbb{R}^2} \le M, \quad \sup_{(x,y)\in K} \|F'(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)} \le M \text{ e } \sup_{(x,y)\in K} \|F''(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)} \le M.$$

Estas desigualdades devem, naturalmente, ser entendidas como:

$$\sup_{(x,y)\in K} |a(x,y)| \le M \text{ e } \sup_{(x,y)\in K} |b(x,y)| \le M,$$

$$\sup_{(x,y)\in K} |a_x(x,y)| \le M, \ \sup_{(x,y)\in K} |a_y(x,y)| \le M,$$

$$\sup_{(x,y)\in K} |b_x(x,y)| \le M \text{ e } \sup_{(x,y)\in K} |b_y(x,y)| \le M,$$

$$\sup_{(x,y)\in K} |a_{xx}(x,y)| \le M, \ \sup_{(x,y)\in K} |a_{xy}(x,y)| \le M, \ \sup_{(x,y)\in K} |a_{yy}(x,y)| \le M,$$

$$\sup_{(x,y)\in K} |b_{xx}(x,y)| \le M, \ \sup_{(x,y)\in K} |b_{xy}(x,y)| \le M \text{ e } \sup_{(x,y)\in K} |b_{yy}(x,y)| \le M.$$

• Para cada $\varepsilon > 0$, definimos o conjunto

$$E_\varepsilon := \left\{ \varphi : [-\varepsilon,\varepsilon]^2 \longrightarrow K : \varphi \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial w} \text{ são contínuas com } \sup_{(z,w)\in[-\varepsilon,\varepsilon]^2} \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial w}(z,w) \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)} \le 2 \right\}.$$

[4] Confira [9], para as definições de espaço métrico completo e contração, bem como o enunciado e a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Por simplicidade, indicaremos o valor $\sup_{(z,w)\in[-\varepsilon,\varepsilon]^2} \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w}(z,w)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)}$ apenas por $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\|_\infty$. [5]

Exercício 2.9. *Mostre que* $d(\varphi,\psi) := \|\varphi-\psi\|_\infty + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w} - \frac{\partial\psi}{\partial w}\right\|_\infty$ *é uma métrica em* E_ε *e que o mesmo é um espaço métrico completo com respeito a esta distância.*

Agora, fixado $\varepsilon > 0$, definimos o operador $T : E_\varepsilon \longrightarrow C\big([-\varepsilon,\varepsilon]^2;\mathbb{R}^2\big)$ pondo, para $\varphi \in E_\varepsilon$,

$$\big(T\varphi\big)(z,w) = (0,w) + \int_0^z F\big(\varphi(\theta,w)\big)d\theta, \ \ (z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$$

e determinemos $\varepsilon_1 > 0$, suficientemente pequeno, de modo que se tenha $T : E_{\varepsilon_1} \longrightarrow E_{\varepsilon_1}$.

Antes de qualquer coisa, precisamos mostrar que, realmente, $T\varphi \in C\big([-\varepsilon,\varepsilon]^2;\mathbb{R}^2\big)$ para $\varphi \in E_\varepsilon$.

Fixado $(z_0,w_0) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$, para todo $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$ podemos escrever

$$\big(T\varphi\big)(z,w) - \big(T\varphi\big)(z_0,w_0) = (0,w-w_0) + \underbrace{\int_0^z F\big(\varphi(\theta,w)\big)d\theta - \int_0^{z_0} F\big(\varphi(\theta,w_0)\big)d\theta}_{I(z,w)}.$$

Se $z > z_0$, então

$$I(z,w) = \int_{z_0}^z F\big(\varphi(\theta,w)\big)d\theta + \int_0^{z_0} \big[F\big(\varphi(\theta,w)\big) - F\big(\varphi(\theta,w_0)\big)\big]\, d\theta.$$

Como F é uniformemente contínua em K e φ é uniformemente contínua em $[-\varepsilon,\varepsilon]^2$, resulta que

$$\int_0^{z_0} \big[F\big(\varphi(\theta,w)\big) - F\big(\varphi(\theta,w_0)\big)\big]\, d\theta \longrightarrow 0, \text{ quando } (z,w) \to (z_0,w_0).$$

Além disso, de $\sup_{(x,y)\in K} |F(x,y)|_{\mathbb{R}^2} \le M$, segue que $\int_{z_0}^z \big|F\big(\varphi(\theta,w)\big)\big|\, d\theta \le M\int_{z_0}^z d\theta = M(z-z_0)$.

De onde, unindo essas duas últimas conclusões, obtemos que

$$I(z,w) \longrightarrow 0, \text{ quando } (z,w) \to (z_0,w_0).$$

O caso em que $z < z_0$ pode ser provado analogamente, completando a demonstração da continuidade de $T\varphi$.

Em segundo, observemos que a derivada parcial $\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}$ existe e é contínua, porque podemos

[5] Aqui $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w}(z,w)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)} := \max\left\{\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}(z,w)\right|, \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}(z,w)\right|\right\}$, ou seja, é a norma do máximo em $\mathbb{R}^2$ do par ordenado $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(z,w)$.

derivar $T\varphi$ sob o sinal de intergral, por meio do Teorema de Leibniz, e obter

$$\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}(z,w) = (0,1) + \int_0^z \left[F_x\big(\varphi(\theta,w)\big)\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}(\theta,w) + F_y\big(\varphi(\theta,w)\big)\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}(\theta,w)\right] d\theta.$$ [6]

Assim, a continuidade de $\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}$ pode ser verificada procedendo como na prova da continuidade de $T\varphi$ acima, pois dadas as hipóteses sobre a continuidade de $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$, o integrando que aparece acima é uma aplicação contínua em $[-\varepsilon,\varepsilon]^2$.

Agora, podemos escolher $\varepsilon^{'} > 0$, de modo que $\big(T\varphi\big)(z,w) \in K$ para todo $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$, bastando para isso observar que

$$\big|\big(T\varphi\big)(z,w)\big| \leq |w| + M|z| \leq (1+M)|(z,w)| \leq (1+M)\varepsilon$$

e então tomar $0 < \varepsilon^{'} \leq \frac{\alpha}{1+M}$.

Finalmente, teremos

$$\left|\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}(z,w)\right| \leq 1 + 4M|z| \leq 1 + 4M\varepsilon^{''} \leq 2,$$

se escolhermos $0 < \varepsilon^{''} \leq \frac{1}{4M}$.

Resumindo, fixando-se então $0 < \varepsilon_1 \leq \min\{\varepsilon^{'},\varepsilon^{''}\}$, teremos que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$T : E_\varepsilon \longrightarrow E_\varepsilon,$$

está bem definido, como queríamos.

Falta agora encontrar $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ de maneira que T seja uma contração.

Em primeiro lugar, dadas $\varphi,\psi \in E_\varepsilon$, com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, e $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$ vemos que

$$\big(T\varphi\big)(z,w) - \big(T\psi\big)(z,w) = \int_0^z \big[F\big(\varphi(\theta,w)\big) - F\big(\psi(\theta,w)\big)\big]\, d\theta,$$

como $\sup_{(x,y)\in K} \|F^{'}(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)} \leq M$ e φ,ψ têm imagem em K, pela Desigualdade do valor médio, $F\mid_K$ torna-se uniformemente Lipschitz com constante de Lipschitz igual a M, de onde obtemos que, para $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$,

$$\big|\big(T\varphi\big)(z,w) - \big(T\psi\big)(z,w)\big| \leq \left|\int_0^z \big|F\big(\varphi(\theta,w)\big) - F\big(\psi(\theta,w)\big)\big|\, d\theta\right| \leq$$

[6]Aqui, naturalmente, $F_x\big(\varphi(\theta,w)\big) = \big(a_x\big(\varphi(\theta,w)\big), b_x\big(\varphi(\theta,w)\big)\big)$ e $F_y\big(\varphi(\theta,w)\big) = \big(a_y\big(\varphi(\theta,w)\big), b_y\big(\varphi(\theta,w)\big)\big)$.

$$\left| \int_0^z M \left| \varphi(\theta,w) - \psi(\theta,w) \right| d\theta \right| \leq M|z| \, \|\varphi - \psi\|_\infty \leq$$

$$M\varepsilon \|\varphi - \psi\|_\infty \leq M\varepsilon d(\varphi,\psi),$$

donde, tomando o supremo sobre todos os $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$, deduzimos que

$$\|T\varphi - T\psi\|_\infty \leq M\varepsilon d(\varphi,\psi). \tag{2.9}$$

Em segundo, para as derivadas em w teremos que

$$\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}(z,w) - \frac{\partial(T\psi)}{\partial w}(z,w) =$$

$$\int_0^z \left[F_x(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(\theta,w) + F_y(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(\theta,w) - F_x(\psi)\frac{\partial \psi_1}{\partial w}(\theta,w) - F_y(\psi)\frac{\partial \psi_2}{\partial w}(\theta,w) \right] d\theta =$$

$$\int_0^z \left[F_x(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial w} - F_x(\varphi)\frac{\partial \psi_1}{\partial w} + F_x(\varphi)\frac{\partial \psi_1}{\partial w} - F_x(\psi)\frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right] d\theta +$$

$$\int_0^z \left[F_y(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - F_y(\varphi)\frac{\partial \psi_2}{\partial w} + F_y(\varphi)\frac{\partial \psi_2}{\partial w} - F_y(\psi)\frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right] d\theta =$$

$$\int_0^z F_x(\varphi)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial w} - \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right) d\theta + \int_0^z \left[F_x(\varphi) - F_x(\psi) \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial w} d\theta +$$

$$\int_0^z F_y(\varphi)\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right) d\theta + \int_0^z \left[F_y(\varphi) - F_y(\psi) \right] \frac{\partial \psi_2}{\partial w} d\theta.$$

Daí, usando agora o fato de as derivadas parciais F_x e F_y serem uniformemente Lipschitz em K, porque $F \in C^2$, tomando normas, para $(z,w) \in [-\varepsilon,\varepsilon]^2$, obtemos

$$\left| \frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}(z,w) - \frac{\partial(T\psi)}{\partial w}(z,w) \right| \leq$$

$$\left| \int_0^z M \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} - \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right| d\theta \right| + \left| \int_0^z M|\varphi - \psi| \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right| d\theta \right| +$$

$$\left| \int_0^z M \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right| d\theta \right| + \left| \int_0^z M|\varphi - \psi| \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right| d\theta \right| \leq$$

$$\left| \int_0^z M \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} - \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \right\|_\infty d\theta \right| + \left| \int_0^z M\|\varphi - \psi\|_\infty 2d\theta \right| +$$

$$\left| \int_0^z M \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} - \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \right\|_\infty d\theta \right| + \left| \int_0^z M\|\varphi - \psi\|_\infty 2d\theta \right| \leq$$

$$|z|M\left\|\frac{\partial\varphi_1}{\partial w}-\frac{\partial\psi_1}{\partial w}\right\|_\infty+|z|M\|\varphi-\psi\|_\infty 2+|z|M\left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial w}-\frac{\partial\psi_2}{\partial w}\right\|_\infty+|z|M\|\varphi-\psi\|_\infty 2\leq$$

$$|z|Md(\varphi,\psi)+|z|Md(\varphi,\psi)2+|z|Md(\varphi,\psi)+|z|Md(\varphi,\psi)2\leq$$
$$\big(M+2M+M+2M\big)\varepsilon d(\varphi,\psi)=6M\varepsilon d(\varphi,\psi).$$

De onde obtemos, após tomar o supremo em $(z,w)\in[-\varepsilon,\varepsilon]^2$, que

$$\left\|\frac{\partial(T\varphi)}{\partial w}-\frac{\partial(T\psi)}{\partial w}\right\|_\infty\leq 6M\varepsilon d(\varphi,\psi),$$

o que somado a (2.9), nos dá

$$d(T\varphi,T\psi)\leq 7M\varepsilon d(\varphi,\psi),\quad \varphi,\psi\in E_\varepsilon.$$

Vemos, a partir daí que, escolhendo $0<\varepsilon_0\leq\min\left\{\frac{1}{14M},\varepsilon_1\right\}$, teremos que

$$d(T\varphi,T\psi)\leq\frac{1}{2}d(\varphi,\psi),\quad \varphi,\psi\in E_{\varepsilon_0},$$

demonstrando que $T:E_{\varepsilon_0}\longrightarrow E_{\varepsilon_0}$ é uma contratação.

Nestas condições, o Teorema do Ponto Fixo de Banach pode ser invocado, fornecendo um único ponto fixo para T, ou seja, um único $\xi\in E_{\varepsilon_0}$ tal que $T\xi=\xi$.

Noutras palavras, um único $\xi\in E_{\varepsilon_0}$ tal que, para todo $(z,w)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]^2$, vale a igualdade

$$\xi(z,w)=\underbrace{(0,w)+\int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big)d\theta,}_{=(T\xi)(z,w)}$$

o que completa a demonstração deste lema. □

Estamos agora em plenas condições de demonstrar a Proposição 2.2.

Demonstração. Com efeito, seja $\xi:[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]^2\longrightarrow K$ o único ponto fixo de T obtido no lema anterior e destaquemos que:

(i) $\frac{\partial\xi}{\partial z}(z,w)=F(\xi(z,w))\Longrightarrow\frac{\partial(u\circ\xi)}{\partial z}(z,w)=(Lu)(\xi(z,w)),\ \ (z,w)\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]^2,\ u\in C^1(\Omega).$
Em particular, $\frac{\partial\xi}{\partial z}$ é contínua.

(ii) A derivada parcial em w, $\frac{\partial \xi}{\partial w}$, existe e é também contínua, porque todos os elementos de E_{ε_0} satisfazem esta condição.

Note que, (i) e (ii) garantem que ξ é de classe C^1.

(iii) $\xi(0,0) = (0,0)$.

(iv) $\frac{\partial \xi_1}{\partial z}(0,0) = a(0,0)$, $\frac{\partial \xi_2}{\partial z}(0,0) = b(0,0)$, $\frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial \xi_2}{\partial w}(0,0) = 1 \Longrightarrow$

$$\det\left(\xi^{'}(0,0)\right) = a(0,0) \neq 0.$$

Nessas condições, o Teorema da Funçõ inversa garante a existência de abertos $A \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^2$ e $B \subset K$, com $(0,0) \in A$ e $(0,0) = \xi(0,0) \in B$, de maneira que $\xi : A \longrightarrow B$ é um difeomorfismo[7], o que termina a demonstração. $\square$

Antes de começarmos a explorar as consequências deste resultado no estudo das EDP's lineares de primeira ordem, é importante que façamos algumas observações a seu respeito.

Observações 2.10. *(1) O importante Teorema de Frobenius é demonstrado por indução no número n de campos de vetores em Ω, $L_1, L_1, \cdots, L_n \in \mathfrak{X}(\Omega)$. A demonstração que apresentamos aqui consiste, precisamente, no caso $n = 1$ para um campo de classe C^2.*

A conclusão deste teorema é que, sobre certas condições que envolvem a independência linear destes campos, é possível encontrar um sistema de coordenadas locais, relativo a qual, cada um desses campos se expressa como a derivada parcial em alguma direção. O aluno interessado pode consultar [8].

(2) A demonstração que demos para a Proposição 2.2, por meio de um teorema de ponto fixo, é muito semelhante a demonstração do Teorema de Picard, sobre existência e unicidade de soluções para PVI's envolvendo EDO's do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \ t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

em que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é C^1, ou apenas localmente uniformemente Lipschitz.

[7] Ou um sistema de coordenadas C^1.

Mais especificamente, a prova do Teorema de Picard segue as mesmas ideias da construção que realizamos nestas diversas etapas (porém, bem mais simplificadas), pois ela consiste em encontrar um caminho $x : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

isto é, um ponto fixo para o operador

$$\big(T\varphi\big)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

em algum espaço de funções conveniente.

Podemos encontrar mais detalhes sobre este tema em [10].

A primeira consequência que apresentamos será o teorema a seguir, que diz respeito ao problema que chamaremos "Resolubilidade local".

Teorema 2.11. *Sejam $a, b \in C^2(\Omega)$ e $h \in C^1(\Omega)$, em que Ω é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$.*

Se $a(0,0) \neq 0$, então existe um aberto $B \subset \Omega$, com $(0,0) \in B$, tal que a EDP

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \;\; (x,y) \in B, \tag{2.10}$$

possui uma solução $u \in C^1(B)$.

Demonstração. Com efeito, como $a(0,0) \neq 0$, podemos considerar o difeomorfismo $\xi : A \longrightarrow B$ dado no Teorema de Frobenius e criar o novo termo não-homogêneo $H := h \circ \xi \in C^1(A)$.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que A é um retângulo, de onde podemos concluir, como na prova do Teorema 1.29, que a nova EDP em A

$$\frac{\partial U}{\partial z} = H,$$

possui uma solução $U \in C^1(A)$.

Segue daí que $u := U \circ \xi^{-1} \in C^1(B)$, resolve (2.10) em B.

Realmente, porque por um lado, do Teorema de Frobenius devemos ter que

$$a\big(\xi(z,w)\big)u_x\big(\xi(z,w)\big) + b\big(\xi(z,w)\big)u_y\big(\xi(z,w)\big) = (Lu)\big(\xi(z,w)\big) = \frac{\partial(u \circ \xi)}{\partial z}(z,w), \;\; (z,w) \in A,$$

e, por outro, sendo $u \circ \xi = U$, vale

$$h\big(\xi(z,w)\big) = H(z,w) = \frac{\partial U}{\partial z}(z,w) = \frac{\partial(u\circ\xi)}{\partial z}(z,w), \quad (z,w) \in A.$$

Igualando os termos vemos ,que para todo $(z,w) \in A$,

$$a\big(\xi(z,w)\big)u_x\big(\xi(z,w)\big) + b\big(\xi(z,w)\big)u_y\big(\xi(z,w)\big) = h\big(\xi(z,w)\big).$$

Daí, como $\xi : A \longrightarrow B$ é bijeção, a igualdade acima equivale a

$$a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) = h(x,y), \quad (x,y) \in B,$$

demonstrando a afirmação. $\square$

3 Método das Características

O Teorema de Frobenius, discutido na seção anterior, fornece uma propriedade qualitativa muito importante sobre a parte principal de EDP's lineares de primeira ordem, a saber, que sob certas condições, $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ equivale a $\frac{\partial U}{\partial z}$, em uma vizinhança da origem (caso seja $a(0,0) \neq 0$).

Nesta seção, queremos desenvolver um método de construção de soluções para certos tipos de PVI's associados a algumas EDP's lineares de primeira ordem, o chamado **Método das Características**. Este método tem, em sua essência, vários pontos em comum com o Teorema de Frobenius e, de certo modo, ele melhora sua conclusão em, ao menos, dois pontos:

(1^o) Ele proporciona uma resolubilidade mais forte do que a local, substituindo vizinhança de um ponto por vizinhança de uma curva.

(2^o) Garante a unicidade de solução numa vizinhança dessa curva.

Vejamos os detalhes de como isso acontece.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, $a, b \in C^1(\Omega)$ e consideremos a parte principal

$$Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$$

da forma geral da EDP linear de primeira ordem

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = h(x,y),$$

em que, por hora, o coeficiente c e o termo não-homogêneo h não serão analisados.

Definição 2.12 (Conjunto Característico). *(i) Dado $p = (x_0, y_0) \in \Omega$, a* **forma característica (ou polinômio característico) de L em** *p é o polinômio de garu 1, em $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, definido por*

$$\chi_L(p;\xi) := a(p)\xi_1 + b(p)\xi_2 \Longleftrightarrow \chi_L(p;\xi) = \big(a(p), b(p)\big) \cdot (\xi_1, \xi_2).$$

(ii) Dizemos que um vetor não-nulo $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ é um **vetor característico para L em** *$p \in \Omega$, quando ele é raiz da forma cacterística de L em p, ou seja, quando*

$$\chi_L(p;\xi) = 0 \Longleftrightarrow \big(a(p), b(p)\big) \cdot (\xi_1, \xi_2) = 0.$$

(iii) O conjunto formado por todos os vetores característicos para L em $p \in \Omega$ é chamado o **conjunto característico** *para L em p e é indicado por*

$$\mathit{Char}_p(L) := \big\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } \chi_L(p;\xi) = 0\big\}.$$

Observação 2.13. *Antes de prosseguir, é interessante percebermos que o conjunto característico $\mathit{Char}_p(L)$ tem uma interpretação geométrica bastante clara e útil.*

Para cada $p \in \Omega$, de duas uma:

- *Ou $\mathit{Char}_p(L) \cup \{(0,0)\}$ é uma reta passando pela origem;*

- *Ou $\mathit{Char}_p(L) \cup \{(0,0)\}$ é todo o $\mathbb{R}^2$.*

Quando $\mathit{Char}_p(L) \cup \{(0,0)\}$ é uma reta, o conjunto característico determina, portanto, uma única direção, uma "direção característica", se acontecer $\mathit{Char}_p(L) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$, então todas as direções seriam "características".

Note ainda que Char$_p(L)$ nunca será vazio, visto que os coeficientes a, b serão aqui sempre supostos a valores reais. Quando esta restrição não é feita, a possibilidade de ser vazio passa a ser uma alternativa efetiva e, quando isso ocorre num determinado ponto p, dizemos que o operador é "elítico" neste p, como acontece com o "operador de Cauchy-Riemann":

$$Lu := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

cujo característico em todo $p \in \mathbb{R}^2$ seria

$$\text{Char}_p(L) := \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } \xi_2 = i\xi_1\right\} = \varnothing,$$

portanto ele é "elítico" em todos os pontos.

Exemplos 2.14. *(1) Considerando $Lu = u_x + u_y$, em $\mathbb{R}^2$, temos que em todo $p \in \mathbb{R}^2$, a forma característica de L é $\chi_L(p;\xi) = \xi_1 + \xi_2$, logo seu conjunto característico é*

$$\text{Char}_p(L) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } \xi_2 = -\xi_1\right\}.$$

Naturalmente, neste caso, como Lu possui coeficientes constantes, seu conjunto característico não varia com p.

(2) Considerando $Lu = xu_x + yu_y$, em $\mathbb{R}^2$, temos que em todo $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a forma característica de L é $\chi_L(p;\xi) = x_0\xi_1 + y_0\xi_2$, logo seu conjunto característico é

$$\text{Char}_p(L) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } y_0\xi_2 = -x_0\xi_1\right\}.$$

Neste caso, em todo $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ não nulo, Char$_p(L) \cup \{(0,0)\}$ é uma reta, já em $p = (0,0)$, tem-se que Char$_p(L) \cup \{(0,0)\} = \mathbb{R}^2$.

Isso aconteceu, porque em $p = (0,0)$ ambos os coeficientes de Lu anularam-se simultaneamente.

Definição 2.15 (Curvas Características). *Seja $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva de classe C^1 regular [8], cuja imagem indicamos por M. Diremos que γ é* **característica para** *L em um ponto $p = \gamma(t_0) \in M$,*

[8] Ou seja, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Lembre-se também que, neste caso, $\gamma'(t)$ é um vetor tangente a γ no ponto $\gamma(t)$.

quando seu vetor normal $\nu(p)$, neste ponto, é um vetor característico para L em p, isto é, se tivermos [9]

$$\nu(p) \in \mathit{Char}_p(L) \Longleftrightarrow \chi_L\,(p;\nu(p)) = 0 \Longleftrightarrow \big(a(p), b(p)\big)\cdot\nu(p) = 0.$$

Por outro lado, diremos que γ é **não-característica para** *L, quando ela não é característica em p, qualquer que seja $p \in M$, isto é, quando para todo $t \in I$ tem-se*

$$\nu(\gamma(t)) \notin \mathit{Char}_{\gamma(t)}(L).$$

Exemplos 2.16. *(1) Consideremos a EDP $u_y = f(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$, portanto $Lu = u_y$. Assim, $a(p) = 0$ e $b(p) = 1$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, logo sua forma característica em cada $p \in \mathbb{R}^2$ é*

$$\chi_L(p;\xi) = \xi_2.$$

Estudemos, segundo a "caracteristicidade" para L, as curvas $\gamma(t) = (t,0)$ e $\eta(t) = (0,t)$, $t \in \mathbb{R}$, que apareceram na introdução deste capítulo.

Com efeito, dado $t \in \mathbb{R}$, $\eta'(t) = (0,1) \Longrightarrow \nu\big(\eta(t)\big) = (1,0)$, donde

$$\chi_L\,\big(\eta(t);\nu\big(\eta(t)\big)\big) = \chi_L\big((0,t);(1,0)\big) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

o que nos mostra que η é característica para $Lu = u_y$ em todos os pontos $\eta(t)$.

Por outro lado, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = (1,0) \Longrightarrow \nu\big(\gamma(t)\big) = (0,1)$, portanto, para qualquer $t \in \mathbb{R}$

$$\chi_L\,\big(\gamma(t);\nu\big(\gamma(t)\big)\big) = \chi_L\big((t,0);(0,1)\big) = 1 \neq 0,$$

dizendo que γ é não-característica para $Lu = u_y$.

(2) Seja agora $Lu = u_x + yu_y$ em $\mathbb{R}^2$. Em cada $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, sua forma característica é então

$$\chi_L\big((x_0,y_0);\xi\big) = \xi_1 + y_0\xi_2.$$

Consideremos $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função C^1, e a curva $\gamma(t) := (t, q(t))$, cujo vetor tangente é dado por $\gamma'(t) := (1, q'(t))$, portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\nu\big(\gamma(t)\big) = \big(-q'(t), 1\big).$$

[9] Noutras palavras, a direção normal a γ em p aponta para uma direção característica de L em p.

Assim,

$$\chi_L\big(\gamma(t);\nu\big(\gamma(t)\big)\big) = \chi_L\big((t,q(t));(-q^{'}(t),1)\big) = -q^{'}(t)+q(t).$$

Desse modo, $\chi_L\big(\gamma(t);\nu\big(\gamma(t)\big)\big) = -q^{'}(t)+q(t)$*, para todo* $t\in\mathbb{R}$*, dizendo que* γ *é característica para* L *em todo* $\gamma(t)$ *se, e somente se*

$$q^{'}(t) = q(t),\ t\in\mathbb{R},$$

ou seja, se, e somente se, $q(t) = ce^t$*, para algum* $c\in\mathbb{R}$*.*

Concluímos assim que as únicas curvas características para $Lu = u_x + yu_y$*, que são gráficos de funções* C^1*, são os gráficos dos múltiplos da exponencial.*

Observação 2.17. *Seja* $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ *uma curva de classe* C^1 *regular com coordenadas* $\gamma(t) = (\alpha(t),\beta(t))$*,* $t\in I$*. Dado* $p\in M$*, então* $p=\gamma(t_0)$ *para algum* $t_0\in I$ *e, podemos supor que* $\beta^{'}(t_0)\neq 0$*. A partir daí é possível encontrar todos os vetores normais* $\nu(p) = (\eta_1,\eta_2)$ *em* p*, pois, por definição* $\nu(p)\cdot\gamma^{'}(t_0) = 0$*, em que o ponto "$\cdot$" indica o produto escalar de* $\mathbb{R}^2$*.*

Assim,

$$\alpha^{'}(t_0)\eta_1 + \beta^{'}(t_0)\eta_2 = 0 \Longleftrightarrow \eta_2 = -\frac{\alpha^{'}(t_0)}{\beta^{'}(t_0)}\eta_1,$$

o que nos dá, em particular, um exemplo concreto de vetor normal

$$\nu(\gamma(t_0)) = \left(1, -\frac{\alpha^{'}(t_0)}{\beta^{'}(t_0)}\right).$$

Naturalmente, se for $\alpha^{'}(t_0)\neq 0$*, então*

$$\nu(\gamma(t_0)) = \left(-\frac{\beta^{'}(t_0)}{\alpha^{'}(t_0)}, 1\right).$$

é um vetor normal.

Observação 2.18. *Lembremos que, dada a direção* $\gamma^{'}(t_0)$*, com* $p=\gamma(t_0)$*, ela determina uma reta passando pela origem, que é, portanto, um subespaço vetorial* E *de* $\mathbb{R}^2$ [10]*. Daí, naturalmente, seu complemento ortogonal* $E^{\perp}$ *é também um subespaço de* $\mathbb{R}^2$ *e vale que* $(E^{\perp})^{\perp} = E$*, donde, dizer*

[10] Tem-se $E = [\gamma^{'}(t_0)]$ = subespaço gerado por $\gamma^{'}(t_0)$. Se $\nu(p)\in \mathrm{Char}_p(L)$, então $E^{\perp} = [\nu(p)]$, e vale $\mathbb{R}^2 = E\oplus E^{\perp}$

que $\nu(p) = (\eta_1, \eta_2) \in$ Char$_p(L)$ equivale a dizer que

$$a(\gamma(t_0))\eta_1 + b(\gamma(t_0))\eta_2 = 0 \Longleftrightarrow \big(a(p), b(p)\big) \cdot \underbrace{(\eta_1, \eta_2)}_{=\nu(p)} = 0,$$

ou seja, $\big(a(p), b(p)\big) \in (E^{\perp})^{\perp} = E$, pois $\nu(p) \in E^{\perp}$.

Por outro lado, como $\gamma^{'}(t_0) \in E$ e E é uma reta passando pela origem, da análise acima concluímos que, afirmar que γ é característica para L em $p = \gamma(t_0)$, equivale a afirmar que $\gamma^{'}(t_0)$ é paralelo ao vetor $\big(a(p), b(p)\big)$, o que significa dizer que existe um real $\lambda(t_0)$ de modo que

$$\gamma^{'}(t_0) = \lambda(t_0) \underbrace{\big(a(\gamma(t_0)), b(\gamma(t_0))\big)}_{=\left(a(p), b(p)\right)}.$$

Finalmente, pondo $F(x,y) := \big(a(x,y), b(x,y)\big)$, $(x,y) \in \Omega$, criamos um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, e, em termos dele, a igualdade acima se exprime como

$$\gamma^{'}(t_0) = \lambda(t_0) F\big(\gamma(t_0)\big),$$

a qual, a menos do número **desconhecido** $\lambda(t_0)$, se assemelha muito a uma EDO.

A observação acima, **quase** demonstrou que

"Uma curva C^1 regular $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ é característica para $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ em todo ponto $\gamma(t)$ se, e somente se, γ é solução da EDO

$$\dot{\varphi}(t) = F\big(\varphi(t)\big),\ t \in I."$$

Demonstraremos, na próxima observação, que quando os coeficientes a e b não se anulam simultaneamente em Ω [11], isso é sempre verdade, a menos de uma reparametrização de γ. Isto é, ela prova a existência de um difeormorfismo de classe C^1, $\theta : J \longrightarrow I$, definido em um intervalo J, de modo que $\gamma \circ \theta$ é solução desta EDO.

Observação 2.19. *Seja $F(x,y) := \big(a(x,y), b(x,y)\big)$, $(x,y) \in \Omega$, o campo de vetores associado a $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$, em que os coeficientes são $C^1(\Omega)$ e não se anulam simultaneamente em Ω, e suponhamos que $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ é uma curva C^1 regular e característica para L em* **todo ponto** *$\gamma(t)$, $t \in I$.*

[11] Ou seja, $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 > 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$.

Nessas condição, da observação acima, para cada $t \in I$, existe um real $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ de maneira que

$$\gamma^{'}(t) = \lambda(t)F\big(\gamma(t)\big),\ t \in I. \tag{2.11}$$

Supondo $\gamma(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$, a EDO acima equivale ao sistema de EDO's

$$\begin{cases} \alpha^{'}(t) = \lambda(t)a\big(\alpha(t), \beta(t)\big),\ t \in I, \\ \beta^{'}(t) = \lambda(t)b\big(\alpha(t), \beta(t)\big),\ t \in I. \end{cases} \tag{2.12}$$

Note, primeiramente, que as escolhas dos números $\lambda(t)$ criam uma função $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $\lambda(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$ *e*

- $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua.*

Com efeito, se para algum $t_0 \in I$, $\lambda(t_0) = 0$, teríamos $\gamma^{'}(t_0) = \lambda(t_0)F\big(\gamma(t_0)\big) = 0$, ou seja, $\gamma^{'}(t_0) = 0$, contradizendo que γ é regular.

Agora, fixado um $t_0 \in I$, podemos supor que $a\big(\gamma(t_0)\big) \neq 0$ e, sendo a e γ funções contínuas, existe uma vizinhança V, de t_0, tal que $a\big(\gamma(t)\big) \neq 0$ para todo $t \in V$. Donde, pela primeira igualdade em (2.12),

$$\lambda(t) = \frac{\alpha^{'}(t)}{a\big(\gamma(t)\big)},\ t \in V$$

e da continuidade de $\alpha^{'}$, vemos que λ é contínua em V, como quociente de funções contínuas.

Pela arbitrariedade do $t_0 \in I$, a continuidade de λ em I segue.

Note que, resulta dessas duas propriedades, e do Teorema do Valor Intermediário, que ou $\lambda(t) > 0$ para todo $t \in I$, ou $\lambda(t) < 0$ para todo $t \in I$. Suponhamos que seja a primeira alternativa.

Nessas condições, consideremos $\Lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Como, $\Lambda^{'}(t) = \lambda(t) > 0$ para todo $t \in I$, segue que Λ é uma função (estritamente) crescente, em particular, é injetiva.

Sendo Λ contínua, sua imagem $J = \Lambda(I)$ é um intervalo, donde $\Lambda : I \longrightarrow J$ é um difeomorfimo de classe C^1 (pelo Teorema da Função Inversa).

Seja $\theta := \Lambda^{-1} : J \longrightarrow I$ e definamos uma reparametrização para γ pondo $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \theta : J \longrightarrow \Omega$. Explicitamente

$$\tilde{\gamma}(s) = \big((\alpha \circ \theta)(s), (\beta \circ \theta)(s)\big) =: \big(\tilde{\alpha}(s), \tilde{\beta}(s)\big),\ s \in J.$$

Daí, pela Regra da Cadeia e pela primeira igualdade em (2.12)*, temos que*

$$\frac{d\,\tilde{\alpha}}{ds}(s) = \alpha^{'}(\theta(s))\,\theta^{'}(s) = \lambda\big(\theta(s)\big)a\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\,\theta^{'}(s). \tag{2.13}$$

Sendo $\theta = \Lambda^{-1}$*, do Teorema da Função Inversa, resulta que para todo* $s \in J$ *vale* [12]

$$\theta^{'}(s) = \frac{1}{\Lambda'(\theta(s))} = \frac{1}{\lambda(\theta(s))},$$

o que em (2.13) *nos dá*

$$\frac{d\,\tilde{\alpha}}{ds}(s) = a\big(\tilde{\gamma}(s)\big),\ s \in J.$$

De modo interamente análogo demonstra-se que

$$\frac{d\,\tilde{\beta}}{ds}(s) = b\big(\tilde{\gamma}(s)\big),\ s \in J,$$

que unido à última igualdade escreve-se

$$\frac{d\,\tilde{\gamma}}{ds}(s) = F\big(\tilde{\gamma}(s)\big),\ s \in J,$$

demonstrando assim uma das implicações da:

Proposição 2.20. *Sejam* a, b *coeficientes* $C^1(\Omega)$ *que não se anulam simultaneamente em* Ω*.*

Uma curva $\gamma : I \longrightarrow \Omega$*, de classe* C^1 *e regular, é característica para* $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ *em todo ponto* $\gamma(t)$*,* $t \in I$*, se, e somente se,* γ *admite uma reparametrização que resolve a EDO*

$$\dot{\varphi} = F(\varphi).$$

Exercício 2.21. *Por que a outra implicação da proposição é óbvia?*

Exemplo 2.22. *Seja* $Lu = xu_x - 2u_y$ *e determinemos, por meio da proposição anterior, todas as suas curvas características.*

Com efeito, os coeficientes das derivadas que ocorrem na equação são

$$a(x,y) = x \text{ e } b(x,y) = -2, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

[12] $s = \Lambda \circ \Lambda^{-1}(s) = \Lambda \circ \theta(s) \Longrightarrow 1 = \Lambda^{'}\big(\theta(s)\big)\,\theta^{'}(s) \Longrightarrow \theta^{'}(s) = \frac{1}{\Lambda^{'}(\theta(s))}.$

logo eles não se anulam simultaneamente e são C^∞.

Nestas condições, o campo F associado a L é $F(x,y) = (x,-2)$ e a EDO correspondente fica

$$(\dot{\alpha},\dot{\beta}) = \dot{\varphi} = F(\varphi) = \big(a(\varphi), b(\varphi)\big) = (\alpha,-2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \alpha(t), \\ \dot{\beta}(t) = -2, \end{cases}$$

sendo α e β as coordenadas de φ, ou seja, $\varphi = (\alpha,\beta)$.

O par de EDO's acima é de resolução imediata, com soluções

$$\alpha(t) = ce^t \text{ e } \beta(t) = -2t + d, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

e constantes $c, d \in \mathbb{R}$ dadas.

Desse modo, as curvas características para $Lu = xu_x - 2u_y$ são aquelas que admitem uma reparametrização do tipo $\gamma(t) = (ce^t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. [13]

O método das características (descrito na Observação 2.27 a baixo), cuja justificativa reside na prova do teorema a seguir, fornece um mecanismo que permite construir a solução para certos PVI's. As diversas observações realizadas acima, darão sustentação a este método.

Teorema 2.23. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto e suponhamos satisfeitas as seguintes hipóteses:*

(i) $a, b \in C^2(\Omega)$ *com* $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 > 0$, *para todo* $(x,y) \in \Omega$;

(ii) $h \in C^1(\Omega)$; *e*

(iii) $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ *uma curva não-característica para* $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$.

Então, existe $\Omega' \subset \Omega$, uma vizinhança da imagem $Im\,(\gamma) = \gamma(I)$, tal que para toda $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, o PVI

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega' \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I, \end{cases} \tag{2.14}$$

possui uma única solução u definida em Ω'.

[13] Foi mostrado que as soluções da EDO são da forma $\varphi(t) = (ce^t, d - 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, para cada par de constantes $c, d \in \mathbb{R}$ dadas. Mas, note que, fazendo $t = \theta(s) := s + d/2$, concluímos que a reparametrização de φ

$$\gamma(s) := (\varphi \circ \theta)(s) = (ce^s e^{d/2}, -2s) = (c^* e^s, -2s), \ s \in \mathbb{R},$$

em que $c^* := ce^{d/2}$, se apresenta na forma simplificada usada na solução do exemplo.

Como mencionado anteriormente, o método das característica é fortemente baseado na prova do Teorema de Frobenius. A demonstração do teorema acima constitui, precisamente, o desenvolvimento deste método e sua demonstração será concluída após a emissão de um conjunto de ideias e afirmações em cadeia:

Ideia 1: Seja $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o campo dado por $F(x,y) = \big(a(x,y), b(x,y)\big)$ e observemos que uma aplicação $\xi : A \longrightarrow B$, de classe C^1 entre abertos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, com $\{0\} \times I \subset A$ e $\gamma(I) \subset B \subset \Omega$, satisfaz o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial z}(z,w) = F\big(\xi(z,w)\big), \ (z,w) \in A \\ \xi(0,w) = \gamma(w), \ w \in I, \end{cases} \tag{2.15}$$

se, e somente se, ela satisfaz a equação integral

$$\xi(z,w) = \gamma(w) + \int_0^z F\big(\xi(\theta,w)\big) d\theta, \ \ (z,w) \in A. \tag{2.16}$$

Em caso afirmativo, para todo $w \in I$, a matriz da derivada de ξ nos pontos $(0,w)$ seria dada por

$$\xi^{'}(0,w) = \begin{pmatrix} a(\gamma(w)) & \gamma_1^{'}(w) \\ b(\gamma(w)) & \gamma_2^{'}(w) \end{pmatrix}.$$

Como γ é não-característica para L, os vetores $F(\gamma(w))$ e $\gamma^{'}(w)$ não são paralelos, ou seja, não são múltiplo um do outro, donde $\det \big[\xi^{'}(0,w)\big] \neq 0$, para todo $w \in I$, e ξ seria um **difeomorfismo local** de uma vizinhança de $\{0\} \times I$ sobre uma vizinhança de $\gamma(I)$, de acordo com o Teorema da Função Inversa.

Afirmação 1: Para cada $w_0 \in I$, existem abertos de $\mathbb{R}^2$, A_{w_0} e B_{w_0}, com $(0,w_0) \in A_{w_0}$ e $\gamma(w_0) \in B_{w_0}$, e $\xi_{w_0} : A_{w_0} \longrightarrow B_{w_0}$, de classe C^1, que é solução de (2.16).

Demonstração. Com efeito, fixado $w_0 \in I$, usando as ideias do que já fizemos na prova do Teorema de Frobenius (o Lema 2.8, para ser mais preciso), não é difícil concluir a existência de um $\varepsilon_{w_0} > 0$ de modo que em $E_{\varepsilon_{w_0}}(w_0)$ existe um único ξ que satisfaz (2.16) no retângulo $\overline{B}_\varepsilon\big((0,w_0)\big) := [-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}] \times [w_0 - \varepsilon_{w_0}, w_0 + \varepsilon_{w_0}]$, sendo, para cada $\varepsilon > 0$,

$$E_\varepsilon(w_0) := \left\{ \varphi : \overline{B}_\varepsilon\big((0,w_0)\big) \longrightarrow \overline{B}_{r_0}\big(\gamma(w_0)\big) : \varphi \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial w} \text{ são contínuas e } \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right\|_\infty \leq 2M(r_0) \right\},$$

em que $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\|_\infty$ representa o valor

$$\sup_{(z,w)\in\overline{B}_\varepsilon\left((0,w_0)\right)}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial w}(z,w)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)}$$

e $0<r_0<1$ é escolhido de modo que a bola fechada de centro $\gamma(w_0)$ e raio $2r_0$ cumpra

$$\overline{B}_{2r_0}\big(\gamma(w_0)\big)\subset\Omega.$$

Dito isto, basta então por $A_{w_0}:=B_\varepsilon\big((0,w_0)\big)$, $B_{w_0}:=B_{2r_0}\big(\gamma(w_0)\big)$ e ξ_{w_0} a restrição do ponto fixo ξ ao conjunto aberto A_{w_0}. $\square$

Observação 2.24. *Analisando a prova do Lemma 2.8, percebemos que para todo ε com*

$$0<\varepsilon\leq\min\left\{\frac{r_0}{2M(r_0)},\frac{1}{14M(r_0)}\right\},$$

em $E_\varepsilon(w_0)$ existirá um único ponto fixo para o operador

$$\big(T\varphi\big)(z,w):=\gamma(w)+\int_0^z F\big(\varphi(\theta,w)\big)d\theta,$$

em que $M(r_0)\geq 1$ é um número tal que

$$\sup_{(x,y)\in\overline{B}_{r_0}\left(\gamma(w_0)\right)}|F(x,y)|_{\mathbb{R}^2}\leq M(r_0),\qquad \sup_{(x,y)\in\overline{B}_{r_0}\left(\gamma(w_0)\right)}\|F^{'}(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}\leq M(r_0),$$

$$\sup_{(x,y)\in\overline{B}_{r_0}\left(\gamma(w_0)\right)}\|F^{''}(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}\leq M(r_0)\ \ \textit{e}\ \sup_{w\in[w_0-r_0,w_0+r_0]\cap I}|\gamma^{'}(w)|\leq M(r_0).$$

Ideia 2: Sejam $V:=\bigcup_{w\in I}A_w$ e $W:=\bigcup_{w\in I}B_w$, em que os abertos A_w e B_w são os obtidos na afirmação anterior. Nessas condições, definimos $\xi:V\longrightarrow W$ pondo

$$\xi(z,w):=\xi_{w_0}(z,w),\ \text{ se } (z,w)\in A_{w_0}.$$

Afirmação 2: Existem abertos $A\subset V$ e $B\subset W$, com $\{0\}\times I\subset A$ e $\gamma(I)\subset B$, tais que $\xi:A\longrightarrow B$ está bem definida e é um difeomorfismo local.

Demonstração. Com efeito, em primeiro lugar, se $w_0, w_1 \in I$ são tais que $A_{w_0} \cap A_{w_1} \neq \varnothing$, então para todo $(z, w) \in A_{w_0} \cap A_{w_1}$ valem as duas igualdades

$$\begin{array}{l} \xi_{w_0}(z,w) = \gamma(w) + \int_0^z F\big(\xi_{w_0}(\theta,w)\big)d\theta \\ \quad \text{e} \\ \xi_{w_1}(z,w) = \gamma(w) + \int_0^z F\big(\xi_{w_1}(\theta,w)\big)d\theta. \end{array}$$

Por isso, fixado um ponto $(z^{'}, w^{'}) \in A_{w_0} \cap A_{w_1}$, ambos os caminhos

$$\xi_{w_0}(\cdot, w^{'}) : [-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ e } \xi_{w_1}(\cdot, w^{'}) : [-\varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_1}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

são soluções do PVI para EDO

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = F\big(\varphi(t)\big), \\ \varphi(0) = \gamma(w^{'}), \end{cases}$$

cuja solução deve ser única, de acordo com o Teorema de Picard, consequentemente $\xi_{w_0}(t, w^{'}) = \xi_{w_1}(t, w^{'})$, para todo $t \in [-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}] \cap [-\varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_1}]$.

Como, $z^{'} \in [-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}] \cap [-\varepsilon_{w_1}, \varepsilon_{w_1}]$, em particular

$$\xi_{w_0}(z^{'}, w^{'}) = \xi_{w_1}(z^{'}, w^{'}),$$

e assim demonstra-se que ξ está bem definida.

A existência dos abertos A, B, como enunciado, vem do fato de que cada ξ_w é C^1 com $\det\big[\xi^{'}(0, w)\big] \neq 0$, para todo $w \in I$, como já observado na Ideia 1. $\square$

Observação 2.25. *Vale a pena ressaltarmos que a prova que demos para as duas afirmações acima precisaram ser realizadas em uma vizinhança de cada ponto $(0, w_0)$, com $w_0 \in I$, uma vez que o mecanismo principal em suas demonstrações é o Teorema do ponto fixo de Banach, o qual exige o encolhimento dos domínios das funções, no espaço das aplicações em que buscamos este ponto fixo, a fim de que o operador usado na solução destes problemas esteja bem definido e seja uma contração. Contudo, no caso em que o intervalo I é* **compacto**, *é possível aplicar este teorema "globalmente", em uma vizinhança do conjunto $\{0\} \times I$ (prove!).*

Podemos então demonstrar o Teorema 2.23.

Demonstração do Teorema 2.23. Com efeito, seja $\xi : A \longrightarrow B$ o difeomorfismo local construído acima [14] e, como sabemos, por contrução, para cada $w \in I$ podemos escolher um aberto A_w, com $(0, w) \in A_w$, de modo que $\xi_w = \xi\,|_{A_w}: A_w \longrightarrow B_w$ é um difeomorfismo sobre o aberto B_w contendo $\gamma(w)$.

Por outro lado seja, conforme o primeiro exemplo na introdução deste capítulo mostrou, $U \in C^1(A)$ a única solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z}(z, w) = \big(h \circ \xi\big)(z, w), \ (z, w) \in A \\ U(0, w) = f(w), \ w \in I, \end{cases} \tag{2.17}$$

e definamos $u : B \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$u(x, y) := U\big(\xi_w^{-1}(x, y)\big), \quad \text{para } (x, y) \in B_w.$$

Exercício 2.26. *Demonstre que $u : B \longrightarrow \mathbb{R}$, como definida acima, é a única solução de* (2.14), *o que concluirá a prova do Teorema 2.23, fazendo $\Omega' := B$.*

Sugestão: Dado um ponto $(x, y) \in B_{w_0}$, considere $\xi_{w_0}^{-1} : B_{w_0} \longrightarrow A_{w_0}$ a inversa de $\xi\,|_{A_{w_0}}$. Se $\xi_{w_0}^{-1}(x, y) = \big(z(x, y), w(x, y)\big)$, são as coordenadas desta inversa e sendo

$$U(z, w) = f(w) + \int_0^z (h \circ \xi)(\theta, w) d\theta$$

a fórmula para a solução de $\frac{\partial U}{\partial z}(z, w) = \big(h \circ \xi\big)(z, w)$, sujeita a $U(0, w) = f(w)$, então basta verificar que

$$u(x, y) = U\big(\xi_{w_0}^{-1}(x, y)\big) = f\big(w(x, y)\big) + \int_0^{z(x,y)} (h \circ \xi)\big(\theta, w(x, y)\big) d\theta$$

resolve o PVI quando $(x, y) \in B_{w_0}$.

Outra maneira seria proceder como na prova do Teorema 2.11, usando explicitamente que ξ_{w_0} satisfaz a conclusão do Teorema de Frobenius. $\square$

Observação 2.27 (Método das Características). *Sabemos, da Proposição 2.20, que uma curva $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ é característica para $Lu = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y$ em todo ponto $\gamma(t)$, $t \in I$, se, e somente se, γ admite uma reparametrização $\varphi : J \longrightarrow \Omega$, que resolve a EDO*

$$\dot{\varphi}(s) = F(\varphi(s)) = \big(a(\varphi(s)), b(\varphi(s))\big), \ s \in J. \tag{2.18}$$

[14] Observe que, como discutido nos Lemas 2.3 e 2.4, isso implica que esta ξ também satisfaz a conclusão do Teorema de Frobenius: $\frac{\partial (u \circ \xi)}{\partial z}(z, w) = (Lu)\big(\xi(z, w)\big)$, para $u \in C^1(B)$ e $(z, w) \in A$.

Por outro lado, se $\xi : A \longrightarrow B$ *é como obtido na prova do Teorema 2.23, ele cumpre*

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial z}(z,w) = F\big(\xi(z,w)\big), \ (z,w) \in A \\ \xi(0,w) = \gamma(w), \ w \in I. \end{cases}$$

Assim, fixado $w_0 \in I$, *como* $[-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}] \ni t \mapsto \varphi(t) := \xi(t, w_0) \in \mathbb{R}^2$ *resolve a EDO* (2.18) *com* $\xi(0, w_0) = \gamma(w_0)$ *ela é, na verdade, pelo Teorema de Picard, a única solução do PVI*

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = F(\varphi(t)), \ t \in (-\varepsilon_{w_0}, \varepsilon_{w_0}) \\ \varphi(0) = \gamma(w_0). \end{cases}$$

Nestas condições, se para cada $w \in I$ *fixo resolvermos o PVI*

$$\begin{cases} \dot{\varphi_w}(z) = F(\varphi_w(z)), \\ \varphi_w(0) = \gamma(w) \end{cases} \tag{2.19}$$

em algum intervalo aberto $J_w \subset \mathbb{R}$ *que contem o zero, necessariamente teremos que*

$$\varphi_w(z) = \xi(z, w),$$

uma vez que há unicidade de solução para (2.19) *e* $(-\varepsilon_w, \varepsilon_w) \ni t \mapsto \xi(t, w) \in \mathbb{R}^2$ *já o resolve.*

Conclusão: *A fim de obter o difeomorfismo local* $\xi = \xi(z, w)$, *usado para construir a solução na prova do Teorema 2.23, basta resolver, para cada* $w \in I$ *fixo o problema*

$$\begin{cases} \dot{\varphi_w}(z) = F(\varphi_w(z)), \\ \varphi_w(0) = \gamma(w) \end{cases}$$

e teremos $\xi(z, w) = \varphi_w(z)$.

Exemplo 2.28. *Vamos ilustrar o Método das Características encontrando uma solução para o PVI*

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = xy, \ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u(x,0) = f(x), \ x > 0, \end{cases} \tag{2.20}$$

em que $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função* C^1 *dada.*

Noutras palavras, queremos encontrar um aberto $\Omega' \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *contendo* $(0, \infty) \times \{0\}$ *(imagem da curva inicial), e* $u \in C^1(\Omega')$ *que o resolve.*

Solução: *Com efeito, primeiramente, observemos que o domínio da EDP é* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *os coeficientes dela são $a(x,y) = -y$ e $b(x,y) = x$, portanto C^∞, os quais não se anulam simultaneamente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $Lu = -yu_x + xu_y$.*

Em segundo, a curva inicial é $\gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada por $\gamma(w) = (w,0)$.

Verifiquemos agora se γ é não-característica para L. Como, para todo $w \in (0,\infty)$, $\gamma'(w) = (1,0)$, seu normal em todo ponto $\gamma(w)$ é $\nu\big(\gamma(w)\big) = (0,1)$. Sendo, para todo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$,

$$\chi_L((x_0,y_0);\xi) = -y_0\xi_1 + x_0\xi_2,$$

resulta que

$$\chi_L\left(\gamma(w);\nu\big(\gamma(w)\big)\right) = \chi_L\big((w,0);(0,1)\big) = w \neq 0, \text{ para todo } w > 0,$$

mostrando que γ é não-característica para L.

De acordo com a observação anterior, a fim de obter o difeomorfimo local ξ, fixado $w > 0$, precisamos resolver, em algum intervalo contendo o zero, o PVI de EDO's

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_w}{dz}(z) = F\big(\varphi_w(z)\big), \\ \varphi_w(0) = \gamma(w) = (w,0), \end{cases}$$

em que $F(x,y) := (-y,x)$.

Escrevendo a incónita φ_w em coordenadas, $\varphi_w(z) = \big(\alpha_w(z),\beta_w(z)\big)$, o sistema acima é o mesmo que [15]

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_w}{dz}(z) = -\beta_w(z), \\ \frac{d\beta_w}{dz}(z) = \alpha_w(z), \\ \alpha_w(0) = w, \\ \beta_w(0) = 0. \end{cases}$$

Note que, introduzindo a unidade imaginária i, podemos reescrever as duas EDO's deste sistema como

$$\frac{d\left(\alpha_w + i\beta_w\right)}{dz}(z) = -\beta_w(z) + i\alpha_w(z) = i\big(\alpha_w(z) + i\beta_w(z)\big),$$

donde, se pusermos $\Phi_w(z) := \alpha_w(z) + i\beta_w(z)$, o sistema que precisamos resolver equivale a [16]

$$\begin{cases} \Phi_w'(z) = i\Phi_w(z), \\ \Phi_w(0) = w, \end{cases}$$

[15] $F\big(\varphi_w(z)\big) = F\big(\alpha_w(z),\beta_w(z)\big) = \big(-\beta_w(z),\alpha_w(z)\big)$.

[16] Lembre-se que, dado um número $a \in \mathbb{C}$, a EDO $\dot{x} = ax$ tem $x(t) = x(0)e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, como "solução geral".

cuja solução é $\Phi_w(z) = we^{iz}$, $z \in \mathbb{R}$.

Desse modo, $\alpha_w(z) + i\beta_w(z) = \Phi_w(z) = we^{iz} = w\big(\cos z + i\sin z\big)$, *ou seja,*

$$\alpha_w(z) = w\cos z \ \text{ e } \ \beta_w(z) = w\sin z, \ w > 0 \ \text{ e } \ z \in \mathbb{R}.$$

Como a Observação 2.27 ensinou, o difeomorfismo local ξ *deve então ser dado por*

$$\xi(z,w) = \varphi_w(z) = \big(w\cos z, w\sin z\big), \ w > 0 \ \text{ e } \ z \in \mathbb{R},$$

dizendo assim que (z,w) *são as coordenadas polares no plano e que, em particular, as curvas características para* $Lu = -yu_x + xu_y$ *são as circunferências de centro na origem.*

Por outro lado, para construir a solução de (2.20)*, precisamos considerar* $H(z,w) = (h\circ\xi)(z,w)$*, em que* $h(x,y) = xy$*, logo* $H(z,w) = w^2\cos z\sin z$*, e o PVI*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z}(z,w) = w^2\cos z\sin z, \ (z,w) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ U(0,w) = f(w), \ w > 0. \end{cases}$$

Como sabemos, a solução deste último é

$$U(z,w) = f(w) + \int_0^z w^2\cos s\sin s\, ds = f(w) + \frac{w^2}{2}\int_0^z \sin(2s)ds =$$

$$f(w) - \frac{w^2}{4}\cos(2s)\Big|_0^z = f(w) - \frac{w^2}{4}\big(\cos 2z - 1\big) = f(w) - \frac{w^2}{4}\cos(2z) + \frac{w^2}{4},$$

isto é,

$$U(z,w) = f(w) - \frac{w^2}{4}\cos(2z) + \frac{w^2}{4}, \ (z,w) \in \mathbb{R}\times(0,\infty).$$

Finalmente, se $x = w\cos z$ *e* $y = w\sin z$*, para* $(z,w) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$*, então* $w = \sqrt{x^2+y^2}$ *e daí*

$$\cos z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \text{ e } \ \sin z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

e a solução, nas variáveis (x,y)*, se exprime como*

$$u(x,y) = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) + \frac{x^2+y^2}{4} - \frac{x^2+y^2}{4}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) + \frac{y^2}{2},$$

ou seja, $u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2}{2}$*, para* $(x,y) \neq (0,0)$.

4 Curvas características espaciais

A seção anterior mostrou como as curvas características são uteis no estudo do PVI

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \\ u(\gamma(w)) = f(w),\ w \in I, \end{cases}$$

e sua importância aparece de duas maneiras bastante distintas:

- As curvas não-características são boas como curvas iniciais a fim de se obter unicidade de solução em alguma de suas vizinhanças.
- As características ajudam a construir a solução do PVI nas codições do item acima.

Por outro lado, no início deste capítulo, vimos que o problema

$$\begin{cases} u_y = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = \psi(y),\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

cuja condição inicial é dada sobre uma curva característica de $u_y = 0$, de duas uma: "Ou ele não possui solução alguma, ou possui infinitas soluções".

Este exemplo também deixou claro que a existência, ou a não existência de soluções dependeu da natureza da condição inicial ψ (ψ constante, possui solução, ψ não constante, não possui solução).

O objetivo desta seção é mostrar que este fenômeno é um fato geral que acontece toda vez que impomos condições iniciais sobre uma curva característica da EDP e o conceito que possibilita esta conclusão é o de "curva característica espacial".

Sejam $a, b, h \in C^1(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, e, como antes, consideremos a EDP linear de primeira ordem:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y). \tag{2.21}$$

Definição 2.29. *Seja* $G : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a aplicação dada por* $G(x, y) = \big(a(x, y), b(x, y), h(x, y)\big)$. *Diremos que uma curva* $A : I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, *de classe* C^1 *no intervalo* I, *com coordenadas*

$$A(t) = \big(\underbrace{\alpha(t), \beta(t)}_{=\gamma(t)}, \delta(t)\big) =: \big(\gamma(t), \delta(t)\big),$$

é uma **curva característica espacial** *para* (2.21) *no ponto* $A(t_0)$, *quando*

$$A^{'}(t_0) = G\big(\gamma(t_0)\big) \Longleftrightarrow A^{'}(t_0) = \Big(a\big(\gamma(t_0)\big), b\big(\gamma(t_0)\big), h\big(\gamma(t_0)\big)\Big),$$

ou, mais explicitamente, quando

$$\begin{cases} \alpha^{'}(t_0) = a\big(\gamma(t_0)\big), \\ \beta^{'}(t_0) = b\big(\gamma(t_0)\big), \\ \delta^{'}(t_0) = h\big(\gamma(t_0)\big). \end{cases} \tag{2.22}$$

Por outro lado, diremos que A *é* **não-característica espacial** *quando, para todo* $t \in I$,

$$A^{'}(t) \neq G\big(\gamma(t)\big).$$

Observação 2.30. *Observe que as igualdades usadas na definição de curva característica espacial apresentadas em* (2.22) *dizem, em particular, que as duas primeiras coordenadas da curva* $A(t) = \big(\alpha(t), \beta(t), \delta(t)\big)$, *que indicamos por* $\gamma(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$, *por satisfazerem*

$$\begin{cases} \alpha^{'}(t_0) = a\big(\gamma(t_0)\big) \text{ e} \\ \beta^{'}(t_0) = b\big(\gamma(t_0)\big), \end{cases}$$

constituem uma curva caracterítica (plana) para L *no ponto* $\gamma(t_0)$. [17]

Como vimos na Observação 2.27, a "colagem" das imagens das **curvas características planas**, que interceptam pontos de uma curva não-característica plana, constroem o domínio $\Omega^{'} = B$ da única solução $u \in C^1(\Omega^{'})$ de

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = h(x, y), \ (x, y) \in \Omega^{'} \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I, \end{cases}$$

quando $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ é uma curva não característica.

[17] $\gamma^{'}(t_0) = F\big(\gamma(t_0)\big)$, em que $F(x, y) = \big(a(x, y), b(x, y)\big)$.

Analogamente, a observação a seguir mostrará que a “colagem” das imagens das **curvas características espaciais**, que interceptam pontos de uma curva não-característica espacial, constroem o gráfico desta solução u. Para isso, é importante nos lembrarmos que o gráfico de u é dada por

$$\text{Graf }(u) = \big\{\big(x, y, u(x,y)\big) : (x,y) \in B\big\} = \big\{\big(\xi(z,w), u\big(\xi(z,w)\big)\big) : (z,w) \in A\big\},$$

em que $\xi : A \longrightarrow B$ é o difeomorfismo local considerado na prova do Teorema 2.23.

Observação 2.31. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva* **não-característica** *(plana) para*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y). \tag{2.23}$$

Dada $f \in C^1(I;\mathbb{R})$, uma condição inicial qualquer, consideremos $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Gamma(w) := \big(\gamma(w), f(w)\big) = \big(\gamma_1(w), \gamma_2(w), f(w)\big).$$

Por outro lado, seja $\Omega^{'}$ é o domínio da única solução $u \in C^1(\Omega^{'})$ de

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega^{'} \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I, \end{cases}$$

e suponhamos que $\Lambda : J \longrightarrow \Omega^{'} \times \mathbb{R}$, com coordenadas $\Lambda(z) = \big(\alpha(z), \beta(z), \delta(z)\big)$, seja uma curva **característica espacial** *para* (2.22)*, em todo ponto $\Lambda(z)$, com $\Lambda(0) = \Gamma(w_0)$, para algum $w_0 \in I$. Noutras palavras, isso quer dizer que a curva* **característica** *espacial Λ intersepta a curva* **não-característica** *espacial Γ no ponto $\Gamma(w_0)$.*

Como destacado acima, as duas primeiras coordenadas de Λ, $\varphi(z) = \big(\alpha(z), \beta(z)\big)$, definem uma curva caracterítica (plana) para $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$, em todo ponto $\varphi(z)$. Além disso, ela também cumpre $\varphi(0) = \gamma(w_0)$, o que, em símbolos, se escreve como

$$\begin{cases} \alpha^{'}(z) = a\big(\alpha(z), \beta(z)\big), \ z \in J \\ \beta^{'}(z) = b\big(\alpha(z), \beta(z)\big), \ z \in J \\ \big(\alpha(0), \beta(0)\big) = \gamma(w_0). \end{cases}$$

Da Observação 2.27, [18] *devemos então ter que, para todo $z \in J$,*

$$\xi(z, w_0) = \big(\alpha(z), \beta(z)\big) = \varphi(z). \tag{2.24}$$

[18] A existência do ξ depende apenas dos coeficientes $a, b \in C^2(\Omega)$ e da curva não-característica γ.

Sendo, pelo Teorema 1.29, $U(z,w) := f(w) + \int_0^z h\big(\xi(t,w)\big)dt$ *a única solução de*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z}(z,w) = h\big(\xi(z,w)\big), \ (z,w) \in A \\ U(0,w) = f(w), \ w \in I, \end{cases}$$

em particular, por (2.24),

$$U(z,w_0) = f(w_0) + \int_0^z h\big(\xi(t,w_0)\big)dt = f(w_0) + \int_0^z h\big(\varphi(t)\big)dt.$$

Mas estamos supondo que $\Lambda(z) = \big(\alpha(z), \beta(z), \delta(z)\big)$ *é característica espacial para* (2.23), *logo* $\delta^{'}(t) = h\big(\alpha(t), \beta(t)\big)$, *o que na integral acima nos dá*

$$U(z,w_0) = f(w_0) + \int_0^z \delta^{'}(t)dt \overbrace{=}^{T.F.C.} f(w_0) + \delta(z) - \delta(0).$$

Finalmente, como

$$\Lambda(0) = \Gamma(w_0) \Longleftrightarrow \alpha(0) = \gamma_1(w_0), \ \beta(0) = \gamma_2(w_0) \text{ e } \ \delta(0) = f(w_0),$$

concluímos que $U(z,w_0) = \delta(z)$, *para todo* $z \in J$.

Conclusão: *Se* $\Lambda(z) = \big(\alpha(z), \beta(z), \delta(z)\big)$, *é uma curva característica espacial para* (2.22), *em todo ponto* $\Lambda(z)$, *que intersepta a curva* $\Gamma(w) := \big(\gamma(w), f(w)\big)$ *em algum ponto, sendo* $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ *não-característica plana para* L, *então para todo* $z \in J$, $\Lambda(z)$ *está no gráfico da solução* $u : \Omega^{'} \longrightarrow \mathbb{R}$ *do PVI*

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega^{'} \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I, \end{cases}$$

porque

$$\textit{Graf}\ (u) = \Big\{\big(x,y,u(x,y)\big) : (x,y) \in \Omega^{'}\Big\} = \left\{ \left(\xi(z,w), \underbrace{u\big(\xi(z,w)\big)}_{=U(z,w)} \right) : (z,w) \in A \right\}$$

e o argumento acima mostrou que [19]

$$\Lambda(z) = \big(\alpha(z), \beta(z), \delta(z)\big) = \big(\xi(z,w_0), U(z,w_0)\big) = \big(\xi(z,w_0), u\big(\xi(z,w_0)\big)\big)\,.$$

Essa última observação servirá como lema na demonstração do principal resultado desta seção:

[19] Lembre-se "$U = u \circ \xi$".

Teorema 2.32. *Sejam* $a, b \in C^2(\Omega)$, *que não se anulam simultaneamente em* Ω, $h \in C^1(\Omega)$, *sendo* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um subconjunto aberto e* $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ *uma curva* **característica plana** *para* $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y)$, *que satisfaz em* I *a EDO* $\dot{\gamma} = F(\gamma)$.

Dada uma condição inicial $f \in C^1(I;\mathbb{R})$, *consideremos o PVI*

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \; (x,y) \in \Omega \\ u(\gamma(w)) = f(w), \; w \in I. \end{cases} \tag{2.25}$$

Definindo a curva $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *pondo* $\Gamma(w) := \big(\gamma(w), f(w)\big)$, *temos:*

(i) Se Γ *for* **característica espacial** *em todo ponto* $\Gamma(w)$, *então o PVI possui infinitas soluções em algum subconjunto aberto* $\Omega' \subset \Omega$.

(ii) Se Γ *for* **não-característica espacial**, *então o PVI não possui soluções.*

Demonstração. (i) Com efeito, fixado $w_0 \in I$, seja J um intervalo aberto, com $0 \in J$, definido no qual podemos considerar $\eta : J \longrightarrow \Omega$ uma curva não-característica para L com $\eta(0) = \gamma(w_0)$ [20]. Escolhamos, arbitrariamente, uma função $g \in C^1(J;\mathbb{R})$ tal que $g(0) = f(w_0)$.

Pelo que nós já demonstramos, existe um aberto $\Omega' \subset \Omega$ contendo a imagem de η, $\eta(J) \subset \Omega'$, tal que o problema

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \; (x,y) \in \Omega' \\ u(\eta(z)) = g(z), \; z \in J. \end{cases} \tag{2.26}$$

possui uma única solução $u \in C^1(\Omega')$ [21].

Agora, notemos que a curva $\Lambda(z) := \big(\eta(z), g(z)\big)$ é não-característica espacial [22] e $\Gamma : I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}$, dada por $\Gamma(w) = \big(\gamma(w), f(w)\big)$, é característica espacial, de maneira que $\Lambda(0) = \Gamma(w_0)$.

Se considerarmos então $I' \subset I$ um intervalo aberto menor, com $w_0 \in I'$ e $\Gamma(I') \subset \Omega' \times \mathbb{R}$, a Observação 2.30 assegura que $\Gamma(w) \in$ Graf (u), para todo $w \in I'$, donde $u(\gamma(w)) = f(w)$, para todo $w \in I'$, mostrando que a solução u de (2.26) é também solução de (2.25), uma vez que a EDP ela já resolvia. Como existem infinitas g's, de classe $C^1(J;\mathbb{R})$ com $g(0) = f(w_0)$, e cada uma delas produz uma **única** solução u de (2.26), concluímos que (2.25) possui infinitas soluções, comprovando (i).

(ii) Se, por outro lado, $\Gamma(w) = \big(\gamma(w), f(w)\big)$ for não-característica especial e supusermos, caso contrário, que exista alguma $u : \Omega_0 \subset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ solução para (2.25), duas situação se apresentam:

[20] Por que uma curva com estas propriedades existe?

[21] Para cada g, este PVI possui uma única solução.

[22] Por que?

- De $u(\gamma(w)) = f(w)$, derivando em w temos $\gamma_1'(w)u_x\big(\gamma(w)\big)+\gamma_2'(w)u_y\big(\gamma(w)\big) = f'(w)$, para todo $w \in I$.

- A EDP ao longo de γ fica: $a\big(\gamma(w)\big)u_x\big(\gamma(w)\big) + b\big(\gamma(w)\big)u_y\big(\gamma(w)\big) = h\big(\gamma(w)\big)$, para todo $w \in I$.

  Como, por hipótese, γ é característica plana para L, ambos os lados esquerdos das igualdades acima devem ser iguais. Consequentemente, devemos também ter, para todo $w \in I$, que $h\big(\gamma(w)\big) = f'(w)$. Mas, então, Γ deveria ser característica espacial em todos os pontos $\Gamma(w)$, o que foi suposto inicialmente não ser o caso, completando a demonstração.

$\square$

5 Exercícios

(1) Seja $\xi : A \longrightarrow B$, o ponto fixo obtido na nossa proposição "Teorema de Frobenius". Demonstre que, se $m \in \mathbb{N}$ e $a, b \in C^{m+1}(\mathbb{R}^2)$, então existe $\varepsilon = \varepsilon(m) > 0$ tal que $\xi \in C^m((-\varepsilon, \varepsilon)^2; \mathbb{R}^2)$.

(2) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $a, b \in C^2(\Omega)$ funções que não se anulam simultaneamente em Ω e considere $Lu(x,y) = a(x,y)u_x(x,y) + b(x,y)u_y(x,y)$, a parte principal da EDP de 1^a ordem correspondente. Pedimos:

(i) Verifique que L obedece a "Regra de Leibniz", isto é, para todas $u, v \in C^1(\Omega)$ e $(x,y) \in \Omega$, vale a igualdade

$$L(u \cdot v)(x,y) = u(x,y) \cdot Lv(x,y) + v(x,y) \cdot Lu(x,y).$$

(ii) Mostre que a cada ponto $p = (x_0, y_0) \in \Omega$ corresponde abertos $A_p, B_p \subset \mathbb{R}^2$, com $(0,0) \in A_p$ e $p \in B_p$, e um difeormorfimo C^1, $\xi_p : A_p \longrightarrow B_p$, de maneira que, para todo $(z,w) \in A_p$ e toda $u \in C^1(B_p)$, vale a igualdade:

$$\frac{\partial (u \circ \xi_p)}{\partial z}(z,w) = (Lu)(\xi_p(z,w))$$

(iii) Dizemos que L é **localmente resolúvel** em Ω, quando para todo $p \in \Omega$ existe um aberto B_p, com $p \in B_p \subset \Omega$, de modo que para toda $f \in C^1(B_p)$, existe $u \in C^1(B_p)$ tal que $Lu(x,y) = f(x,y)$ para todo $(x,y) \in B_p$.

Mostre que L, nas condições do item anterior, é localmente resolúvel.

(3) Sejam $a, b \in C^2(\Omega)$, com $a^2(x,y) + b^2(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, e $c, h \in C^1(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto. Essa questão tem por objetivo obter existência de soluções para PVI's envolvendo EDP's lineares de primeira ordem em sua forma geral

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = h(x,y).$$

Como antes, consideremos $Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$, a parte principal dessa EDP, e seja $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva C^1 regular e não característica para L.

Sabemos então que existe um difeomorfismo de classe C^1, $\xi : A \longrightarrow \Omega'$, em que A, Ω' são abertos de $\mathbb{R}^2$, com $\{0\} \times I \subset A$ e $\gamma(I) \subset \Omega' \subset \Omega$, de tal maneira que para toda $u \in C^1(\Omega')$

vale a igualdade
$$\frac{\partial(u \circ \xi)}{\partial z}(z,w) = (Lu)(\xi(z,w)), \quad (z,w) \in A.$$
Nessas condições pedimos:

(i) Pondo $C(z,w) := (c \circ \xi)(z,w)$ e $H(z,w) := (h \circ \xi)(z,w)$, $(z,w) \in A$, encontre uma solução $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$ da EDP
$$\frac{\partial U}{\partial z} + C(z,w)U = H(z,w).$$

Sugestão: Considere $\mathcal{C}(z,w) := \int_0^z C(\theta,w)d\theta$, uma "primitiva parcial" de C, e multiplique a EDP acima por $e^{\mathcal{C}(z,w)}$ para obter
$$e^{\mathcal{C}(z,w)}\frac{\partial U}{\partial z} + C(z,w)e^{\mathcal{C}(z,w)}U = e^{\mathcal{C}(z,w)}H(z,w).$$

A partir daí fica simples determinar uma solução U.

(ii) Mostre que para cada $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ existe a única solução $u : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ do PVI
$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega' \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I. \end{cases}$$

(4) Determine o conjunto característico de cada uma das equações lineares de primeira ordem a seguir (significa o mesmo que determinar o conjunto característico da parte principal):

(i) $u_x - 3u_y = x^2$

(ii) $-y^3u_x - 2u_y = x\sin(y)$

(iii) $-x \cdot yu_x + \log(x)u_y = y^2x^3$

(iv) $(x^2-1)u_x + (1-y^2)u_y = 0$

(5) Determine as curvas características de cada uma das equações lineares de primeira ordem a seguir (significa o mesmo que determinar as curvas características da parte principal):

(i) $3u_x - 5u_y = \sin(x^2+y^2)$

(ii) $u_x + u_y = xe^{-y}$

(iii) $-xu_x + yu_y = 3xy$, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(iv) $xu_x + yu_y = e^{xy}$, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(6) Sejam $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva regular (isto é $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$) de classe C^1 e $a, b \in C^1(\Omega)$. Mostre que γ é característica para $Lu(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ em $\gamma(t_0)$ se, e somente se, $\gamma'(t_0)$ é paralelo ao vetor $F(\gamma(t_0))$, em que $F(x,y) = (a(x,y), b(x,y))$.

(7) Sejam $a, b, h \in C^1(\Omega)$ e $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva regular de classe C^1 característica para $Lu(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y$ em $\gamma(t_0)$.

Verifique que, se u é solução de $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y)$, então

$$\frac{d(u \circ \tilde{\gamma})}{dt}(t_0) = Lu(\tilde{\gamma}(t_0)) = h(\tilde{\gamma}(t_0)),$$

para alguma reparametrização $\tilde{\gamma}$ de γ.

Em palavras, u também resolve a EDP ao longo de suas características.

(8) **Generalização da noção de curva característica para EDP's de 2^a ordem:**

Sejam $a, b, c \in C^0(\Omega)$ e considere

$$Lu(x,y) = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

a parte principal de uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis independentes. Dado $p = (x_0, y_0) \in \Omega$ definimos:

(i) A **forma característica** para L em p é o polinômio homogêneo de grau dois dado por

$$\chi_L(p,\xi) := a(p)\xi_1^2 + b(p)\xi_1\xi_2 + c(p)\xi_2^2\,, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) $\xi \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$ diz-se um **vetor característico** para L em p quando $\chi_L(p,\xi) = 0$.

(iii) O **conjunto característico** para L em p é o conjunto

$$\mathrm{Char}_p(L) := \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } \chi_L(p,\xi) = 0\right\}.$$

(iv) Uma curva regular de classe C^1, $\gamma : I \longrightarrow \Omega$, diz-se **característica** para L em $\gamma(t_0) = p$ quando seu vetor normal em $\gamma(t_0)$, $\nu(\gamma(t_0))$, é característico para L em p.

Nessas condições determine os conjuntos característicos das EDP's a seguir:

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, em $\mathbb{R}^2$ (Compare com o que ocorre nas EDPs de 1^a ordem).

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, em $\mathbb{R}^2$ (Compare com o Exercício 6 do Capítulo 1).

(iii) $\frac{\partial u}{\partial t} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, em $\mathbb{R}^2$.

(9) Conclua que não existem curvas características para a Equação de Laplace.

(10) Verifique que, dados $c > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, as curvas $\gamma_x(t) := (t, x - ct)$ e $\eta_x(t) := (t, x + ct)$, $t \in \mathbb{R}$, são características para a Equação da onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ e represente-as geometricamente.

(11) Permitindo, por um momento, que os coeficientes das EDP's lineares de primeira ordem possam ser **funções a valores complexos**, isto é, $a, b \in C^1(\Omega; \mathbb{C})$, em que Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$, estude as questões a seguir:

(i) Encontre o conjunto característico para $Lu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. [23]

(ii) Encontre o conjunto característico para $Lu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $u \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$. [24]

(iii) Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ com $f(z) = f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$, em que $u, v \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Verifique que, se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então o par de funções (u, v) satisfaz as equações de Cauchy-Riemann apresentadas nos Exercícios do Capítulo 1.

(12) Verifique se as condições do Método das Características estão satisfeitas nos PVI's abaixo especificados e, caso estejam, encontre uma solução para eles.

(i)

$$\begin{cases} 3u_x - 5u_y = \sin(x + y) \\ u(x, 0) = e^x, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[23] Este L é denominado o *Operador de Cauchy-Riemann* e é indicado por $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

[24] Este operador costuma ser indicado por $\frac{\partial}{\partial z}$ e aplicá-lo a uma função complexa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ significa tomar a derivada complexa f' dessa função.

(ii)

$$\begin{cases} u_x + u_y = xe^{-y} \\ u(x, 1-x) = \cos(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} -xu_x + yu_y = 3xy \\ u(0, y) = \log(-y), \ y < 0. \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = 2xy \\ u(x, -x) = \frac{1}{x}, \ x < 0. \end{cases}$$

(13) Seja $H \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e, para cada $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, considere U_f a única solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z}(z, w) = H(z, w), \ (z, w) \in \mathbb{R}^2 \\ U(0, w) = f(w), \ w \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Demonstre que, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ convergindo para $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$, então U_{f_n} converge para U_f uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^2$.

(14) Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $a, b \in C^2(\Omega)$ coeficientes que não se anulam simultaneamente em Ω e $h \in C^1(\Omega)$. Seja também $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva não característica (regular e C^1) para $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = h(x, y)$ e $\xi : A \longrightarrow \Omega'$ o difeomorfismo local correspondente.

Para cada $f \in C^1(I; \mathbb{R})$, considere u_f a única solução do PVI

$$\begin{cases} a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = h(x, y), \ (x, y) \in \Omega' \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I. \end{cases}$$

Demonstre que, se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $C^1(I; \mathbb{R})$ convergindo para $f \in C^1(I; \mathbb{R})$ uniformemente em compactos de I, então u_{f_n} converge para u_f uniformemente em compactos de Ω'.

Observação: A conclusão final com esta questão é que, nas condições enunciadas, o PVI é **Bem Posto**, ou seja, para cada condição inicial f ele possui solução única e essas soluções dependem continuamente da f.

(15) **Propagação das singularidades:**

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $a, b \in C^2(\Omega)$ coeficientes que não se anulam simultaneamente em Ω e $h \in C^1(\Omega)$. Seja também $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva não característica (regular e C^1) para $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y)$ e $\xi : A \longrightarrow \Omega^{'}$ o difeomorfismo local correspondente.

Permitindo, por um momento, que as soluções u possam ser descontínuas e também não deriváveis, prove que:

(i) Se a condição inicial $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é descontínua num ponto $w_0 \in I$, então a solução u do PVI correspondente

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega^{'} \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I. \end{cases}$$

é descontínua em todos os pontos da imagem da curva característica que passa por $\gamma(w_0)$.

(ii) Se a condição inicial $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ não é diferenciável num ponto $w_0 \in I$, então a solução u do PVI correspondente

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = h(x,y), \ (x,y) \in \Omega^{'} \\ u(\gamma(w)) = f(w), \ w \in I. \end{cases}$$

não é diferenciável em ponto algum da imagem da curva característica que passa por $\gamma(w_0)$. [25]

(16) Verifique na prática a conclusão do item (ii) aplicada ao problema

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = xy, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ u(x,0) = f(x), \ x > 0, \end{cases}$$

em que $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

[25] As conclusões (i) e (ii) explicam o que significa dizer que *as singularidades são propagadas ao longo das características.*

Capítulo 3

EDP's semilineares de 2^a ordem

A teoria das EDP's lineares de segunda ordem não tem nada a ver com a teoria das EDP's lineares de primeira ordem e pode, naturalmente, ser apresentada de modo completamente independente do que foi discutido no capítulo anterior.

Explicaremos como as equações de Poisson, do Calor e da Onda são, essencialmente, as únicas EDP's semilineares que existem e, desta forma, elas são as únicas que precisam ser estudadas. A principal ferramenta que utilizaremos para estudá-las é a Série de Fourier, que discutiremos no próximo capítulo.

Vale a pena mencionar que o estudo destas equações possibilitou a criação de outras teorias muito interessantes e prosperas como, por exemplo, a Análise Funcional (veja [12] para entender as razões) e a Teoria Espectral (o aluno interessado pode iniciar seus estudos em [13]), além de tornar algo mais natural o advento dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$'s e os de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$'s, para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$ (confira [11] para uma leitura mais aprofundada sobre estes temas).

1 Introdução

A forma geral de uma EDP semilinear de 2^a ordem em duas variáveis independentes $(x, y) \in \Omega$ é

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + d_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + d_3(x,y)u = g(x,y,u),$$

em que $g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, e os coeficientes a, b, c, d_1, d_2 e d_3, são funções dadas.

Muitas vezes, escreveremos apenas

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y),$$

em que incluímos todos os termos de ordem menor do que 2 em um único termo f.

Sua parte principal é, portanto,

$$Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e, como a própria definição de equação semilinear sugere, é o estudo da parte principal que governa o comportamento destas EDP's. Infelizmente, dado o caráter introdutório deste texto, não discutiremos, com a amplitude necessária, o modo como a parte principal rege o estudo da resolubilidade neste caso. Uma parte significativa deste assunto e desenvolvida para "equações elíticas" pode ser encontrado em [14].

A fim de iniciar a discução consideremos as EDP's

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \tag{3.1}$$

e, fixado $c > 0$, a das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

É fácil ver que a aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\Phi(x,t) := (x+ct, x-ct)$ é um difeomorfismo C^∞ de maneira que, $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução de $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} = 0$ se, e somente se, $u = U \circ \Phi$ é solução da equação da onda.

Por outro lado, (3.1) é facilmente resolvida se observarmos que ela pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial w}\right) = 0,$$

daí, o Teorema 1.29 pode então ser aplicado para nos dizer que uma $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ resolve a equação acima quando, e apenas quando,

$$\frac{\partial U}{\partial w}(z,w) = G(w), \ (z,w) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.2}$$

para alguma $G \in C^1(\mathbb{R})$. Donde, este mesmo Teorema, aplicado a (3.2), nos dá que $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ resolve (3.1) se, e somente se,

$$U(z,w) = f(z) + g(w), \ (z,w) \in \mathbb{R}^2,$$

para certas $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

Netas condições, $u = U \circ \Phi$ deve resolver a equação da onda e, naturalmente

$$u(x,t) = \big(U \circ \Phi\big)(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Nossa conclusão principal a partir destes fatos é que, por meio de uma mudança de coordenadas, a equação da onda pôde ser reescrita como uma equação de estrutura muito mais simples que, ao ser resolvida, gerou uma solução de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

Veremos aqui que as EDP's semilineares de segunda ordem serão classificadas em três categorias: "elíticas", "parabólicas" e "hiperbólicas". Veremos também que as equações de Poisson, do Calor e da Onda são, respectivamente, exemplos destes tipos e, finalmente, constataremos que toda EDP semilinear de segunda ordem elítca, parabólica ou hiperbólica assume, localmente e respectivamente, a forma de uma equação de Poisson, do Calor ou da Onda.

Toda essa argumentação sugere que, para estudar a resolubilidade de EDP's semilineares de segunda ordem basta, de certa forma, estudar a resolubildade das equações de Poisson, do Calor e da Onda, que é exatamente o que faremos a continuação.

2 Classificação por tipo

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a, b, c \in C(\Omega)$ e consideremos a EDP semilinear de segunda ordem

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y), \tag{3.3}$$

para alguma função f. Seja também $Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ a sua parte principal. [1]

Suporemos, para o que se segue que, para todo $(x,y) \in \Omega$, $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 + c(x,y)^2 > 0$, ou seja, que os coeficientes não se anulam simultaneamente em Ω. Nestas condições, definimos a função auxiliar $\delta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, chamada **discriminante** de (3.3), pondo

$$\delta(x,y) := b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

[1] A maneira mais rigorosa de se escrever a parte principal desta EDP seria

$$Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_2(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

mas como estamos considerando apenas soluções clássicas, as derivadas mistas serão sempre iguais, portanto podemos definir $b := \frac{b_1+b_2}{2}$ e obter a notação usada em (3.3).

Observação 3.1. *Note que, do ponto de vista das equações algébricas do segundo grau, na função que chamamos de discriminante faltaria o número* 4 *multiplicando o* $a(x, y)c(x, y)$ *para que houvesse uma coerência entre as nomenclaturas. Entretanto, como aqui estamos, por hora, interessados apenas no sinal de* $\delta(x, y)$ *e sendo o coeficiente "correto" das derivadas mistas a função* $2b(x, y)$*, ao usar este coeficiente, o discriminante usual seria*

$$4b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y) = 4\big(b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y)\big) = 4\delta(x, y),$$

mostrando que ambos os discriminantes, embora diferentes, terão sempre o mesmo sinal.

Definição 3.2 (Classificação por tipo)**.** *Seja* $p = (x_0, y_0) \in \Omega$*. Diremos que* L*, ou a EDP* (3.3)*, é:*

(i) **Parabólico** *em* (x_0, y_0)*, quando* $\delta(x_0, y_0) = 0$*.*

(ii) **Hiperbólico** *em* (x_0, y_0)*, quando* $\delta(x_0, y_0) > 0$*.*

(iii) **Elítico** *em* (x_0, y_0)*, quando* $\delta(x_0, y_0) < 0$*.*

Se $\Omega' \subset \Omega$ *é um subconjunto de* Ω*, diz-se que* L *é parabólico (hiperbólico, elítico) em* Ω'*, quando o é em todos os pontos* (x_0, y_0) *de* Ω'*.*

Exemplos 3.3. *(1)* **Equação de Poisson:** *Considerando a equação de Poisson*

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

em $\Omega = \mathbb{R}^2$*, identificamos os coeficientes* $a(x, y) = c(x, y) = 1$ *e* $b(x, y) = 0$*, para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, logo seu discriminante é* $\delta(x, y) = -a(x, y)c(x, y) = -1$*, para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, portanto essa EDP é elítica em todo o plano.*

(2) **Equação da Onda:** *Seja*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

para algum $c > 0$ *fixo, a equação da onda em* $\Omega = \mathbb{R}^2$*, cuja parte principal pode ser escrita como* $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ *(ou* $Mu = c^2 u_{xx} - u_{tt}$*).*

Neste caso os seus coeficientes são $a(t, x) = 1$*,* $c(t, x) = -c^2$ *e* $b(t, x) = 0$*, para todo* $(t, x) \in \mathbb{R}^2$*, donde seu discriminante é* $\delta(t, x) = -a(t, x)c(t, x) = c^2 > 0$*, para todo* $(t, x) \in \mathbb{R}^2$*, e assim vemos que a equação da onda é hiperbólica em todo o plano.*

(3) **Equação do Calor:** *Para algum* $\alpha > 0$, *seja*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

a equação do calor em $\Omega = \mathbb{R}^2$. *Sua parte principal pode ser escrita como* $Lu = \alpha^2 u_{xx}$.

Seus coeficientes são $a(t,x) = b(t,x) = 0$ *e* $c(t,x) = \alpha^2$, *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, *portanto seu discriminante é* $\delta(t,x) = -a(t,x)c(t,x) = 0 \cdot \alpha^2 = 0$, *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, *consequentemente a equação do calor é parabólica em* $\mathbb{R}^2$.

(4) **Equação de Tricomi:** *A definição do tipo da EDP deixa claro que ele é definido pontualmente e, consequentemente, uma equação pode mudar de tipo quando variamos o ponto* p *em* Ω, *vejamos que isso efetivamente acontece considerando em* $\mathbb{R}^2$ *a EDP:*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Aqui $a(x,y) = y$, $b(x,y) = 0$ *e* $c(x,y) = 1$, *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Assim seu discriminante, em cada* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *fica*

$$\delta(x,y) = -a(x,y)c(x,y) = -y.$$

Isso mostra que essa EDP muda o seu tipo dependendo da região em que o ponto (x,y) *se encontra. Mais especificamente:*

- $y = 0 \Longrightarrow$ *a EDP é parabólica.*
- $y > 0 \Longrightarrow$ *a EDP é elítica.*
- $y < 0 \Longrightarrow$ *a EDP é hiperbólica.*

3 Invariância do tipo por mudança de coordenadas

Nosso estudo das EDP's de primeira ordem deixou claro a importância do papel desempenhado pela mudança de coordenadas no estudo destas equações e, com as EDP's de segunda ordem, isso não é diferente. Em particular, queremos demonstrar nesta seção que o tipo da EDP é mantido por mudança de coordenadas, ou seja, ser parabólica, hiperbólica, ou elítica é uma propriedade intrínsica da equação, não dependendo do sistema de coordenadas usado para representá-la.

Os comentários a seguir deixarão mais claro o que queremos dizer com "invariância sob mudança de coordenadas".

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $a, b, c \in C(\Omega)$ e consideremos a EDP

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y),$$

para alguma função f e sua parte principal $Lu = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Observação 3.4. *Suponhamos a existência de um difeormorfismo de classe C^2 entre abertos de $\mathbb{R}^2$, $\zeta : V \longrightarrow W$, com $V \subset \Omega$, e inversa $\xi := \zeta^{-1} : W \longrightarrow V$. As variáveis em W serão escritas como $(z,w) \in W$.*

Dada uma $u \in C^2(V)$, seja $U := u \circ \xi$ [2], queremos mostrar que, para todo $(z,w) \in W$ vale a igualdade

$$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = (MU)(z,w) + F(z,w,U,U_z,U_w),$$

em que

$$(MU)(z,w) = A(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(z,w) + 2B(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w}(z,w) + C(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}(z,w),$$

para certas funções contínuas $A, B, C : W \longrightarrow \mathbb{R}$ e uma função F.

Em palavras, isso quer dizer que a parte principal Lu, nas variáveis (x,y), se escreve como outra parte principal MU, nas variáveis (z,w), mais um "resto" F.

Com efeito, escrevendo $\zeta(x,y) = \big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$ e $u = U \circ \zeta$, por sucessivas aplicações das regras da cadeia e do produto, obtemos que para todo $(x,y) \in V$, as derivadas parciais de u escrevem-se como

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial (U \circ \zeta)}{\partial x}(x,y) = U_z\big(\zeta(x,y)\big)\varphi_x(x,y) + U_w\big(\zeta(x,y)\big)\psi_x(x,y) \Longrightarrow$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \big(U_{zz} \circ \zeta\big) \cdot \varphi_x^2 + \big(U_{zw} \circ \zeta\big) \cdot \psi_x \varphi_x + \big(U_z \circ \zeta\big) \cdot \varphi_{xx} + \big(U_{zw} \circ \zeta\big) \cdot \varphi_x \psi_x + \big(U_{ww} \circ \zeta\big) \cdot \psi_x^2 + \big(U_w \circ \zeta\big) \cdot \psi_{xx}.$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \big(U_{zz} \circ \zeta\big) \cdot \varphi_y \varphi_x + \big(U_{zw} \circ \zeta\big) \cdot \psi_y \varphi_x + \big(U_z \circ \zeta\big) \cdot \varphi_{xy} + \big(U_{zw} \circ \zeta\big) \cdot \varphi_y \psi_x + \big(U_{ww} \circ \zeta\big) \cdot \psi_y \psi_x + \big(U_w \circ \zeta\big) \cdot \psi_{xy}.$$

[2] Lembre-se que, ao escrever $u \circ \xi$ estamos olhando u no novo sistema de coordenadas $\xi : W \longrightarrow V$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(U\circ\zeta)}{\partial y}(x,y) = U_z\big(\zeta(x,y)\big)\varphi_y(x,y) + U_w\big(\zeta(x,y)\big)\psi_y(x,y) \Longrightarrow$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \big(U_{zz}\circ\zeta\big)\cdot\varphi_y^2 + \big(U_{zw}\circ\zeta\big)\cdot\psi_y\varphi_y + \big(U_z\circ\zeta\big)\cdot\varphi_{yy} + \big(U_{zw}\circ\zeta\big)\cdot\varphi_y\psi_y + \big(U_{ww}\circ\zeta\big)\cdot\psi_y^2 + \big(U_w\circ\zeta\big)\cdot\psi_{yy}.$$

Substituindo estas expressões em $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$, *resulta*

$$\begin{aligned}(Lu)(x,y) = {}& \left[a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2\right](x,y)\cdot\big(U_{zz}\circ\zeta\big)(x,y) + \\ & 2\left[a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y\right](x,y)\cdot\big(U_{zw}\circ\zeta\big)(x,y) + \\ & \left[a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\right](x,y)\cdot\big(U_{ww}\circ\zeta\big)(x,y) + \\ & F\big(x,y,U\circ\zeta,U_z\circ\zeta,U_w\circ\zeta\big),\end{aligned}$$

para alguma função F.

Daí, escrevendo $(x,y) = \xi(z,w)$, *esta igualdade fica*

$$\begin{aligned}(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = {}& \left[a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big)\cdot U_{zz}\big(\xi(z,w)\big) + \\ & 2\left[a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y\right]\big(\xi(z,w)\big)\cdot U_{zw}\big(\xi(z,w)\big) + \\ & \left[a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big)\cdot U_{ww}\big(\xi(z,w)\big) + F\big(\xi(z,w),U,U_z,U_w\big).\end{aligned}$$

Que pode ser resumido como

$$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = A(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2B(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial w} + C(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial w^2} + F\big(\xi(z,w),U,U_z,U_w\big) =$$

$$(MU)(z,w) + F\big(\xi(z,w),U,U_z,U_w\big),$$

em que

$$A(z,w) := \left[a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big);$$

$$B(z,w) := \left[a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y\right]\big(\xi(z,w)\big);$$

$$C(z,w) = \left[a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big),$$

de onde se vê facilmente que para todo $(z,w)\in W$

$$B(z,w)^2 - A(z,w)C(z,w) = \delta\big(\xi(z,w)\big)\left[\det\big(J\zeta\big)\big(\xi(z,w)\big)\right]^2,$$

em que

$$\big(J\zeta\big)\big(\xi(z,w)\big) = \begin{pmatrix} \varphi_x\big(\xi(z,w)\big) & \varphi_y\big(\xi(z,w)\big) \\ \\ \psi_x\big(\xi(z,w)\big) & \psi_y\big(\xi(z,w)\big) \end{pmatrix}.$$

Podemos então demonstrar o

Teorema 3.5. *Nas condições acima, em cada ponto de Ω o discriminante de L, nas variáveis (x, y) e o de M, nas variáveis (z, w), possuem o mesmo sinal.*

Demonstração. Como ζ é um difeomorfismo, seu determinante é sempre diferente de zero, donde para todo $(z, w) \in W$ tem-se $\big[\det\big(J\zeta\big)\big(\xi(z,w)\big)\big]^2 > 0$.

Daí e da igualdade $B(z,w)^2 - A(z,w)C(z,w) = \delta\big(\xi(z,w)\big)\,\big[\det\big(J\zeta\big)\big(\xi(z,w)\big)\big]^2$, o teorema segue. □

Corolário 3.6. *Nas condições acima, Lu é parabólico (hiperbólico, elítico, respec.) em $p \in V$ se, e somente se, MU é parabólico (hiperbólico, elítico, respec.) em $\zeta(p) \in W$.*

4 Curvas características para EDP's de 2^a ordem

Vimos como as curvas características podem ser usadas para construir soluções das EDP's lineares de primeira ordem. Este conceito também pode ser considerado para equações de segunda ordem (para qualquer ordem, na verdade). Seu papel aqui será o de colocar a EDP, localmente, em sua forma canônica, ou normal, como a seguir explicaremos.

Definição 3.7. *Sejam $a, b, c \in C(\Omega)$ e consideremos*

$$Lu(x,y) = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

a parte principal de uma EDP linear de segunda ordem em duas variáveis independentes. Dado um ponto $p = (x_0, y_0) \in \Omega$ definimos:

(i) A **forma característica** *para L em p é o polinômio homogêneo de grau dois dado por*

$$\chi_L(p;\xi) := a(p)\xi_1^2 + 2b(p)\xi_1\xi_2 + c(p)\xi_2^2\,, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Um vetor $\xi \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$ diz-se um **vetor característico** *para L em p quando $\chi_L(p;\xi) = 0$.*

(iii) O **conjunto característico** *para L em p é o conjunto*

$$\mathit{Char}_p(L) := \left\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi \neq 0 \text{ e } \chi_L(p;\xi) = 0\right\}.$$

(iv) Uma curva regular de classe C^1, $\gamma : I \longrightarrow \Omega$, diz-se **característica** *para L em $\gamma(t_0) = p$ quando seu vetor normal em $\gamma(t_0)$, $\nu(\gamma(t_0))$, é característico para L em p.*

A seguir descreveremos uma maneira bastante prática, envolvendo raízes de equações do segundo grau, para determinar quando uma curva é característica, ou não, para uma EDP de segunda ordem.

Observação 3.8. *Seja $p \in \Omega$ e suponhamos que $a(p) \neq 0$. Seja também $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva C^1, do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$, e característica para L no ponto $p = \gamma(t_0)$.*

Primeiramente, lembre-se que os vetores normais a γ são da forma

$$\nu\big(\gamma(t)\big) = \big(\lambda\alpha^{'}(t), -\lambda\big),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$ característica para L no ponto $p = \gamma(t_0)$, em particular, fazendo $\lambda = 1$ devemos ter

$$\nu(p) = \big(\alpha^{'}(t_0), -1\big) \in \mathit{Char}_{\gamma(t_0)}(L),$$

o que significa

$$0 = \chi_L(p;\nu(p)) = a(p)\big[\alpha^{'}(t_0)\big]^2 + 2b(p)\big[\alpha^{'}(t_0)\big]\cdot(-1) + c(p)(-1)^2 =$$

$$a(p)\big[\alpha^{'}(t_0)\big]^2 - 2b(p)\big[\alpha^{'}(t_0)\big] + c(p).$$

Noutras palavras, o número $\alpha^{'}(t_0)$ deve ser uma raiz da equação do segundo grau [3]

$$a(p)\mu^2 - 2b(p)\mu + c(p) = 0, \tag{3.4}$$

o que demonstra o teorema:

Teorema 3.9. *Supondo que $a(x,y) \neq 0$ em Ω, uma curva de classe C^1, $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$, é característica para L no ponto $p = \gamma(t_0)$, para algum $t_0 \in I$, se, e semente se,*

[3] Ela é, de fato, do segundo grau porque $a(p) \neq 0$.

$\alpha^{'}(t_0)$ *é uma raiz da equação do segundo grau em* μ*:*

$$a\big(\gamma(t_0)\big)\mu^2 - 2b\big(\gamma(t_0)\big)\mu + c\big(\gamma(t_0)\big) = 0. \tag{3.5}$$

Observação 3.10. *Observemos que é o sinal do discriminante* $\delta(p) = b(p)^2 - a(p)c(p)$*, em* p*, que determina a quantidade de raízes reais que* (3.4) *possui. Mais precisamente:*

- *Se* $\delta(p) = 0$*, então* (3.4) *possui uma única raiz real.*
- *Se* $\delta(p) > 0$*, então* (3.4) *possui duas raízes reais distintas.*
- *Se* $\delta(p) < 0$*, então* (3.4) *não possui raízes reais.*

Isso quer dizer, de acordo com o teorema anterior, que a existência, ou não, de curvas características passando por $p \in \Omega$*, tem a ver com a existência, ou não, de raízes reais de* (3.5)*, fato que exploraremos nas considerações a seguir.*

Suponhamos que a nunca se anule Ω e consideremos, para cada $(x, y) \in \Omega$, a equação do segundo grau em μ:

$$a(x, y)\mu^2 - 2b(x, y)\mu + c(x, y) = 0. \tag{3.6}$$

Se para cada $(x, y) \in \Omega$ indicarmos por $\mu(x, y)$ as raízes de (3.6), então, da fórmula de Bhaskara, podemos expressá-la por meio dos coeficientes da equação como

$$\mu(x, y) = \frac{2b(x, y) \pm \sqrt{4b(x, y)^2 - 4a(x, y)c(x, y)}}{2a(x, y)} = \frac{b(x, y) \pm \sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}.$$

Isso posto, queremos destacar três situações:

(i) L é parabólico em Ω, ou seja, $\delta(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Neste caso, temos que

$$\mu(x, y) = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega.$$

Mostrando que existe uma única **função raiz** $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para (3.6), a qual é, obviamente, uma função contínua.

(ii) L é hiperbólico em Ω, ou seja, $\delta(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Neste caso, temos duas opções de função raiz para (3.6), a saber, $\mu_1, \mu_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\mu_1(x, y) = \frac{b(x, y) + \sqrt{\delta(x, y)}}{a(x, y)}, \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega$$

e

$$\mu_2(x,y) = \frac{b(x,y) - \sqrt{\delta(x,y)}}{a(x,y)}, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega.$$

As quais são também funções contínuas.

(iii) L é elítico em Ω, ou seja, $\delta(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Neste caso, não existe função raiz a valores reais [4].

O problema que queremos estudar agora é o de saber determinar a quantidade de curvas características que uma equação possui. Vimos anteriormente que, para curvas do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$, ela ser, ou não, característica, depende de $\alpha'(t)$ ser, ou não, uma raiz de (3.5), e usando as funções raízes apresentadas acima, a observação a seguir irá nos ensinar como obter caracterísicas com este formato.

Observação 3.11. *Suponhamos as mesmas condições acima e que $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ seja uma curva do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$. Suponhamos ainda que ou L é parabólico ou é hiperbólico em todo Ω.*

Se $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma qualquer função raiz de (3.6)*, então γ é característica para L em todo ponto $\gamma(t)$ se, e somente se, γ satisfaz a EDO*

$$\alpha'(t) = \mu(\gamma(t)), \ t \in I.$$

Isso mostra que, para encontrar características do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$, precisamos encontrar α que resolva a EDO

$$\alpha'(t) = \mu(t, \alpha(t)),$$

cujas soluções devem satisfazer, também, a equação integral

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(s, \alpha(s))ds.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos 3.12. *(1) Consideremos a equação da onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ em $\Omega = \mathbb{R}^2$, para algum $c > 0$. Já sabemos que ela é hiperbólica em todo o $\mathbb{R}^2$, com $\delta(t,x) = c^2 > 0$ para todo*

[4] Teríamos duas funções raízes, contínuas e a valores complexos, porém não estudaremos esta situação neste texto.

$(t,x) \in \mathbb{R}^2$, *pois pondo* $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$, *temos* $a(t,x) = 1$, $b(t,x) = 0$ *e* $c(t,x) = -c^2$, *para todo* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Como $a(t,x) = 1 \neq 0$, *de acordo com o que deduzimos acima, a fim de encontrar curvas características do tipo* "$\gamma(t) = \big(t, \alpha(t)\big)$" *para esta equação, devemos usar seus coeficientes para criar, em cada* $p \in \mathbb{R}^2$, *a equação do segundo grau em* μ

$$a(p)\mu^2 - 2b(p)\mu + c(p) = 0,$$

a qual aqui fica

$$1 \cdot \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu - c^2 = 0 \Longleftrightarrow \mu^2 = c^2,$$

cujas raízes são $\mu_1 = c$ *e* $\mu_2 = -c$, *independentemente de* $p \in \mathbb{R}$, *de onde vemos que as funções raízes são as funções constantes*

$$\mu_1(t,x) = c \ \text{ e } \ \mu_2(t,x) = -c.$$

A Observação 3.11 diz, portanto, que devemos resolver as duas EDO's

$$\alpha_1'(s) = \mu_1(s, \alpha_1(s)) = c$$

e

$$\alpha_2'(s) = \mu_2(s, \alpha_2(s)) = -c,$$

cujas soluções gerais são, respectivamente, $\alpha_1(s) = cs + \lambda_1$ *e* $\alpha_2(s) = -cs + \lambda_2$, *para constantes* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *arbitrárias.*

Assim, obtemos duas famílias de curvas características (do tipo buscado) para essa equação, a saber,

$$\gamma_\lambda(s) := (s, cs + \lambda), \ s \in \mathbb{R}$$

e

$$\eta_\lambda(s) := (s, -cs + \lambda), \ s \in \mathbb{R},$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixado.*

(2) Consideremos agora, para algum $\alpha > 0$, *a equação do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ *em* $\Omega = \mathbb{R}^2$. *Ela é parabólica em todo o* $\mathbb{R}^2$, *porque* $\delta(x,t) = 0$ *para todo* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, *uma vez que os coeficientes de* $Lu = \alpha^2 u_{xx}$, *são* $a(x,t) = \alpha^2$, $b(x,t) = 0$ *e* $c(x,t) = 0$, *para todo* $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Assim, $a(x,t) = \alpha^2 \neq 0$, *e então, como no caso anterio, a fim de encontrar curvas características do tipo* "$\gamma(s) = \big(s, \alpha(s)\big)$" *para esta equação, devemos estudar, em cada* $p \in \mathbb{R}^2$, *a* *equação do segundo grau em μ*

$$a(p)\mu^2 - 2b(p)\mu + c(p) = 0,$$

a qual aqui fica

$$\alpha^2 \cdot \mu^2 - 2 \cdot 0 \cdot \mu - 0 = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2\mu^2 = 0,$$

que tem $\mu = 0$ como única raiz, qualquer que seja $p \in \mathbb{R}$, nos dando como única função raiz a função constante igual a zero

$$\mu(x,t) = 0.$$

Para encontrar as características, pela Observação 3.11, basta resolvermos a EDO

$$\alpha^{'}(s) = \mu(s, \alpha(s)) = 0,$$

que possui $\alpha(s) = \lambda$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, como solução geral.

Com isso, obtemos uma única família de curvas características (do tipo buscado) para a equação do Calor:

$$\gamma_\lambda(s) := (s, \lambda),\ s \in \mathbb{R}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado.

(3) A Equação de Poisson, $u_{xx}+u_{yy} = f(x,y)$, em $\Omega = \mathbb{R}^2$, tem coeficientes $a(x,y) = c(x,y) = 1$ e $b(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por isso ela tem discriminante negativo $\delta(x,y) = -1$ em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mostrando que não existe função raiz a valores reais e, consequentemente, nenhuma curva característica do tipo "$\gamma(t) = \big(t, \alpha(t)\big)$".

Dando prosseguimento ao nosso estudos das características, permitiremos agora que a se anule em Ω, mas que o coeficiente c nunca. Nessas condições, consideremos, para cada $(x,y) \in \Omega$, a nova equação do segundo grau em μ:

$$a(x,y) - 2b(x,y)\mu + c(x,y)\mu^2 = 0. \tag{3.7}$$

Se para cada $(x,y) \in \Omega$ indicarmos por $\mu(x,y)$ suas raízes, então, novamente pela fórmula de Bhaskara, podemos expressá-la em termos dos coeficientes da equação como

$$\mu(x,y) = \frac{2b(x,y) \pm \sqrt{4b(x,y)^2 - 4a(x,y)c(x,y)}}{2c(x,y)} = \frac{b(x,y) \pm \sqrt{\delta(x,y)}}{c(x,y)}.$$

Como antes, destacaremos as três situações:

(i) L é parabólico em Ω. Neste caso, temos que

$$\mu(x,y) = \frac{b(x,y)}{c(x,y)}, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega.$$

Concluindo, analogamente, a existência de uma única função raiz $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, para (3.7), que é naturalmente contínua.

(ii) L é hiperbólico em Ω. Temos assim duas funções raízes para (3.7), as funções $\mu_1, \mu_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\mu_1(x,y) = \frac{b(x,y) + \sqrt{\delta(x,y)}}{c(x,y)}, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega$$

e

$$\mu_2(x,y) = \frac{b(x,y) - \sqrt{\delta(x,y)}}{c(x,y)}, \quad \text{para todo } (x,y) \in \Omega.$$

Ambas funções contínuas.

(iii) L é elítico em Ω e, como antes, não há função raiz a valores reais nesta situação.

Observação 3.13. *Nas condições acima, suponhamos que $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ seja uma curva do tipo $\gamma(t) = (\beta(t), t)$ e que L é, ou parabólico, ou é hiperbólico em todo Ω.*

Seja $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma qualquer função raiz de (3.7). *Resulta que γ será característica para L em todo ponto $\gamma(t)$ se, e somente se, γ satisfaz a EDO*

$$\beta^{'}(t) = \mu(\beta(t), t), \ t \in I.$$

Com efeito, dizer que γ é característica para L em todo ponto $\gamma(t)$ significa dizer que para cada $t \in I$, seu vetor normal, $\nu\big(\gamma(t)\big) = (-1, \beta^{'}(t))$, está no conjunto Char$_{\gamma(t)}(L)$, ou seja, que se tenha

$$a(\gamma(t)) - 2b(\gamma(t))[\beta^{'}(t)] + c(x,y)[\beta^{'}(t)]^2 = 0.$$

Desse modo, assim como antes, encontrar características para L do tipo $\gamma(t) = (\beta(t), t)$, equivale a encontrar as soluções β da EDO

$$\beta^{'}(t) = \mu \underbrace{(\beta(t), t)}_{=\gamma(t)}.$$

A última situação que iremos analisar é aquela em que, agora, a e c se anulam simultaneamente em todo o Ω, obrigando que seja então $b(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Neste caso, L deve ser da forma

$$Lu = 2b(x,y)u_{xy},$$

automaticamente hiperbólico, em particular.

Suponhamos agora que uma curva regual C^1, $\gamma(t) = \big(\beta(t), \alpha(t)\big)$, seja característica para L em todo $\gamma(t)$, para t em algum intervalo I. Como o vetor normal a γ em $\gamma(t)$ é $\nu = \big(-\alpha'(t), \beta'(t)\big)$, teremos

$$2b(\gamma(t)) \cdot \alpha'(t) \cdot \beta'(t) = 0, \text{ para todo } t \in I.$$

Neste caso, se para algum $t_0 \in I$, tivermos $\alpha'(t_0) \neq 0$, poderemos supor que $\beta'(t) = 0$ para todo t, dizendo que β é constante e assim, $\gamma(t) = (\lambda, \alpha(t))$, para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se, por outro lado, for $\beta'(t_0) \neq 0$, para algum $t_0 \in I$, raciocinando analogamente ao caso anterior, concluiremos que $\gamma(t) = (\beta(t), \lambda)$, para alguma constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Deduzimos assim que, quando $Lu = 2b(x,y)u_{xy}$, ele admite os dois tipos de curvas características

$$\gamma_\lambda(t) = \big(\lambda, \alpha(t)\big) \quad \text{e} \quad \eta_\lambda(t) = \big(\beta(t), \lambda\big),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado.

Lema 3.14. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva C^1 regular com coordenadas $\gamma(t) = \big(\beta(t), \alpha(t)\big)$. Para cada $t_0 \in I$ existe um intervalo $I_0 \subset I$, com $t_0 \in I_0$, e uma reparametrização $\tilde{\gamma} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de γ, em I_0, de um dos dois tipos*

$$\tilde{\gamma}(s) = \big(s, \tilde{\alpha}(s)\big) \quad e \quad \tilde{\gamma}(s) = \big(\tilde{\beta}(s), s\big).$$

Demonstração. Com efeito, como $\gamma'(t_0) = \big(\beta'(t_0), \alpha'(t_0)\big) \neq (0,0)$, supondo que seja $\beta'(t_0) \neq 0$, existe um intervalo $I_0 \subset I$, com $t_0 \in I_0$, tal que $\beta'(t) \neq 0$ para todo $t \in I_0$. Isso nos diz, em particular, que β é invertível em I_0.

Nessas condições, se $\beta^{-1} : J \longrightarrow I_0$ é a inversa de β em I_0, definimos

$$\tilde{\gamma}(s) := \gamma\big(\beta^{-1}(s)\big) = \big(\beta\big(\beta^{-1}(s)\big), \alpha\big(\beta^{-1}(s)\big)\big) = \big(s, \alpha\big(\beta^{-1}(s)\big)\big)\,,\ s \in J,$$

que se trata de uma reparametrização de γ da forma $\tilde{\gamma}(s) = \big(s, \tilde{\alpha}(s)\big)$, em que $\tilde{\alpha}(s) := \alpha\big(\beta^{-1}(s)\big)$.

O caso em que se tem $\alpha'(t_0) \neq 0$ demonstra-se analogamente conduzindo-nos a uma reparametrização da forma $\tilde{\gamma}(s) = \big(\tilde{\beta}(s), s\big)$, completando a demonstração. $\square$

Exercício 3.15. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva regular de classe C^1. Mostre que, γ é característica para L em um ponto $p \in \Omega$ se, e somente se, qualquer reparamentrização sua $\tilde{\gamma}(s) := \big(\gamma \circ \theta\big)(s)$, para alguma $\theta : J \longrightarrow I$, C^1 com $\theta^{'}(s) \neq 0$ para todo $s \in J$, é também característica em p.*

As diversas observações que descrevemos até aqui, envolvendo os coeficientes de L e as funções raízes, nos oferecem as condições de que precisamos para estender as conclusões obtidas nos Exemplos 3.12 acima a todas as EDP's semilinares de segunda ordem, se supusermos que elas não mudam de tipo em seu domínio de definição, resultado contido no próximo teorema.

Teorema 3.16. *Seja $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ a parte principal de uma EDP semilinear de segunda ordem, com $a, b, c \in C^1(\Omega)$, para algum aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nessas condições temos:*

(i) Se L é elítico em Ω, então L não possui curvas características.

(ii) Se L é parabólico em Ω, então para cada $p \in \Omega$, existe uma única curva $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ característica para L em todo $\gamma(t)$ e passando por p, a menos de reparametrizações.

(iii) Se L é hiperbólico em Ω, então para cada $p \in \Omega$, existem duas curvas $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \Omega$ características para L em todo $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, respectivamente, passando por p, a menos de reparametrizações.

Demonstração. Antes de qualquer coisa, levando em conta o Lema 3.14 e o Exercício 3.15, não há perda de generalidade em limitarmos a demonstração à curvas dos tipos

$$\gamma(t) = \big(t, \alpha(t)\big) \quad \text{ou} \quad \gamma(t) = \big(\beta(t), t\big).$$

Isso posto, comecemos supondo que $a(x,y) \neq 0$ em todo Ω. Nestas condições, a demonstração segue das observações anteriores para curvas $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ do tipo $\gamma(t) = (t, \alpha(t))$:

(i) Não possui função raiz a valores reais, logo não há EDO do tipo $\alpha^{'}(t) = \mu(t, \alpha(t))$ para ser resolvida.

(ii) Se $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é a única função raiz, com $\mu(x,y) := \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ de classe C^1, pelo Teorema de Picard, para cada $p = (x_0, y_0) \in \Omega$, o PVI

$$\begin{cases} \alpha^{'}(t) = \mu(t, \alpha(t)), \ t \in I \\ \alpha(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma única de solução em alguma vizinhança $I \subset \mathbb{R}$ de x_0, provando a afirmação.

(iii) Neste caso, sejam $\mu_1, \mu_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ as duas função raízes de (3.6), as quais sabemos serem de classe C^1. Novamente do Teorema de Picard, fixado $p \in \Omega$, cada um dos PVI's

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = \mu_1(t, \alpha_1(t)), \ t \in I \\ \alpha_1(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \alpha_2'(t) = \mu_2(t, \alpha_2(t)), \ t \in I \\ \alpha_2(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possui uma única de solução em alguma vizinhança $I \subset \mathbb{R}$ de x_0, provando o teorema neste caso.

Por outro lado, permitindo agora que o coeficiente a possa se anular em Ω, suponhamos que seja $c(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Nestas condições a prova de todos os ítens (i), (ii) e (iii) pode ser efetuada para curvas do tipo $\gamma(t) = \big(\beta(t), t\big)$, analogamente ao modo como as demonstramos acima para curvas do tipo $\gamma(t) = \big(t, \alpha(t)\big)$ e supondo que a nunca se anula, tendo em mente a Observação 3.13 e os comentários que a antecedem, envolvendo a definição das funções raízes e as EDO's por elas definidas.

O caso em que a e c são identicamente nulos em Ω, necessariamente $b(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$, logo $Lu = 2b(x,y)u_{xy}$, portanto hiperbólico em Ω, e suas duas famílias de curvas características já foram encontradas nas linhas anteriores ao Lema 3.14.

Assim, dado $p = (x_0, y_0) \in \Omega$, as curvas

$$\gamma(t) = \big(x_0, t\big) \quad \text{e} \quad \eta(s) = \big(s, y_0\big),$$

definidas, respectivamente, num intervalo I contendo y_0 e num intervalo J contendo x_0, são as únicas características que passam por p.

Finalmente, os casos em que queremos curvas do tipo $\gamma(t) = \big(t, \alpha(t)\big)$ supondo que a é identicamente nulo e o caso em que queremos curvas do tipo $\gamma(t) = \big(\beta(t), t\big)$ supondo que c é identicamente nulo são deixados como **Exercício** para o aluno, completando a prova. $\square$

Observação 3.17. *É importante ter em mente o caráter local apresentado nas conclusões do teorema anterior, refletido nas hipóteses sobre os coeficientes, que foram, basicamente, duas: Fixado a ou c, ou ele nunca se anula ou ele é identicamente nulo.*

Isso se deve ao fato de que, para cada ponto $p \in \Omega$ se, por exemplo, $a(p) \neq 0$, então graças à sua continuidade, existe uma vizinhança Ω' de p sobre a qual a nunca se anula. Se for, $a(p) = 0$, então $b(p) \neq 0$ ou $c(p) \neq 0$. Caso seja $c(p) \neq 0$, existe uma vizinhança de p sobre a qual c nunca se anula.

Finalmente, o caso em que $a(p) = c(p) = 0$ e $b(p) \neq 0$, existe uma vizinhança Ω' de p onde L é hiperbólico, caso que tratamos como se fosse $a(x, y) = c(x, y) = 0$ e $b(x, y) \neq 0$ em Ω', para evitar uma generalidade extrema no tratamento desta questão, dado o objetivo introdutório deste texto.

5 Formas canônicas das EDP's semilineares de 2^a ordem

Formalizaremos agora que as equações de Poisson, da Onda e do Calor são os protótipos das EDP's elíticas, hiperbólicas e parabólicas, respectivamente, denominando-as como "formas canônicas" destes tipos. A observação que sucede esta definição explica o significado das formas canônicas.

Definição 3.18 (Forma Canônica). *Seja $Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}$ a parte principal da EDP semilinear de segunda ordem $Lu = f(x, y, u, u_x, u_y)$, com coeficientes contínuos num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que o sinal do discriminante de L seja constante em Ω. Definimos:*

(i) Se L é elítico, então sua forma canônica (ou normal) é

$$\Delta_{(z,w)}U = U_{zz} + U_{ww} = G(z, w, U, U_z, U_w),$$

para alguma função G.

(ii) Se L é parabólico, então sua forma canônica (ou normal) é

$$U_{ww} = G(z, w, U, U_z, U_w),$$

para alguma função G.

(iii) Se L é hiperbólico, então ele possui duas formas canônicas (ou normais):

$$U_{zw} = G(z, w, U, U_z, U_w)$$

e

$$U_{zz} - U_{ww} = H(z, w, U, U_z, U_w),$$

para certas função G e H.

Observação 3.19. *Supondo que a EDP se apresenta como $Lu = f(x, y, u, u_x, u_y)$, o significado das formas canônicas deve ser entendido do seguinte modo:*

Dizer que uma EDP assume sua forma canônica, significa afirmar que para cada ponto $p \in \Omega$, existem abertos $A, B \subset \mathbb{R}^2$, com $p \in B \subset \Omega$, um difeomorfismo $\xi : A \longrightarrow B$, de classe C^2, e alguma função G, de maneira que, para toda $u \in C^2(B)$, pondo $U := u \circ \xi$, tem-se que

$$(Lu)\big(\xi(z, w)\big) = f\big(\xi(z, w), u\big(\xi(z, w)\big), u_x\big(\xi(z, w)\big), u_y\big(\xi(z, w)\big)\big), \quad (z, w) \in A$$

se, e somente se,

$$(MU)(z, w) = G(z, w, U(z, w), U_z(z, w), U_w(z, w)), \quad (z, w) \in A,$$

sendo MU de um dos três tipos listados acima. Isso quer dizer que, ou $MU = U_{zz} + U_{ww}$, ou $MU = U_{ww}$, ou $MU = U_{zz} - U_{ww}$, ou ainda $MU = U_{zw}$, conforme o tipo elítico, parabólico ou hiperbólico, respectivamente.

A observação a seguir explica porque não surpreende o fato de as equações hiperbólicas possuirem duas formas canônicas, um fato que já foi abordado anteriormente em nossos estudos.

Observação 3.20. *Já sabemos que a própria equação das ondas, como superficialmente destacado no início deste capítulo, assume as duas formas apresentadas em (iii) da Definição 3.18, porque escrevendo*

$$U_{zw} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

e, para $c > 0$ fixo,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

vemos que a aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\Phi(t, x) := (x + ct, x - ct)$ [5], é um difeomorfismo de classe C^∞, com inversa $\xi(z, w) = \left(\frac{z-w}{2c}, \frac{z+w}{2}\right)$, e podemos verificar que, para toda $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, pondo $U = u \circ \xi$, se $(z, w) \in \mathbb{R}^2$, então vale que

$$u_{tt}\big(\xi(z, w)\big) - c^2 u_{xx}\big(\xi(z, w)\big) = (Lu)\big(\xi(z, w)\big) = 0 \Longleftrightarrow U_{zw}(z, w) = 0.$$

[5] Observe que as posições das coordenadas são ocupadas por curvas características da equação da onda.

Com efeito,

$$U_z(z,w) = \frac{\partial(u\circ\xi)}{\partial z}(z,w) = \frac{1}{2c}u_t\big(\xi(z,w)\big) + \frac{1}{2}u_x\big(\xi(z,w)\big) \Longrightarrow$$

$$U_{zw}(z,w) = \left[\frac{1}{4c^2}u_{tt}\big(\xi(z,w)\big) - \frac{1}{4c}u_{tx}\big(\xi(z,w)\big)\right] + \left[\frac{1}{4c}u_{xt}(\xi(z,w)) - \frac{1}{4}u_{xx}(\xi(z,w))\right] =$$

$$\frac{1}{4c^2}u_{tt}\big(\xi(z,w)\big) - \frac{1}{4}u_{xx}(\xi(z,w)) = \frac{1}{4c^2}\left[u_{tt}\big(\xi(z,w)\big) - c^2u_{xx}(\xi(z,w))\right],$$

logo, $(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = 0 \Longleftrightarrow U_{zw}(z,w) = 0.$

6 Redução à forma conônica

Veremos nesta seção como as curvas características podem ser usadas para construir um sistema de coordenadas que reduz as equações hiperbólicas e parabólicas às suas formas normais. O caso elítico, por sua vez, será apresentado na lista de Exercícios ao final deste capítulo.

A observação a seguir estabelece as condições de que precisaremos para concluir as duas reduções que pretendemos fazer aqui.

Observação 3.21. *Consideremos* $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$, *com coeficientes contínuos em um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Suponhamos que* $\xi : W \longrightarrow V$ *seja um difeomorfismo de classe* C^2, *cujo inverso indicaremos por* $\zeta : V \longrightarrow W$, *com* $W \subset \mathbb{R}^2$ *e* $V \subset \Omega$.

Como em Observação 3.4, escrevendo ζ *em coordenadas* $\zeta(x,y) = \big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$, *dada* $u \in C^2(V)$, *pondo* $U := u\circ\xi \Longleftrightarrow u = U\circ\zeta$, *para todo* $(z,w) \in W$, *temos*

$$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = \underbrace{A(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2B(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial w} + C(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}}_{=(MU)(z,w)} + F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big),$$

que resumidamente se escreve como

$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = (MU)(z,w) + F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big)$, *em que*

$A(z,w) = \left[a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big);$

$B(z,w) = \left[a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y\right]\big(\xi(z,w)\big);$

$C(z,w) = \left[a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big),$

Desse modo, $(Lu)(x,y) = f(x,y,u,u_x,u_y)$ *para* (x,y) *em* V *se, e somente se, para todo* $(z,w) \in W$

$$2B(z,w)U_{zw} = (MU)(z,w) = f\left(\xi(z,w), U, u_x \circ \xi, u_y \circ \xi, \right) - F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big). \qquad (3.8)$$

Por outro lado, observemos que um modo de deixar MU *hiperbólico é quando temos*

$$A(z,w) = C(z,w) = 0, \text{ para todo } (z,w) \in W.$$

E se, além disso, $B(z,w) \neq 0$ *para todo* $(z,w) \in A$*, poderemos reescrever* (3.8) *como*

$$U_{zw}(z,w) = \frac{f\left(\xi(z,w), U, u_x \circ \xi, u_y \circ \xi, \right) - F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big)}{2B(z,w)}, \quad (z,w) \in W. \qquad (3.9)$$

Conclusão: *Se, por alguma razão, tivermos* $A(z,w) = C(z,w) = 0$ *e* $B(z,w) \neq 0$ *para todo* $(z,w) \in W$*, pondo* $G := \frac{1}{2B}(f - F)$*, segue que*

$$Lu = f \text{ em } V \iff U_{zw} = G \text{ em } W.$$

Surpreendentemente, toda vez que L for hiperbólico, é possível mostrar que as condições impostas acima estão sempre satisfeitas.

Noutras palavras, a conclusão acima guia nosso pensamento no sentido de nos mostrar o que precisaremos determinar a fim de reduzir uma EDP hiperbólica a sua primeira forma normal, resultado contido na proposição a seguir.

Proposição 3.22 (Redução no caso Hiperbólico). *Seja* $a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f$ *uma EDP semilinear de segunda ordem hiperbólica em um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*, com* $a(x,y) \neq 0$ *para todo* $(x,y) \in \Omega$*. Suponhamos também que seus coeficientes sejam de classe* $C^3(\Omega)$ *e que* $(0,0) \in \Omega$*.*

Nessas condições existem:

(i) Abertos $W, V \subset \mathbb{R}^2$*, com* $(0,0) \in V \subset \Omega$*.*

(ii) Um difeomorfismo C^2*,* $\xi : W \longrightarrow V$*, cujo inverso indicaremos por* ζ*; e*

(iii) Uma função G *de cinco variáveis,*

de tal modo que $u \in C^2(V)$ *resolve* $Lu = f$ *em* V *se, e somente se,* $U = u \circ \xi$ *resolve* $U_{zw} = G(z,w,U,U_z,U_w)$ *em* W*.*

Noutras palavras, se L é hiperbólico em $(0,0)$, então L assume sua primeira forma normal em uma vizinhança de $(0,0)$, relativamente à algum sistema de coordenadas.

Demonstração. De acordo com a observação anterior, é suficiente encontrar um difeomorfismo $\zeta : V \longrightarrow W$, com $W \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \Omega$, com coordenadas $\zeta(x,y) = \big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$, de tal modo que

(i) $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, em V

(ii) $a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0$, em V.

(iii) $a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y \neq 0$, em V

Por outro lado, como estamos supondo $a(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$ e L hiperbólico, sabemos que existem duas funções raízes $\mu_1, \mu_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ para a equação do segundo grau

$$a(x,y)\mu(x,y)^2 - 2b(x,y)\mu(x,y) + c(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

É interessante perceber que podemos encontrar essa equação em (i) e (ii) acima, ao colocarmos (de maneira "incosequente") ϕ_y^2 e ψ_y^2 em evidência, ou seja

(i') $\varphi_y^2\left(a\frac{\varphi_x^2}{\varphi_y^2} + 2b\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + c\right) = 0$, em V.

(ii') $\psi_y^2\left(a\frac{\psi_x^2}{\psi_y^2} + 2b\frac{\psi_x}{\psi_y} + c\right) = 0$, em V.

ou, escrito de outra forma,

(i') $\varphi_y^2\left[a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c\right] = 0$, em V.

(ii') $\psi_y^2\left[a\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + c\right] = 0$, em V.

Vemos assim que a única maneira de estas igualdades ocorrerem, simultaneamente, é quando tivermos $\varphi_y(x,y) \neq 0$ e $\psi_y(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in B$, com

$$-\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)} = \mu_1(x,y) \quad \text{e} \quad -\frac{\psi_x(x,y)}{\psi_y(x,y)} = \mu_2(x,y),$$

isto é, quando $\varphi_y(x,y) \neq 0$ e $\psi_y(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in B$, com

$$\varphi_x(x,y) + \mu_1(x,y)\varphi_y(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \psi_x(x,y) + \mu_2(x,y)\psi_y(x,y) = 0.$$

Em palavras, nossa conclusão foi, a fim de um difeomorfismo $\zeta = (\varphi, \psi)$ efetuar a redução que desejamos, é necessário que suas coordenadas φ e ψ, tenham derivada em y sempre não nula e sejam soluções das EDP's lineares de primeira ordem [6]:

$$\varphi_x + \mu_1(x,y)\varphi_y = 0 \quad \text{e} \quad \psi_x + \mu_2(x,y)\psi_y = 0,$$

sobre as quais sabemos que tipo de condição impor a fim de obter existência de solução, o que faremos a seguir, mostrando que essas condições necessárias serão também suficientes.

Com efeito, é fácil ver que $\gamma(t) = (0,t)$ é não-característica para ambas essas EDP's de primeira ordem, por isso, os PVI's

$$\begin{cases} \varphi_x + \mu_1(x,y)\varphi_y = 0, \\ \varphi(0,y) = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi_x + \mu_2(x,y)\psi_y = 0, \\ \psi(0,y) = y \end{cases} \tag{3.10}$$

possuem, cada um, solução única em uma vizinhança $V' \subset \Omega$ da origem que, por ser $\varphi_y(0,0) = 1$ e $\psi_y(0,0) = 1$, pode ser escolhida de maneira que tenhamos $\varphi_y(x,y) \neq 0$ e $\psi_y(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in V'$.

Nestas condições, sejam $\varphi, \psi : V' \longrightarrow \mathbb{R}$ estas suluções, definamos $\zeta : V' \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pondo

$$\zeta(x,y) = \big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$$

e observemos que

(1) $\zeta \in C^2(V')$, pois os coeficientes $\mu_1, \mu_2 \in C^3(\Omega)$ (Exercício 1 da Lista do Capítulo 2).

(2) ζ é difeomorfismo restrito a alguma vizinhança $V \subset V'$ de $(0,0)$, porque

$$\det\left[(J\zeta)(0,0)\right] = \det\begin{pmatrix} \varphi_x(0,0) & \varphi_y(0,0) \\ \psi_x(0,0) & \psi_y(0,0) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \varphi_x(0,0) & 1 \\ \psi_x(0,0) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\varphi_x(0,0) - \psi_x(0,0) = \mu_2(0,0)\psi_y(0,0) - \mu_1(0,0)\varphi_y(0,0) =$$

$$\mu_2(0,0) - \mu_1(0,0) \neq 0,$$

pois as raízes $\mu_1(0,0)$ e $\mu_2(0,0)$ são distintas. Daí, a existência de V vem do Teorema da Funcão Inversa.

(3) Finalmente, $a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y \neq 0$, em V, pois, nas condições que temos

[6] Como as funções raízes dependem apenas dos coeficientes de L, essas EDP's de primeira ordem dependem apenas de L.

usando as equações em (3.10) e as relações entre as raízes μ_1, μ_2 que aprendemos no Ensino Médio, é possível escrever:

$$a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y = a\mu_1\mu_2\varphi_y\psi_y + b\big(-\mu_1\varphi_y\psi_y - \mu_2\psi_y\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y =$$

$$\big[a\mu_1\mu_2 - b\big(\mu_1 + \mu_2\big) + c\big]\varphi_y\psi_y = \left[a\frac{c}{a} - b\left(\frac{2b}{a}\right) + c\right]\varphi_y\psi_y = \left[2c - \left(\frac{2b^2}{a}\right)\right]\varphi_y\psi_y =$$

$$\left(\frac{2ac - 2b^2}{a}\right)\varphi_y\psi_y = -\frac{2}{a}(b^2 - ac)\varphi_y\psi_y = -\frac{2\delta}{a}\varphi_y\psi_y \neq 0,$$

pois $\delta > 0$ em Ω, já que L é hiperbólico, e $\varphi_y\psi_y \neq 0$ em V.

Ou seja, $\zeta(x, y) = \big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big)$, com $(x, y) \in V$, é um difeormorfismo que atende as três conclusões enunciadas na proposição, completando assim a sua demonstração.

$\square$

A redução no caso parabólico, após o entendimento dos argumentos usados na prova da proposição anterior, torna-se bastante simples, como explicaremos no resultado a seguir.

Proposição 3.23 (Redução no caso Parabólico). *Seja $Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}$ um operador* **parabólico** *de segunda ordem com coeficientes C^3 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $(0, 0) \in \Omega$, sendo o coeficiente a não nulo em todos os pontos de Ω.*

Nessas condições existem:

(i) Abertos $W, V \subset \mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in V \subset \Omega$.

(ii) Um difeomorfismo C^2, $\xi : W \longrightarrow V$, cujo inverso indicaremos por ζ; e

(iii) Uma função G de cinco variáveis,

de tal modo que $u \in C^2(V)$ resolve $Lu = f$ em V se, e somente se, $U := u \circ \xi$ resolve $U_{ww} = G(z, w, U, U_z, U_w)$ em W.

Noutras palavras, se L é parabólico em $(0, 0)$, então L assume sua forma normal em uma vizinhança de $(0, 0)$, relativamente à algum sistema de coordenadas.

Demonstração. Com efeito, consideremos $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ a única função raiz $\mu(x, y) = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ da equação do segundo grau

$$a(x, y)\mu(x, y)^2 - 2b(x, y)\mu(x, y) + c(x, y) = 0, \text{ para } (x, y) \in \Omega.$$

Como na Observação 3.21, seja $\zeta : V \longrightarrow W$ um difeomorfismo C^2, com $\zeta(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$, de tal modo que para toda $u \in C^2(V)$ que resolva $Lu = f$ em V, implique que $U := u \circ \xi$ resolva $U_{ww} = G(z,w,U,U_z,U_w)$ em W, para alguma função G, então, como realizado na demonstração da proposição anterior, se $\varphi_y \neq 0$, então φ deve ser solução da EDP linear de primeira ordem

$$v_x + \mu(x,y)v_y = 0.$$

Reciprocamente, se supomos que $\varphi = \varphi(x,y) \in C^2(V')$, em algum abeto V' contendo $(0,0)$, seja a única solução do PVI

$$\begin{cases} \phi_x + \mu(x,y)\phi_y = 0 \\ \phi(0,y) = y. \end{cases} \tag{3.11}$$

e $\psi = \psi(x,y)$ é qualquer função $C^2(V')$ com $\psi_y(0,0) \neq 0$ tal que [7]

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_x(0,0) & \varphi_y(0,0) \\ \psi_x(0,0) & \psi_y(0,0) \end{pmatrix} \neq 0$$

então, existe um aberto V com $(0,0) \in V \subset V'$, de modo $\psi_y(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in V$ e definindo $\zeta : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, por $\zeta(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$, segue ζ é um difeomorfismo $C^2(V)$ que reduz $Lu = f$ a sua forma normal $U_{ww} = G(z,w,v,v_z,v_w)$ em algum aberto $W \subset \mathbb{R}^2$.

Com efeito, a existência de V, nestas condições, que torna ζ um difeomorfimo, vem do Teorema da Função Inversa, assim, precisamos apenas comprovar que ζ efetua a redução que queremos.

Realmente, pois como φ resolve (3.11), escrevendo $\xi = \zeta^{-1}$, a partir da igualdade $(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = (MU)(z,w) + F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big)$, em que

$$A(z,w) = \left[a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big);$$

$$B(z,w) = \left[a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y\right]\big(\xi(z,w)\big);$$

$$C(z,w) = \left[a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2\right]\big(\xi(z,w)\big),$$

como deduzido em (i') na Proposição 3.22, vemos que

(i) $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, em V,

[7] Verifique que uma ψ com estas propriedades existe!

mostrando então que

$$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = \underbrace{2B(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} + C(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}}_{=(MU)(z,w)} + F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big),$$

nos dizendo assim que, o que nos resta agora é verificar que

(ii) $a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \neq 0$, em V e

(iii) $a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y = 0$, em V,

para assim obter, como na Observação 3.21, uma G de modo que $U_{ww} = G$ em W.

Com efeito, que (ii) é verdadeiro, segue do fato de que, em todo V devemos ter

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x$$

ou seja,

$$\frac{\psi_x}{\psi_y} \neq \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\mu(x,y), \text{ em todo } V,$$

mostrando que $-\frac{\psi_x}{\psi_y} \neq \mu$ em V.

Daí, (ii) segue, pois como $\psi_y \neq 0$ em V, podemos colocá-lo em evidência, da mesma maneira que na prova da Proposição 3.22, e então, caso fosse $a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0$, chegaríamos numa contradição com a unicidade da raiz μ, já que $\frac{\psi_x}{\psi_y} \neq \frac{\varphi_x}{\varphi_y}$.

Finalmente, para comprovar (iii), usando que φ resolve (3.11) e pondo φ_y em evidência na expressão que define o coeficiente B, podemos escrever

$$a\varphi_x\psi_x + b\big(\varphi_x\psi_y + \psi_x\varphi_y\big) + c\varphi_y\psi_y = \varphi_y\big[-a\mu\psi_x + b\big(-\mu\psi_y + \psi_x\big) + c\psi_y\big],$$

lembrando que $\mu = b/a$, a igualdade acima fica

$$\varphi_y\left[-a\frac{b}{a}\psi_x + b\left(-\frac{b}{a}\psi_y + \psi_x\right) + c\psi_y\right] = \varphi_y\left[-b\psi_x + \left(-\frac{b^2}{a}\psi_y + b\psi_x\right) + c\psi_y\right] =$$

$$\varphi_y\left[-\frac{b^2}{a}\psi_y + c\psi_y\right] = \varphi_y\psi_y\left[-\frac{b^2}{a} + c\right] = -\varphi_y\psi_y\left[\frac{\delta}{a}\right] = 0,$$

uma vez que L é parabólico em Ω, ou seja, $\delta(x,y) = 0$ em todo $(x,y) \in \Omega$, completando a demonstração de que B é identicamente nulo, como queríamos. $\square$

Vejamos dois exemplos bem simples sobre como efetuar uma redução à forma canônica na prática.

Exemplo 3.24. *Consideremos a equação* $3u_{xx}+10u_{xy}+7u_{yy}=0$, *em* $\Omega=\mathbb{R}^2$. *Seus coeficientes são* $a(x,y)=3$, $b(x,y)=5$ *e* $c(x,y)=7$, *para em todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, *por isso, em todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tem-se*

$$\delta(x,y)=5^2-3\cdot 7=25-21=4,$$

mostrando que a EDP é hiperbólica em todo o plano.

Suas função raízes são as funções constantes [8]*:*

$$\mu_1(x,y)=\frac{b+\sqrt{\delta}}{a}=\frac{5+\sqrt{4}}{3}=\frac{7}{3}\quad e\quad \mu_1(x,y)=\frac{b-\sqrt{\delta}}{a}=\frac{5-\sqrt{4}}{3}=1.$$

Segundo o que aprendemos na Proposição 3.22, uma maneira de encontrar um difeomorfismo $\zeta(x,y)=\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big)$ *que efetua a redução, é exigir que suas coordenadas sejam soluções dos PVI's*

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_x+\mu_1(x,y)\varphi_y=0,\\ \varphi(0,y)=y\end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{l}\psi_x+\mu_2(x,y)\psi_y=0,\\ \psi(0,y)=y\end{array}\right.$$

os quais, neste caso, ficam

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_x+\frac{7}{3}\varphi_y=0,\\ \varphi(0,y)=y\end{array}\right. \quad e \quad \left\{\begin{array}{l}\psi_x+\psi_y=0,\\ \psi(0,y)=y\end{array}\right.$$

É imediato ver que $\varphi(x,y)=y-\frac{7}{3}x$ *e* $\psi(x,y)=y-x$ *são as únicas soluções destes PVI's, respectivamente, logo*

$$\zeta(x,y)=\left(y-\frac{7}{3}x,y-x\right)$$

é um difeomorfimso que cumpre a tarefa.

Notemos que seu inverso é dado por

$$\xi(z,w)=\left(\frac{3}{4}(w-z),\frac{1}{4}(7w-3z)\right).$$

Sabemos, a partir do que foi demonstrado na Proposição 3.22, que u *resolve* $3u_{xx}+10u_{xy}+7u_{yy}=0$ *em* $\mathbb{R}^2$ *se, e somente se,* $U=u\circ\xi$ *resolve* $U_{zw}=G$ *em* $\mathbb{R}^2$, *para alguma* G *(o "resíduo" da redução).*

[8] Lembre-se que μ_1 e μ_2 são as raízes da equação $3\mu^2\underbrace{-10}_{=-2b}\mu+7=0$.

Determinemos, apenas para completar o exemplo, essa função G.

Para isso, calculemos

$$U_z(z,w) = \frac{(u\circ\xi)}{\partial z}(z,w) = -\frac{3}{4}u_x\big(\xi(z,w)\big) - \frac{3}{4}u_y\big(\xi(z,w)\big) \Longrightarrow$$

$$U_{zw}(z,w) = -\frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{xx} + \frac{7}{4}u_{xy}\right] - \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{xy} + \frac{7}{4}u_{yy}\right] =$$

$$-\frac{3}{16}\left[3u_{xx} + 7u_{xy} + 3u_{xy} + 7u_{yy}\right] =$$

$$-\frac{3}{16}\left[3u_{xx} + 10u_{xy} + 7u_{yy}\right] = 0.$$

Como deveríamos ter $U_{zw} = G$, o cálculo acima diz que $G \equiv 0$.

Exemplo 3.25. *Consideremos agora a equação $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = x$ (não-homogêna agora), em $\Omega = \mathbb{R}^2$, cujos coeficientes são $a(x,y) = c(x,y) = 1$, $b(x,y) = -1$, em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde*

$$\delta(x,y) = (-1)^2 - 1\cdot 1 = 1 - 1 = 0, \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

dizendo que a equação é parabólica em todo o $\mathbb{R}^2$.

Dessa forma, ela possui uma única função raiz [9], a saber:

$$\mu(x,y) = \frac{b+\sqrt{\delta}}{a} = \frac{-1+\sqrt{0}}{1} = -1.$$

A Proposição 3.23 ensina que um difeomorfismo $\zeta(x,y) = \big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$ que efetua a redução dessa equação pode ser obtido se sua primeira coordenada φ resolver

$$\begin{cases} \varphi_x + \mu(x,y)\varphi_y = 0, \\ \varphi(0,y) = y \end{cases}$$

que aqui se torna

$$\begin{cases} \varphi_x - \varphi_y = 0, \\ \varphi(0,y) = y. \end{cases}$$

Naturalmente, $\varphi(x,y) = y + x$ é a única solução deste PVI.

Por outro lado, ainda sob a luz da Proposição 3.23, podemos encontrar a segunda coordenada

[9] Lembre-se que μ é a raiz da equação $\mu^2 + \underbrace{2}_{=-2b}\mu + 1 = 0$.

de ζ, escolhendo uma função ψ, com $\psi_y \neq 0$, tal que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0.$$

Como $\varphi_x = 1$ e $\varphi_y = 1$, basta escolher ψ satisfazendo $\psi_y - \psi_x \neq 0$, o que evidentemente acontece com a função $\psi(x, y) = y$.

Nessas condições, definimos $\zeta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pondo

$$\zeta(x, y) := (x + y, y),$$

que será um difeomorfimso que efetua a redução que desejamos.

Com efeito, seu inverso é dado por

$$\xi(z, w) = (z - w, w),$$

daí u resolve $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = x$ em $\mathbb{R}^2$ se, e somente se, $U := u \circ \xi$ resolve $U_{ww} = G$ em $\mathbb{R}^2$, para alguma G. A seguir, encontraremos essa função G:

$$U_w(z, w) = -u_x\big(\xi(z, w)\big) + u_y\big(\xi(z, w)\big) \Longrightarrow$$

$$U_{ww}(z, w) = -\left[-u_{xx}\big(\xi(z, w)\big) + u_{xy}\big(\xi(z, w)\big)\right] + \left[-u_{xy}\big(\xi(z, w)\big) + u_{yy}\big(\xi(z, w)\big)\right] =$$

$$u_{xx}\big(\xi(z, w)\big) - 2u_{xy}\big(\xi(z, w)\big) + u_{yy}\big(\xi(z, w)\big) =$$

$$u_{xx}(z - w, w) - 2u_{xy}(z - w, w) + u_{yy}(z - w, w) = z - w.$$

Como deveríamos ter $U_{ww} = G$, o cálculo acima diz que $G(z, w, U, U_z, U_w) = z - w$, completando o exemplo.

Terminemos esta seção explicando como o difeomorfismo ζ, que efetua as reduções discutidas acima, está associado às curvas características de Lu, consolidando assim a justificativa que demos para a introdução deste conceito.

Observação 3.26. *Supondo que $Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}$ é hiperbólico em uma vizinhança Ω da origem e que a nunca se anula aí, vimos na Proposição 3.22 que se $\varphi, \psi \in C^2(V)$ são, respectivamente, as únicas soluções em V dos seguintes PVI's para EDP's lineares de primeira ordem*

$$\begin{cases} \varphi_x + \mu_1(x,y)\varphi_y = 0, \\ \varphi(0,y) = y \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \psi_x + \mu_2(x,y)\psi_y = 0, \\ \psi(0,y) = y, \end{cases} \tag{3.12}$$

então definindo $\zeta : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *por* $\zeta(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$, *resulta que* ζ *é um difeomorfismo* $C^2(V)$ *que reduz* $Lu = f$ *a sua primeira forma normal* $U_{zw} = G(z,w,U,U_z,U_w)$ *em algum aberto* $W \subset \mathbb{R}^2$, *ou seja,* $Lu = f$ *em* V *se, e somente se,* $U := u \circ \xi$ *resolve* $U_{zw} = G(z,w,U,U_z,U_w)$ *em* W, *sendo* $\xi := \zeta^{-1}$.

Como sabemos, φ *e* ψ *podem ser expressas usando o Método das Características.*

Com efeito, analisando o caso φ, *em primeiro lugar, devemos considerar o campo* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *dado por*

$$F(x,y) = \big(1, \mu_1(x,y)\big),$$

e, para cada $w \in I$ [10], *resolver o PVI para EDO's*

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{(w)}(z) = \big(1, \mu_1\big(\Phi_{(w)}(z)\big)\big)\,, \\ \Phi_{(w)}(0) = (0,w). \end{cases}$$

Escrevendo sua solução $\Phi_{(w)}$ *em coordenadas,* $\Phi_{(w)}(z) = \big(\underbrace{\beta_{(w)}(z)}_{=z}, \alpha_{(w)}(z)\big)$, *vemos que elas satisfazem os PVI's*

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{(w)}(z) = 1, \\ \beta_{(w)}(0) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_{(w)}(z) = \mu_1\big(\Phi_{(w)}(z)\big), \\ \alpha_{(w)}(0) = w, \end{cases}$$

dizendo pois que $\beta_{(w)}(z) = z$ *e, então, que* $\dot{\alpha}_{(w)}(t) = \mu_1\big(t, \alpha_{(w)}(t)\big)$, *para* z *em algum intervalo* J.

Observemos agora que, de acordo com o que aprendemos na Observação 3.11, essa última igualdade diz, em particular, que para cada $w \in I$ *fixo, a correspondência*

$$J \ni t \mapsto \big(t, \alpha_{(w)}(t)\big) \in \Omega$$

é uma curva característica para o $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$.

Por simplicidade, escreveremos $\alpha(z,w) := \alpha_{(w)}(z)$.

Com a solução $\Phi_{(w)}$ *construimos, por meio da Observação 2.27, o difeomorfismo* $\Xi : A \longrightarrow \Omega'$, *pondo* $\Xi(z,w) := \Phi_{(w)}(z) = \big(z, \alpha(z,w)\big)$, *o que constitui o primeiro ingrediente necessário para expressar a solução* φ *do primeiro PVI em* (3.12). *O segundo pilar é obtido ao considerar o PVI*

$$\begin{cases} U_z = 0, \\ U(0,w) = w, \end{cases}$$

[10] Escolha o intervalo I, aberto e com $0 \in I$, de tal modo que $\{0\} \times I \subset \Omega$.

que tem $U(z,w) = w$ como única solução.

Nessas condições, $\varphi = U \circ \Xi^{-1}$, e aqui é relativamente simples escrever a inversa Ξ^{-1}.

Com efeito, dado um par $(x,y) \in \Omega'$, existe um único par $(z,w) \in A$ tal que

$$(x,y) = \Xi(z,w) = \big(z, \alpha(z,w)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad z = x \text{ e } y = \alpha(x,w).$$

Isso nos diz que, para cada par $(x,y) \in \Omega'$, existe um único $w := \theta(x,y)$ de modo que

$$y = \alpha\big(x, \theta(x,y)\big),$$

consequentemente $\Xi^{-1}(x,y) = \big(x, \theta(x,y)\big)$.

Isso posto,

$$\varphi(x,y) = U\big(x, \theta(x,y)\big) = \theta(x,y),$$

demonstrando que φ é como uma "inversa" da família de curvas características $\alpha_{(w)}$, $w \in I$.

Analogamente, prova-se que ψ é uma "inversa" da família de curvas característica obtidas repetindo o estudo acima com a função raiz μ_2, completando a observação e os assuntos deste capítulo.

7 Exercícios

(1) Para cada uma das EDP's semilineares de 2^a ordem a seguir determine, respectivamente, o conjunto dos pontos onde ela é parabólica, hiperbólica e elítico:

(i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = xu_x - u$

(ii) $2yu_{xx} + 8xyu_{xy} - xu_{yy} = u_y - u_x$

(iii) $-xu_{xx} - 16u_{xy} + yu_{yy} = uu_x$

(2) Verifique que o tipo de uma EDP's semilinear de 2^a ordem é *invariante por multiplicação por função não nula*, ou seja, se $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ é a parte principal da forma geral de uma EDP semilinear de 2^a ordem, com coeficientes $C^0(\Omega)$, e $\alpha : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua que nunca se anula em Ω, então o sinal do discriminante de L em $(x,y) \in \Omega$ é o mesmo que o de αL em (x,y).

(3) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $Lu = 2b(x,y)u_{xy}$ a parte principal de uma EDP semilinear de segunda ordem, com $b \in C^1(\Omega)$ que **nunca se anula** em Ω. Pedimos:

(ii) Verifique que L é hiperbólico em Ω.

(ii) Encontre todas as curvas características para L.

(4) Determine, caso existam, as curvas características das EDP's semilineares de 2^a ordem a seguir:

(i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = u\cos(u_x)$

(ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u_y - u_x$

(iii) $(1+x^2)^2u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} = xy - \sin(u) + u_y$

(iv) $u_{xx} + (1+y^2)^2u_{yy} = -u^2$

(5) Seja $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ a parte principal da forma geral de uma EDP semilinear de segunda ordem, com coeficientes $C^0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto e $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ uma curva C^1 regular com $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $t \in I$.

Dado $p = \gamma(t_0) \in \Omega$, demonstre que:

(i) Se $\alpha'(t_0) \neq 0$, então γ é característica para L em p se, e somente se, $\frac{\beta'(t_0)}{\alpha'(t_0)}$ é raiz da equação do segundo grau

$$a(p)\mu^2 - 2b(p)\mu + c(p) = 0,\ p \in \Omega.$$

(ii) Se $\beta'(t_0) \neq 0$, então γ é característica para L em p se, e somente se, $\frac{\alpha'(t_0)}{\beta'(t_0)}$ é raiz da equação do segundo grau

$$a(p) - 2b(p)\nu + c(p)\nu^2 = 0,\ p \in \Omega.$$

(6) Seja $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ um operador **hiperbólico** de segunda ordem com coeficientes C^3 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $(0,0) \in \Omega$.

Seja também $\zeta : V \longrightarrow W$ uma mudança de coordenadas, de classe C^2 com $\zeta(x,y) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ e $(0,0) \in V \subset \Omega$, que reduz L a sua forma normal $U_{zw} = G(z,w,v,v_z,v_w)$ em W.

Nessas condições, prove que se $\gamma : I \longrightarrow V$ é uma curva C^1 regular ecaracterística para L em todo $\gamma(t)$, então existe um intervalo aberto $J \subset I$ de maneira que φ é constante ao longo de γ em J ou ψ é constante ao longo de γ em J.

(7) [Corrigir as hipóteses, porque assim não tá saindo]Seja $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ a parte principal de uma EDP seminilear de segunda ordem num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja também $\zeta : V \longrightarrow W$ um difeormorfismo de classe C^2, com $V \subset \Omega$, cujo inverso indicamos por ξ.

Considere ainda a expressão de Lu nas coordenadas $(z,w) \in W$, ou seja, a expressão

$$(Lu)\big(\xi(z,w)\big) = \underbrace{A(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2B(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial w} + C(z,w)\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}}_{=(MU)(z,w)} + F\big(\xi(z,w), U, U_z, U_w\big).$$

Nessas condições, mostre que uma curva C^1 e regular, $\gamma : I \longrightarrow V$, é característica para L em $p = \gamma(t_0)$ se, e somente se $\eta(t) := (\zeta \circ \gamma)(t)$, $t \in I$, é característica para M em $\zeta(p)$.

(8) Considere $Lu = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}$ a parte principal de uma EDP seminilear de segunda ordem num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com coeficientes contínuos que não se anulam simultaneamente, e p um ponto de Ω. Mostre que

(i) Se $a(p) = 0$ e $b(p) \neq 0$, então L é hiperbólico em p.

(ii) Se $c(p) = 0$ e $b(p) \neq 0$, então L é hiperbólico em p.

(iii) Se $a(p) \cdot c(p) > 0$ e $b(p) = 0$, então L é elítico em p.

(iv) Se $a(p) \cdot c(p) < 0$ e $b(p) = 0$, então L é hiperbólico em p.

(v) Se $a(p) \cdot c(p) = 0$ e $b(p) = 0$, então L é parabólico em p.

(vi) Se $a(p) = c(p)$ e $|b(p)| = |a(p)|$, então L é parabólico em p.

(9) Reduza cada uma das equações abaixo a sua forma canônia e determine o "resíduo" G dessa redução.

(i) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 5yu$.

(ii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u_x - u_y$.

(iii) $(1 + x^2)^2 u_{xx} - (1 + y^2)^2 u_{yy} = 0$.

(10) **Redução no caso Elítico:**

Capítulo 4

A Equação da Onda

Observemos que, nada do que foi estudado no capítulo anterior, deu qualquer informação sobre existência de solução para uma equação linear de segunda ordem em sua forma geral, bem diferente do que aconteceu no Capítulo , onde foi possível desenvolver uma teoria bastante geral sobre existência de solução para problemas lineares não-homogêneos de segunda ordem. Ao contrário disso, estudamos apenas propriedades qualitativas dessas equações, procurando reconhecer padrões gerais no seu comportamento, como a existência de curvas caracterśiticas o que, posteriormente, se mostrou associado ao fenômeno da redução à forma canônica.

Essa abordagem se deve ao fato de que a resolubilidade para EDP's de segunda ordem é um problema muito mais difícil do que ele o é para as de primeira (o que era natural imaginar que iria acontecer).

Nesse sentido, o que geralmente acontece, no estudo da resolubilidade das EDP's de segunda ordem, é considerar um tipo particular delas (ou uma determinada classe) e então criar uma teoria que dê respostas sobre a existência de suas soluções.

Dito isso, o objetivo deste capítulo é então estudar a resolubildade para a equação da onda. Mais especificamente, pretendemos considerar problemas de valor inicial e de contorno para a EDP da onda a fim de obtermos teoremas de existência e unicidade de solução clássica. Nossa análise aqui será dividida em duas situações: A **corda infinita** e a **corda finita**.

1 Introdução

Dado um número real $c > 0$, consideremos a Equação da Onda em $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Longleftrightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \tag{4.1}$$

Neste momento, não é mais necessário estipular que a aplicação $\zeta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\zeta(t, x) := (x + ct, x - ct)$$

é um difeomorfismo C^∞ que reduz a equação hiperbólica (4.1) a sua primeira forma normal

$$U_{zw} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

Com efeito, em particular, é imediato que suas funções coordenadas, as funções $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(t, x) = x + ct \quad \text{e} \quad \psi(t, x) = x - ct,$$

constituem, precisamente, as únicas soluções dos PVI's [1]

$$\begin{cases} \varphi_t - c\varphi_x = 0, \\ \varphi(0, x) = x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi_t + c\psi_x = 0, \\ \psi(0, x) = x. \end{cases}$$

A partir daí, a Proposição 3.22 nos ensina que ζ efetua a redução e, como realizado na Introdução do Capítulo 3, a redução é de tal forma que se tem $G \equiv 0$, resultando em (4.2).

Isso posto, podemos usar o Teorema 1.29 para concluir que uma $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ resolve a equação (4.2) quando, e apenas quando,

$$\frac{\partial U}{\partial w}(z, w) = H(w), \ (z, w) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.3}$$

para alguma $H \in C^1(\mathbb{R})$.

Este mesmo Teorema, aplicado agora a (4.3), assegura que $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$ resolve (4.2) se, e somente se, U é da forma

$$U(z, w) = \alpha(z) + \beta(w), \ (z, w) \in \mathbb{R}^2,$$

para certas $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R})$.

[1] $a(t, x) = 1$, $b(t, x) = 0$ e $c(t, x) = -c^2$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, logo $\delta(t, x) = c^2 > 0 \Longrightarrow \mu_1 = -c$ e $\mu_2 = c$.

Donde, $u := U \circ \zeta$ deve ser solução da equação da onda (4.1) e, obviamente,

$$u(t,x) = \big(U \circ \zeta\big)(x,t) = U(x+ct, x-ct) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Todos estas conclusões serão agora cristalizadas no seguinte

Lema 4.1 (Solução geral da Equação da Onda). *Fixado um número real $c > 0$, uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, é solução da Equação da Onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ se, e somente se, existem funções $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R})$ de modo que*

$$u(t,x) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

2 A corda infinita

Dados um par de funções, $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, e um número positivo $c > 0$, o **problema da corda infinita** consiste no seguinte PVI [2]

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Do ponto de vista físico, a equação da onda, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ em $\mathbb{R}^2$, modela o fenômeno de propagação das ondas transversáis produzidas por uma corda (ou linha), perfeitamente flexível (que não oferece resistência a ser dobrada), de comprimento infinito, representada pela reta $\mathbb{R}$, sendo o fenômeno ocorrendo em um plano. Nela, a variável $t \in \mathbb{R}$ indica o tempo e a variável $x \in \mathbb{R}$ um ponto sobre esta corda. A condição inicial f imposta em (4.4), significa que a configuração inicial da corda, ou seja, seu estado no início do experimento no instante $t = 0$, equivale ao gráfico de f, o que quer dizer que o ponto x da corda situa-se na posição $(x, f(x))$ do plano, enquanto que a condição g representa a velocidade inicial de propagação da onda formada pelo gráfico da f, ou o modo como ela é abandonada nesta posição.

Nessas condições, o que se deseja com as soluções $u = u(x,t)$ deste problema é prever qual será a configuração da onda produzida por esta corda em cada instante t, no sentido de que, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, o gráfico da função $u(\cdot, t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ exiba o retrato desta onda no instante t.

[2] Que é caracterizado pelo fato de x variar em toda reta $\mathbb{R}$.

Entretanto, neste texto, trataremos este problema apenas do ponto de vista Matemático, deixando a parte Física do problema como um tema de pesquisa para o aluno interessado.

A partir de tudo o que apresentamos na introdução acima, em particular, o Lema 4.1, torna-se muito simples exibir uma solução para o PVI proposto, ou seja, uma $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ atendendo a todas as três exigências que ele impõe.

Com efeito, antes de mais nada, uma tal $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ deve ser solução da equação da onda, por isso, do Lema 4.1, devem existir funções $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R})$ de modo que

$$u(t,x) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Impondo agora as condições iniciais a uma u dessa forma, podemos encontrar α e β para que u resolva o problema como um todo, da seguinte maneira [3]:

$$\begin{cases} f(x) = u(0,x) = \alpha(x) + \beta(x), & x \in \mathbb{R}, \\ g(x) = u_t(0,x) = c\alpha'(x) - c\beta'(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} cf'(x) = c\alpha'(x) + c\beta'(x), & x \in \mathbb{R}, \\ g(x) = c\alpha'(x) - c\beta'(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Somando estas duas igualdades, encontramos

$$2c\alpha'(x) = cf'(x) + g(x) \Longrightarrow \alpha'(x) = \frac{cf'(x) + g(x)}{2c}$$

e subtraindo a segunda da primeira, vem

$$2c\beta'(x) = cf'(x) - g(x) \Longrightarrow \beta'(x) = \frac{cf'(x) - g(x)}{2c}.$$

Agora, integrando de 0 até y as duas últimas igualdades, por meio do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\alpha(y) = \alpha(0) + \frac{f(y)}{2} - \frac{f(0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^y g(s)ds$$

e

$$\beta(y) = \beta(0) + \frac{f(y)}{2} - \frac{f(0)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^y g(s)ds.$$

Daí, fazendo $y = x + ct$ na expressão de α e $y = x - ct$ na de β, resulta que

$$u(t,x) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct) =$$

[3] Note que, se $u(t,x) = \alpha(x+ct) + \beta(x-ct)$, então $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = c\alpha'(x+ct) - c\beta'(x-ct)$.

$$\alpha(0)+\frac{f(x+ct)}{2}-\frac{f(0)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(s)ds+\beta(0)+\frac{f(x-ct)}{2}-\frac{f(0)}{2}-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}g(s)ds=$$

$$\big[\alpha(0)+\beta(0)\big]-f(0)+\frac{f(x+ct)}{2}+\frac{f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}g(s)ds,$$

como, da primeira igualdade em (4.5), $f(0)=\alpha(0)+\beta(0)$, concluímos ao final que

$$u(t,x)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds,\ (t,x)\in\mathbb{R}^2. \tag{4.6}$$

Isso demonstra que, se u resolve todo o PVI (4.1), então u deve ser da forma acima.

Reciprocamente, é imediato verificar (Exercício) que, dadas $f\in C^2(\mathbb{R})$ e $g\in C^1(\mathbb{R})$, definindo u pela fórmula (4.2), tem-se que $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ e resolve o PVI (4.1). O que nos permite então dar um nome a esta solução:

Definição 4.2. *Dadas $f\in C^2(\mathbb{R})$ e $g\in C^1(\mathbb{R})$, e um número positivo $c>0$, a única solução do PVI* (4.1)*, ou seja, a função u dada por*

$$u(t,x)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds,\ (t,x)\in\mathbb{R}^2,$$

é chamada a **Solução de d'Alembert** *do PVI* (4.4)*.*

3 A corda finita

Fixemos agora números $c>0$ e $l>0$. Dados um par de funções, $f\in C^2([0,l];\mathbb{R})$ e $g\in C^1([0,l];\mathbb{R})$ [4], o **problema da corda finita com condição de fronteira de Dirichlet homogênea** consiste no seguinte PVI

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx},\ \text{para } t\in\mathbb{R} \text{ e } x\in(0,l),\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\ \text{para } t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=f(x),\quad x\in[0,l],\\ u_t(x,0)=g(x),\quad x\in[0,l]. \end{cases} \tag{4.7}$$

[4] As derivadas nos extremos de $[0,l]$ são entendidas como derivadas laterais.

Para fins de representação geométrica, adotaremos que o domínio da EDP é $\Omega := (0,l) \times \mathbb{R}$, ou seja, que x é a primeira variável e que t é a segunda. Dessa maneira, tem-se

$$\partial\Omega = \big\{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(l,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Pretendemos encontrar uma função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua no fecho de Ω, que atenda a todas as exigências do problema (em algum sentido).

Comecemos com o caso em que $g \equiv 0$ e $f \in C^2([0,l];\mathbb{R})$. Com isso, o PVI fica:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,l]. \end{cases} \tag{4.8}$$

Antes de seguir com a análise, suponhamos que $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua que cumpre as três condições: $u(0,t) = u(l,t) = 0$, para $t \in \mathbb{R}$ e $u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,l]$, então tomando $x = 0$, $x = l$ e $t = 0$ nessas igualdades, concluímos que

$$f(0) = u(0,0) = 0 = u(l,0) = f(l) \Longrightarrow f(0) = f(l) = 0.$$

Dessa maneira, a fim de que ao menos estas três últimas condições se cumpram, devemos ter que a condição inicial f satisfaça $f(0) = f(l) = 0$ [5], o que chamaremos, de agora em diante, **condição de compatibilidade**, as quais revelam que as condições iniciais e de fronteira não podem ser independentes uma da outra a fim de que o problema possua solução.

Parte da estratégia para estudar o caso $g \equiv 0$ procura aproveitar a solução de D'Alembert apresentada na seção anterior, a qual não poderá ser usada diretamente, uma vez que a condição inicial f não está, necessariamente, definida em toda a reta, que era uma condição necessária naquela análise. Por isso, tentaremos encontrar uma extensão conveniente F de f, à reta toda, que nos possibilite usar a Definição 4.2.

Com efeito, suponhamos f satisfazendo as condições de compatibilidade, tomemos $F \in C^2(\mathbb{R})$ com $F\,|_{[0,l]} = f$ e consideremos o PVI

[5] Isso revela que a condição inicial f não poderá ser tão arbitrária.

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U(0,t) = U(l,t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{R} \\ U(x,0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ U_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.9}$$

A partir do que foi feito na seção anterior, se este problema possuir solução $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$, essa deve ser única, pois ela também deverá cumprir

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U(x,0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ U_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.10}$$

por isso ela vem dada por

$$U(x,t) = \frac{F(x+ct) + F(x-ct)}{2}, \ (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Daí, em particular, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$0 = U(0,t) = \frac{F(0+ct) + F(0-ct)}{2} = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2} \Longrightarrow F(-ct) = -F(ct).$$

Como a função $\mathbb{R} \ni t \mapsto ct \in \mathbb{R}$ é uma bijeção da reta, a conclusão acima é o mesmo que

$$F(-y) = -F(y), \text{ para todo } y \in \mathbb{R},$$

o que significa dizer que F é uma **função ímpar**.

Por outro lado, fazendo agora $x = l$, obtemos

$$0 = U(l,t) = \frac{F(l+ct) + F(l-ct)}{2} \Longrightarrow F(l+ct) = -F(l-ct).$$

Mas, como já sabemos, F é ímpar, portanto

$$F(l+ct) = -F(l-ct) = F(ct-l), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Usando mais uma vez que $\mathbb{R} \ni t \mapsto ct \in \mathbb{R}$ é uma bijeção, a propriedade acima pode escrever-se como

$$F(y+l) = F(y-l), \text{ para todo } y \in \mathbb{R},$$

consequentemente, para todo $y \in \mathbb{R}$, resulta

$$F(y+2l) = F\big((y+l)+l\big) = F\big((y+l)-l\big) = F(y),$$

significando, então, que F deve ser uma função $2l$-periódica.

Demonstramos, com essas considerações, a seguinte:

Proposição 4.3. *Dada $f \in C^2([0,l];\mathbb{R})$ com $f(0) = f(l) = 0$, se $F \in C^2(\mathbb{R})$ com $F\,|_{[0,l]} = f$ é tal que a solução de D'Alembert que ela determina, $U(x,t) = \frac{F(x+ct)+F(x-ct)}{2}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, cumpre*

$$U(0,t) = U(l,t) = 0 \textit{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

então F é uma função ímpar de $2l$-periódica.

A pergunta natural que agora surge é: Dada uma função $f \in C^2([0,l];\mathbb{R})$ com $f(0) = f(l) = 0$, é possível encontrar uma extensão $F \in C^2(\mathbb{R})$ de f, ímpar e $2l$-periódica?

A resposta é "sim", toda vez que f satisfizer também $f''(0) = f''(l) = 0$, como as considereções a seguir comprovam.

Com efeito, decompondo a reta como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big[(2k-1)l, (2k+1)l\big)$$

basta definir $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo [6]

$$F(x) = \begin{cases} f(x-2kl), & se \;\; 2kl \leq x \leq (2k+1)l, \\ -f(2kl-x), & se \;\; (2k-1)l \leq x \leq 2kl. \end{cases} \tag{4.11}$$

Destaquemos as propriedades:

(1^a) F está bem definida, ou seja, seu valor é o mesmo nas extremidades dos intervalos $\big[2kl, (2k+1)l\big]$ e $\big[(2k-1)l, 2kl\big]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Com efeito, $F(ml) = 0$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, uma vez que $f(0) = f(l) = 0$.

(2^a) F estende f, pois quando $x \in [0,l]$, temos que $x \in \big[2kl, (2k+1)l\big]$ para $k = 0$, por isso vale primeira expressão na definição de $F(x)$, ou seja, vale que $F(x) = f(x - 2\cdot 0 \cdot l) = f(x)$, provando que $F\,|_{[0,l]} = f$.

[6]Note que, nas expressões que definem F, temos $x - 2kl \in [0,l]$, quando $2kl \leq x \leq (2k+1)l$, bem como $2kl - x \in [0,l]$, para $(2k-1)l \leq x \leq 2kl$, por isso podemos aplicar f nestes valores.

(3^a) F é ímpar, porque se $x \in \mathbb{R}$, existe um único inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \big[(2k-1)l, (2k+1)l\big)$. Suponhamos que seja

$$2kl \leq x \leq (2k+1)l, \quad \text{com } k \geq 0,$$

daí, primeiramente, $F(x) = f(x - 2kl)$, graças a primeira expressão em (4.11).

Em segundo

$$\big[2(-k) - 1\big]l \leq -x \leq 2(-k)l$$

e então, para calcular $F(-x)$, utilizamos a segunda expressão em (4.11)

$$F(-x) = -f\big(2(-k)l - (-x)\big) = -f(x - 2kl) = -F(x),$$

donde a imparidade de F segue.

(4^a) F é $2l$-periódica. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$ identificamos o único inteiro $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $x \in \big[(2k-1)l, (2k+1)l\big)$. Como acima, suponhamos, para fixar ideias, que seja

$$2kl \leq x \leq (2k+1)l \Longrightarrow 2kl+2l \leq x+2l \leq (2k+1)l+2l \Longleftrightarrow 2(k+1)l \leq x+2l \leq \big[2(k+1)+1\big]l.$$

Por um lado, $F(x)$ é dado pela primeira expressão em (4.11), ou seja,

$$F(x) = f(x - 2kl).$$

Por outro, como $2(k+1)l \leq x + 2l \leq \big[2(k+1)+1\big]l$, também $F(x+2l)$ calcula-se pela primeira expressão em (4.11), com $k+1$ fazendo o papel do k de lá, logo

$$F(x+2l) = f\big((x+2l) - 2(k+1)l\big) = f\big(x + 2l - 2kl - 2l\big) = f(x - 2kl) = F(x).$$

O caso em que $(2k-1)l \leq x \leq 2kl$ demonstra-se analogamente, e a $2l$-periodicidade segue.

(5^a) $F \in C(\mathbb{R})$. Isso resulta da continuidade de F e do "Lema da Colagem" da Topologia. Mas basta ver que os limites laterais de F, nos pontos de colagem ml, são sempre iguais a zero.

(6^a) $F \in C^1(\mathbb{R})$. Com efeito, fixado $k \in \mathbb{Z}$, segue que as restrições $F\,|_{\big(2kl, 2(k+1)l\big)}$ e $F\,|_{\big(2(k-1)l, 2kl\big)}$ são de classe C^1, por escreverem-se como composição da função $f \in C^1(0,l)$ com as translações $\big(2kl, 2(k+1)l\big) \ni x \mapsto x - 2kl \in (0,l)$ e $\big(2(k-1)l, 2kl\big) \ni x \mapsto 2kl - x \in (0,l)$. A

Regra da cadeia então nos diz que

$$F'(x) = f'(x - 2kl), \quad \text{para } x \in \big(2kl, 2(k+1)l\big) \tag{4.12}$$

e

$$F'(x) = f'(2kl - x), \quad \text{para } x \in \big(2(k-1)l, 2kl\big). \tag{4.13}$$

Resta então mostrar que F é C^1 nos pontos da forma ml, $m \in \mathbb{Z}$. Faremos apenas os casos $x_0 = 0$ e $x_0 = l$ demonstrando, primeira, a existências das derivadas laterais nestes pontos. Realmente, pois levando em conta a existência da derivada lateral de f à direita do 0 temos

- $$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'_+(0)$$

- $$\lim_{h\to 0-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-f(-h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} = f'_+(0)$$

Assim, como $F'_+(0) = F'_-(0) = f'_+(0)$ a diferenciabilidade de F em $x_0 = 0$ segue, valendo que

$$F'(0) = f'_+(0).$$

Agora, por meio de (4.12), concluímos

$$\lim_{h\to 0+} F'(h) = \lim_{h\to 0+} f'(h) = f'_+(0) = F'(0).$$

Analogamente, usando (4.13), tem-se

$$\lim_{h\to 0-} F'(h) = \lim_{h\to 0-} f'(-h) = f'_+(0) = F'(0).$$

Resumindo,

$$\lim_{h\to 0+} F'(h) = \lim_{h\to 0-} F'(h) = F'(0),$$

o que significa a continuidade de F' em x_0.

Do mesmo modo, a existência da derivada lateral de f à esquerda de l nos dá

- $$\lim_{h\to 0+} \frac{F(l+h) - F(l)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-f\big(2l - (l+h)\big) - f(l)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(l-h) - f(l)}{-h} = f'_-(l)$$

- $$\lim_{h\to 0-}\frac{F(l+h)-F(l)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(l+h)-f(l)}{h}=f'_-(l).$$

  Vemos assim que $F'_+(l)=F'_-(l)=f'_-(l)$, de onde resulta a diferenciabilidade de F em $x_0=l$.

  A continuidade de F' em $x_0=l$ é demonstrada analogamente ao caso x_0 apresentado acima.

(7^a) $F\in C^2(\mathbb{R})$. **Exercício.**

Observação: É neste ponto que é necessária a hipótese " $f''(0)=f''(l)=0$ ".

Resumindo, demonstramos o

Lema 4.4. *Toda função $f\in C^2([0,l];\mathbb{R})$ com*

(i) $f(0)=f(l)=0$; e

(ii) $f''(0)=f''(l)=0$,

possui uma extensão $F\in C^2(\mathbb{R})$, ímpar e $2l$-periódica que, em particular, deve ser única.

Observação 4.5. *Note que, se $\varphi\in C([0,l];\mathbb{R})$ (apenas contínua) cumpre $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, a partir do que foi comprovado em $(1^a)-(5^a)$, concluímos que φ possui uma extensão $\Phi\in C(\mathbb{R})$ ímpar e $2l$-periódica.*

Estamos agora em condições de demonstrar o teorema de existência de solução para o problema da corda finita, no o caso em que $g\equiv 0$.

Teorema 4.6 (Corda finita no caso $g\equiv 0$). *Fixado $c>0$, se $f\in C^2([0,l];\mathbb{R})$ é uma função tal que*

(i) $f(0)=f(l)=0$; e

(ii) $f''(0)=f''(l)=0$,

então, existe uma função $u\in C\big([0,l]\times\mathbb{R}\big)\cap C^2\big((0,l)\times\mathbb{R}\big)$ que resolve o PVI (4.8).

Demonstração. Com efeito, seja $F \in C^2(\mathbb{R})$ a extensão ímpar e $2l$-periódica de f dada no Lema 4.4. Com ela, consideramos $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a solução de D'Alembert do PVI

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U(x,0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ U_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ou seja, U é a função dada por

$$U(x,t) = \frac{F(x+ct) + F(x-ct)}{2}, \ (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Nessas condições, definimos

$$u := U\ |_{[0,l]\times\mathbb{R}}$$

e verifiquemos que u atende a todas as propriedades enunciadas no teorema.

Primeiramente, é imediato que se tem $u \in C\big([0,l]\times\mathbb{R}\big) \cap C^2\big((0,l)\times\mathbb{R}\big)$, porque u é a restrição de uma função C^2 do plano $\mathbb{R}^2$ inteiro a faixa $[0,l] \times \mathbb{R}$.

É igualmente claro que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ em $(0,l) \times \mathbb{R}$, porque quando $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$u_{tt}(x,t) = U_{tt}(x,t) = c^2 U_{xx}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

Também, para $x \in [0,l]$, temos

$$u(x,0) = U(x,0) = F(x) = f(x)$$

e

$$u_t(x,0) = U_t(x,0) = 0,$$

demonstrando o que diz respeito às condições iniciais de (4.8).

Resta apenas demonstrar que a condição de fronteira de Dirichlet está também satisfeita.

Com efeito, para todo $t \in \mathbb{R}$ podemos escrever

$$u(0,t) = U(0,t) = \frac{F(ct) + F(-ct)}{2} \overbrace{=}^{F \text{ impar}} \frac{F(ct) - F(ct)}{2} = 0$$

e

$$u(l,t) = U(l,t) = \frac{F(l+ct) + F(l-ct)}{2} \overbrace{=}^{F\ 2l-periodica} \frac{F(l+ct) + F\big((l-ct) - 2l\big)}{2} =$$

$$\frac{F(l+ct) + F(-ct-l)}{2} \overbrace{=}^{F \text{ impar}} \frac{F(l+ct) - F(ct+l)}{2} = 0,$$

completando a demonstração. $\square$

Trataremos agora o PVI (4.7) considerando o caso em que $f \equiv 0$ e $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$. Nestas condições ele se escreve como:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,l]. \end{cases} \tag{4.14}$$

Como antes, tentaremos aproveitar a solução de D'Alembert para obter uma solução para o PVI acima. Do mesmo modo que no Teorema 4.6, como g não está definida em toda a reta, essa estratégia não pode ser aplicada diretamente, por isso, procuraremos estender g, convenientemente, à toda a reta, encontrando uma função $G \in C^1(\mathbb{R})$ que, por sua vez, dará origem a uma solução de D'Alembert, a qual esperamos, após restringir à faixa $[0,l] \times \mathbb{R}$, que resolva (4.14).

Suponhamos então que $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$ admita uma extensão $G \in C^1(\mathbb{R})$ de modo que a solução de D'Alembert por ela produzida, ou seja, a função

$$U(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)ds, \ (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

seja solução do PVI

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U(0,t) = U(l,t) = 0, \text{ para } t \in \mathbb{R} \\ U(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ U_t(x,0) = G(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Com isso, por um lado, para todo $t \in \mathbb{R}$, teremos

$$0 = U(0,t) = \frac{1}{2c}\int_{0-ct}^{0+ct} G(s)ds \Longleftrightarrow 0 = \int_{-ct}^{0} G(s)ds + \int_{0}^{ct} G(s)ds$$

que é o mesmo que dizer que, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\int_0^{ct} G(s)ds = -\int_{-ct}^{0} G(s)ds = \int_0^{-ct} G(s)ds. \tag{4.15}$$

Da bijetividade da função $\mathbb{R} \ni t \mapsto ct \in \mathbb{R}$ e escrevendo

$$\mathbb{G}(y) := \int_0^y G(s)ds, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4.16}$$

a igualdade (4.15) quer dizer que para todo $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{G}(-y) = \mathbb{G}(y),$$

o que significa dizer que a primitiva $\mathbb{G}$ de G deve ser uma **função par**, acarretando que G deve ser ímpar [7].

Por outro, ainda para $t \in \mathbb{R}$ qualquer, vale

$$0 = U(l,t) = \frac{1}{2c}\int_{l-ct}^{l+ct} G(s)ds \Longleftrightarrow 0 = \int_{l-ct}^{0} G(s)ds + \int_{0}^{l+ct} G(s)ds,$$

o que se escreve, naturalmente, como

$$\int_{0}^{l+ct} G(s)ds = -\int_{l-ct}^{0} G(s)ds = \int_{0}^{l-ct} G(s)ds. \tag{4.17}$$

Daí, usando a mesma notação de antes, concluímos que

$$\mathbb{G}(l+ct) = \mathbb{G}(l-ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

o que, novamente pela bijetividade de $\mathbb{R} \ni t \mapsto ct \in \mathbb{R}$, nos dá

$$\mathbb{G}(l+y) = \mathbb{G}(l-y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente, usando $y+l$ no lugar de y na igualdade acima, teremos

$$\mathbb{G}(2l+y) = \mathbb{G}\big(l+(l+y)\big) = \mathbb{G}\big(l-(l+y)\big) = \mathbb{G}(-y) = \mathbb{G}(y),$$

porque já sabemos que $\mathbb{G}$ é uma função par.

Deduzimos pois que, então, $\mathbb{G}$ deve também ser $2l$-periódica. Como a derivada de função periódica é também periódica, com mesmo período, resulta que a extensão G deve ser também $2l$-periódica. Em particular, devemos ter que

$$G(0) = 0.$$

Note que, além disso, devido ao fato de G ser ímpar e $2l$-periódica, deve-se ter

$$G(l) = -G(-l) = -G(-l+2l) = -G(l) \Longrightarrow G(l) = 0.$$

[7] Lembre-se que, pela Regra da Cadeia, a derivada de uma função par é uma função ímpar e vice-versa.

Desse modo, como $G\mid_{[0,l]}= g$, concluímos também que $g(0) = g(l) = 0$, o que ao final, diz que acabamos demonstrando a

Proposição 4.7. *Dada $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$ com $g(0) = g(l) = 0$, se $G \in C^1(\mathbb{R})$ com $G\mid_{[0,l]}= g$ é tal que a solução de D'Alembert que ela determina, $U(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)ds,\ (t,x) \in \mathbb{R}^2$, cumpre a condição*

$$U(0,t) = U(l,t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

então G é uma função ímpar de $2l$-periódica.

A partir do que discutimos até aqui neste parágrafo, já conseguimos prever que precisaremos de uma recíproca para a proposição acima. E, a fim de obter esta recíproca, precisaremos passar por uma versão do Lema 4.4 para a função g, o que, efetivamente acontece, como a seguir enunciamos.

Lema 4.8. *Toda função $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$ com*

$$g(0) = g(l) = 0,$$

possui uma extensão $G \in C^1(\mathbb{R})$, ímpar e $2l$-periódica, que deve, portanto, ser única.

Demonstração. Com efeito, como antes, decompondo a reta em intervalos cujas extremidades são múltiplos ímpares de l:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big[(2k-1)l, (2k+1)l\big),$$

podemos definir $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$G(x) = \begin{cases} g(x-2kl), & se\ \ 2kl \le x \le (2k+1)l, \\ -g(2kl-x), & se\ \ (2k-1)l \le x \le 2kl. \end{cases} \tag{4.18}$$

A partir disso, todos os passos $(1^a) - (6^a)$, realizados na demonstração do Lema 4.4, podem ser aplicados para G.

Notando que o passo (7^a) não precisará ser executado, uma vez que queremos apenas $G \in C^1(\mathbb{R})$, este lema fica demonstrado.

□

De posse deste, é natural demonstrar o

Teorema 4.9 (Corda finita no caso $f \equiv 0$). *Fixado $c > 0$, se $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$ é uma função tal que*

$$g(0) = g(l) = 0,$$

então existe uma função $u \in C\big([0,l] \times \mathbb{R}\big) \cap C^2\big((0,l) \times \mathbb{R}\big)$ que resolve o PVI (4.14).

Demonstração. Realmente, tomando $G \in C^1(\mathbb{R})$ a extensão ímpar e $2l$-periódica de g, fornecida pela Lema 4.8, consideramos $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a solução de D'Alembert do PVI

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ U(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ U_t(x,0) = G(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

isto é, a função dada por

$$U(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s)ds, \ (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Como antes, restringindo-a à faixa $[0,l] \times \mathbb{R}$, obtemos a nossa candidata a solução do problema.

Com efeito, seja

$$u := U\,|_{[0,l]\times\mathbb{R}}$$

e verifiquemos que u obedece a todas as exigências enunciadas no teorema.

Primeiramente, é claro $u \in C\big([0,l] \times \mathbb{R}\big) \cap C^2\big((0,l) \times \mathbb{R}\big)$, pois u é a restrição de uma função C^2 do plano $\mathbb{R}^2$ inteiro a faixa $[0,l] \times \mathbb{R}$.

É também evidente que $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ em $(0,l) \times \mathbb{R}$, porque para $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}$ tem-se

$$u_{tt}(x,t) = U_{tt}(x,t) = c^2 U_{xx}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

Além disso, para $x \in [0,l]$, temos

$$u(x,0) = U(x,0) = 0$$

e

$$u_t(x,0) = U_t(x,0) = G(x) = g(x),$$

comprovando às condições iniciais de (4.14).

Para constatar a condição de fronteira de Dirichlet, como antes, para $t \in \mathbb{R}$ calculemos

$$u(0,t) = U(0,t) = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} G(s)ds = -\frac{1}{2c}\int_0^{-ct} G(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{ct} G(s)ds = {}^{8}$$

$$-\frac{1}{2c}\mathbb{G}(-ct) + \frac{1}{2c}\mathbb{G}(ct) \overbrace{=}^{\mathbb{G}\ par} 0$$

e

$$u(l,t) = U(l,t) = \frac{1}{2c}\int_{l-ct}^{l+ct} G(s)ds = -\frac{1}{2c}\int_0^{l-ct} G(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{l+ct} G(s)ds =$$

$$-\frac{1}{2c}\mathbb{G}(l-ct) + \frac{1}{2c}\mathbb{G}(l+ct) \overbrace{=}^{\mathbb{G}\ 2l-periodica} -\frac{1}{2c}\mathbb{G}(-l-ct) + \frac{1}{2c}\mathbb{G}(l+ct) \overbrace{=}^{\mathbb{G}\ par} 0,$$

e o teorema está demonstrado. □

Depois de tudo o que fizemos nesta seção, nada mais nos impede de demonstrar a existência de solução para o problema da corda finita em sua formumlação mais geral.

Teorema 4.10 (Corda finita no caso geral). *Fixado $c > 0$, se $f \in C^2([0,l];\mathbb{R})$ e $g \in C^1([0,l];\mathbb{R})$ são funções tais que*

(i) $f(0) = f(l) = 0$;

(ii) $f''(0) = f''(l) = 0$; *e*

(iii) $g(0) = g(l) = 0$,

então existe uma função $u \in C\big([0,l] \times \mathbb{R}\big) \cap C^2\big((0,l) \times \mathbb{R}\big)$ que resolve o PVI (4.7):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in (0,l), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \text{para } t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), \ \ x \in [0,l], \\ u_t(x,0) = g(x), \ \ x \in [0,l]. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam v e w, funções em $C\big([0,l]\times\mathbb{R}\big)\cap C^2\big((0,l)\times\mathbb{R}\big)$ que resolvem, respectivamente os problemas da corda finita (4.8) e (4.14) e cuja existência é garantida pelos Teoremas 4.6 e 4.9. Afirmamos que

$$u := v + w$$

[8] Usando a notação introduzida em (4.16).

resolve o PVI (4.7).

Com efeito:

- Primeiramente, $u = v + w \in C\big([0,l] \times \mathbb{R}\big) \cap C^2\big((0,l) \times \mathbb{R}\big)$, pois o conjunto da direita é uma interseção de espaços vetoriais.

- Quando $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}$, da linearidade das derivadas parciais tem-se

  $$u_{tt}(x,t) = v_{tt}(x,t) + w_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t) + c^2 w_{xx}(x,t) = c^2\big(v_{xx}(x,t) + w_{xx}(x,t)\big) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

  provando que u satisfaz a Equação da Onda em $(0,l) \times \mathbb{R}$.

- Também, para $x \in [0,l]$, vale

  $$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x),$$

  constatando as condições iniciais.

- Para as de fronteira, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$ temos

  $$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0 \quad \text{e} \quad u(l,t) = v(l,t) + w(l,t) = 0 + 0 = 0,$$

terminando a demosntração deste teorema e dos assuntos deste capítulo. □

4 Exercícios

Questões opcionais de "Topologia":

(1) Verifique os passos da demonstração de que $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é um **Espaço de Fréchet** com a família enumerável de seminormas [9], $p_j : C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$p_j(\varphi) = \sup_{|x| \le j} |\varphi(x)|, \ j \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}).$$

Mais precisamente, verifique que:

[9] Uma seminorma num espaço vetorial, real ou complexo, X, é uma função $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in X$ e λ escalar, tem-se $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ e $p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

(a) Cada p_j é seminorma, mas nenhuma delas é norma em $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

(b) Mostre que a família $\mathcal{E} := \big\{B_j(x;\varepsilon) : j \in \mathbb{N},\, x \in X,\, \varepsilon > 0\big\}$ é uma *sub-base* para uma topologia em X, em que $B_j(x;\varepsilon) = \{y \in X : p_j(y-x) < \varepsilon\}$ é a "bola aberta" de centro x e raio ε segundo a seminorma p_j. [10]

(c) Conclua que $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é um *espaço vetorial topológico localmente convexo* (E.V.T.L.C.) munido da topologia que provém da sub-base $\mathcal{E}$ acima, ou seja, cada $B_j(x;\varepsilon)$ é um conjunto convexo.

(d) A família $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é *separante*, ou seja, se $x \neq 0$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p_j(x) \neq 0$. Mostre que, como consequência disso, $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é um espaço de Hausdorff.

(e) Uma sequência $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é de Cauchy segundo a métrica

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(\varphi-\psi)}{1+p_j(\varphi-\psi)}$$

se, e somente se, ela é de Cauchy segundo cada seminorma p_j, ou seja, quando para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\lim_{m,k\to\infty} p_j(\varphi_m - \varphi_k) = 0.$$

(f) $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ é completo segundo a métrica d do item anterior.

Sugestão: Lembre-se que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Para a próxima questão usaremos a seguinte

Notação: Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, chamado um multi-índice, e $\varphi \in C^m(\Omega)$, pomos

- $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ e
- $\partial^\alpha\varphi := \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}\varphi$, em que $\partial_j^{\alpha_j}$ significa derivar uma função α_j-vezes relativamente à sua j-ésima variável.

[10] Note que, se a família de seminormas é constituída por uma única norma $p_j(x) = \|x\|$ para todo $x \in X$ e $j \in \mathbb{N}$, a topologia obtida por este processo coincide com a topologia usual de um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$.

(2) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma qualquer sequência crescente de compactos cuja reunião é Ω, $m \in \mathbb{N}$ e $C^m(\Omega)$ o conjunto das funções m-vezes continuamente diferenciáveis em Ω, $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, munido da seguinte família de seminormas, $p_j : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por:

$$p_j(\varphi) := \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in K_j} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,\ j \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi \in C^m(\Omega).$$

Prove que:

(a) Cada p_j é seminorma, mas nenhuma delas é norma em $C^m(\Omega)$.

(b) Conclua que $C^m(\Omega)$ é um E.V.T.L.C.

(c) $C^m(\Omega)$ é um espaço de Hausdorff com a topologia dada pela família $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(d) Explique qual é o tipo de convergência descrita pela família de seminormas $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(e) Deduza que $C^m(\Omega)$ é um espaço de Fréchet com a topologia dada por esta família de seminormas.

De volta as EDP's:

(3) Seja $c > 0$ e considere a equação da onda em $\mathbb{R}^2$, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Vimos que, para cada par de funções $(f, g) \in C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R})$, o PVI

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx},\ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

possui uma **única** solução $u = u(t, x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Nessas condições, mostre que se $(f_n)_n$ é uma sequência em $C^2(\mathbb{R})$ que converge para f na topologia de $C^2(\mathbb{R})$ e $(g_n)_n$ é uma sequência em $C^1(\mathbb{R})$ que converge para g na topologia de $C^1(\mathbb{R})$, ambas dadas no exercício anterior, então as soluções de D'Alembert u_n correspondentes aos pares (f_n, g_n), convergem, na topologia de $C^2(\mathbb{R}^2)$, à solução u associada ao dado inicial (f, g).

(4) Sejam $l > 0$ e $f \in C([0, l])$. Mostre que f possui uma única extensão $F \in C(\mathbb{R})$ **par** e $2l$-periódica.

(5) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como uma soma de uma função par com uma função ímpar.

Veifique ainda que, se $f \in C^m(\mathbb{R})$, então essa decomposição pode ser escolhida com a mesma regularidade de f.

(6) Determine a solução do PVI a seguir:

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx},\ t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(7) Determine uma solução para o PVI a seguir:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ t \in \mathbb{R},\ 0 < x < 3 \\ u(t,0) = u(t,3) = 0,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right),\ 0 \le x \le 3 \\ u_t(0,x) = x\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right),\ 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Capítulo 5

Separação de Variáveis - Método de Fourier

Tudo o que for realizado neste capítulo terá como principal objetivo evidenciar a necessidade em se estudar as Séries de Fourier. Este estudo, juntamente com o da Transformada de Fourier, constituem o que se conhece como **Análise de Fourier** ou **Análise Harmônica**, a qual constitui uma das principais ferramentas no estudo das equações diferenciais parciais.

1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um método que se mostra bastante útil no problema da resolubilidade para EDP's com coeficientes constantes em duas variáveis independentes (x, t), chamado Método de Separação de Variáveis. Ele consiste em, dada a equação num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supor que ela possui uma solução $u = u(x, t)$ que possa ser escrita como um "produto tensorial" de duas funções, cada uma delas dependendo de apenas de uma variável, ou seja, uma solução u que se exprime como

$$u(x, t) = T(t)\phi(x), \quad (x, t) \in \Omega.$$

Em seguida, deduzir condições necessárias sobre $t \mapsto T(t)$ e $x \mapsto \phi(x)$ e, por fim, tentar provar que estas condições necessárias são suficientes para a existência de soluções.

Este método, tradicionalmente, é apresentado por meio da equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, para (x, t) numa faixa vertical plana $\Omega = (0, l) \times (0, \infty)$, que fui sistematicamente estudada pelo matemático francês Joseph B. Fourier (1768-1830), estudo este que o conduziu ao descobrimento de um tipo muito especial de séries de funções, conhecidas hoje com o nome de Séries de Fourier.

2 A Equação do Calor e o Objetivo do Método

Sejam $l > 0$ e $\alpha > 0$ constantes fixadas, $f : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e consideremos o PVC [1]

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \ \ 0 < x < l \text{ e } t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{5.1}$$

Observação 5.1. *É interessante perceber que, ao procurar uma solução para o problema acima, a fim de que todas as exigências por ele impostas reflitam algum sentido "natural" em uma "solução" u, essa u precisa, ao menos, ser contínua na faixa fechada $[0, l] \times [0, \infty)$, pois, de outro modo, uma anomalia como a função $u^* : [0, l] \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ a baixo, poderia ser considerada como solução.*

$$u^*(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < l \text{ e } t > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0 \ \text{ e } \ t \geq 0, \\ 0, & \text{se } x = l \ \text{ e } \ t \geq 0, \\ f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq l \ \text{ e } t = 0. \end{cases}$$

Embora cumpra todas as exigências impostas pelo problema, os valores assumidos por u^* não os relacionam entre si, tornando-a uma "solução" artificial para este PVC, diminuindo, deste modo, o seu interesse nas previsões que este modelo procura obter sobre os fenômenos de condução do calor que o originaram.

Dito isso, convencionamos que o ambiente natural para procurar soluções para (5.1) *é o conjunto*

$$C\big([0, l] \times [0, \infty); \mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0, l) \times (0, \infty); \mathbb{C}\big),$$

que incorpora a ideia de solução clássica, exigindo $u \in C^2\big((0, l) \times (0, \infty); \mathbb{C}\big)$, com a naturalidade das condições de fronteira, pedindo $u \in C\big([0, l] \times [0, \infty); \mathbb{C}\big)$. [2]

Observação 5.2. *Suponhamos que $u \in C\big([0, l] \times [0, \infty); \mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0, l) \times (0, \infty); \mathbb{C}\big)$ seja uma solução de* (5.1)*, então, fazendo $x = 0$ e $x = l$ na condição inicial, e $t = 0$, na de fronteira, conclui-se que*

$$0 = u(0,0) = f(0) \quad \text{e} \quad 0 = u(l,0) = f(l),$$

[1] Embora este problema seja um problema de contorno, é comum chamar a condição "$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \ t \geq 0$," de condição de contorno e "$u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq l$," de condição inicial, enquadrando-o assim como um Problema Misto, ou seja, um que envolve condições iniciais e de fronteira.

[2] De agora em diante, iremos considerar soluções a valores complexos, pois, para elas, a teoria se desenvolve de maneira mais agradável, entretanto, na maiorias das vezes, omitiremos o símbolo "$\mathbb{C}$" na representação destes espaços de funções, deixando subentendido que elas podem assumir valores imaginários.

dizendo que, também aqui, f deve cumprir as condições de compatibilidade

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Antes de apresentar o método, gostaríamos de fazer algumas considerações a respeito das duas primeiras condições de (5.1) para, em seguida, encontrar outras condições necessárias sobre f.

Com efeito, o problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l \text{ e } t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

tem estrutura linear, ou seja, a função identicamente nula as resolve e essas são "fechadas para soma e multiplicação por escalar". Mais precisamente, se $u_1, u_2, \cdots, u_n \in C\big([0,l] \times [0,\infty); \mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l) \times (0,\infty); \mathbb{C}\big)$ são n soluções de (5.2) e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ são n escalares complexos, então a combinação linear $u = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j$ também o é:

$$u_t(x,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u_j}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,t)\right] = \alpha^2 \left[\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,t)\right] = \alpha^2 u_{xx}(x,t),$$

para todo $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$ e, quando $t \geq 0$

$$u(0,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j(0,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot 0 = 0 \text{ e } u(l,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j u_j(l,t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot 0 = 0.$$

Queremos agora dar um passo à frente e poder afirmar que: Se $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência** de funções em $C\big([0,l] \times [0,\infty); \mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l) \times (0,\infty); \mathbb{C}\big)$ de modo que cada uma delas resolve (5.2) e $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma **sequência** de escalares complexos, então a soma série

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j,$$

caso defina uma função $u : [0,l] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, esta seja também uma solução de (5.2).

Suponhamos que isso seja verdadeiro, então, impondo a condição inicial f a esta u, ou seja, impondo que essa u resolva todo o PVC (5.1), para todo $x \in [0,l]$ deveremos ter

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u_j(x,0), \tag{5.3}$$

dizendo assim que f deve também escrever-se como soma de uma série de funções.

Como queremos estudar o PVC (5.1) para toda função $f \in C([0,l])$ com $f(0) = f(l) = 0$, escrevendo

$$H := \{f \in C([0,l]) : f(0) = f(l) = 0\}, \tag{5.4}$$

que naturalmente tem estrutura de espaço vetorial, o problema da decomposição (5.3), pode ser assim reformulado:

"É possível encontrar uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de soluções de (5.2) de modo que, pondo, $\phi_j(x) := u_j(x,0)$, $0 \le x \le l$, para cada $f \in H$ existe uma sequência de escalares $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que, em algum sentido, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j\phi_j(x), \quad x \in [0,l] \text{ ?''}$$

Problema este que, grosso modo, tem a ver com o problema de determinar uma "base" especial para o espaço vetorial H, base esta constituída por uma quantidade infinito enumerável de vetores.

Todas estas considerações são necessárias para poder dizer que o método de separação de variáveis nos conduzirá à determinação desta base especial, ou seja, à determinação de uma sequência $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, de soluções de (5.2), de modo que as ϕ_j's correspondentes "gerem" H.

3 A Equação do Calor e a Apresentação do Método

Suponhamos que $u \in C\big([0,l]\times[0,\infty);\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l)\times(0,\infty);\mathbb{C}\big)$ seja uma solução **não identicamente nula** de (5.2) que, para todo $(x,t) \in [0,l]\times[0,\infty)$, pode ser escrita como

$$u(x,t) = T(t)\phi(x).$$ [3]

Dessa forma, é possível demonstrar que seus fatores T e ϕ devem satisfazer

(a) $T \in C\big([0,\infty);\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,\infty);\mathbb{C}\big)$ e

(b) $\phi \in C\big([0,l];\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l);\mathbb{C}\big)$.

Como u satisfaz as condições de fronteira, para todo $t \ge 0$, vale

$$0 = u(0,t) = T(t)\phi(0) \quad \text{e} \quad 0 = u(l,t) = T(t)\phi(l).$$

[3] Diz-se que u é o produto tensorial de T e ϕ e escreve-se $u(x,t) = (T\otimes\phi)(t,x)$. É este ponto que expõe a "separação das variáveis".

Assim, precisaremos ter $\phi(0) = \phi(l) = 0$, porque, caso $\phi(0) \neq 0$ ou $\phi(l) \neq 0$, isso obrigaria que fosse $T(t) = 0$ para todo $t \geq 0$, dizendo que u deve ser a solução trivial de (5.1), contrariando sua escolha. Em particular, por (b), segue que $\phi \in H$, sendo H o espaço definido em (5.4) na seção anterior.

Agora, como u satisfaz a equação do calor em $(0,l) \times (0,\infty)$, para todo $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$ podemos escrever

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) \iff \frac{\partial\big(T(t)\phi(x)\big)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2\big(T(t)\phi(x)\big)}{\partial x^2} \iff$$

$$\phi(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \alpha^2 T(t)\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \iff \phi(x)\frac{dT(t)}{dt} = \alpha^2 T(t)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \iff \phi(x)T'(t) = \alpha^2 T(t)\phi''(x).$$

Em outras palavras, dizer que u satisfaz a equação do calor em $(0,l) \times (0,\infty)$ é o mesmo que dizer que seus fatores T e ϕ satisfazem, para todo $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$ a igualdade

$$\phi(x)T'(t) = \alpha^2 T(t)\phi''(x).$$

Suponhamos agora que T nunca se anula em $(0,\infty)$ e que ϕ nunca se anula em $(0,l)$, o que nos permite escrever a igualdade acima, para $(x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$, do seguinte modo

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}. \tag{5.5}$$

Essa igualdade assegura a existência de um número $\lambda \in \mathbb{C}$, chamado **constante de separação**, de maneira que [4]

(1) $\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$, para todo $t > 0$ e

(2) $\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \lambda$, para todo $0 < x < l$.

Conclusão: Se $u \in C\big([0,l] \times [0,\infty);\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l) \times (0,\infty);\mathbb{C}\big)$ é uma solução não identicamente nula de (5.2) que pode ser escrita como

$$u(x,t) = T(t)\phi(x), \text{ para todo } (x,t) \in [0,l] \times [0,\infty),$$

então seus fatores devem satisfazer os problemas de EDO's

[4] Para ver isso, basta, por exemplo, fixar $t = 1$ à esquerda em (5.6), o que nos dará $\lambda := \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(1)}{T(1)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$, para todo $0 < x < l$. Do mesmo modo, fixando, por exemplo, $x = l/2$ à direta em (5.6), encontramos $\frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\phi''(l/2)}{\phi(l/2)} = \lambda$, para todo $t > 0$, como queríamos.

$$\begin{cases} T \in C\big([0,\infty);\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,\infty);\mathbb{C}\big), \\ T'(t) = \alpha^2\lambda T(t),\ t > 0. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \phi \in C\big([0,l];\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l);\mathbb{C}\big), \\ \phi''(x) = \lambda\phi(x),\ 0 < x < l, \\ \phi(0) = \phi(l) = 0. \end{cases}$$

Após essas conclusões a respeito de condições necessárias sobre os fatores T e ϕ, que exprimem uma suposta solução de (5.2), já é natural prever que as discussões que se seguem terão como objetivo fornecer mecanismos que as tornem também suficientes.

4 Problema de auto-valor para $\frac{d^2}{dx^2}$

Sejam $l > 0$ e $\alpha > 0$ números fixados. Para cada complexo $\lambda \in \mathbb{C}$, consideremos os dois problemas sugeridos no final da seção anterior

$$\begin{cases} T \in C\big([0,\infty);\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,\infty);\mathbb{C}\big), \\ T'(t) = \alpha^2\lambda T(t),\ t > 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

e

$$\begin{cases} \phi \in C\big([0,l];\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l);\mathbb{C}\big), \\ \phi''(x) = \lambda\phi(x),\ 0 < x < l, \\ \phi(0) = \phi(l) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Nosso objetivo agora é desenvolver critérios que assegurem existência de soluções T para (5.6) e ϕ para (5.7), na esperança de que, definindo $u(x,t) := T(t)\phi(x)$, u seja uma solução de (5.2).

Note que, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{C}$, o problema (5.6) possui uma família de soluções óbvias, a saber, as funções

$$T(t) = ce^{\alpha^2\lambda t},\ \ t \geq 0,$$

para cada $c \in \mathbb{C}$.

Desse modo, o único problema que realmente precisamos resolver é o (5.7). Como ele, evidentemente, possui $\phi \equiv 0$ como solução e esta conduziria à soluçao trivial de (5.2), precisamos, na verdade, determinar os valores $\lambda \in \mathbb{C}$ que podem produzir soluções não nulas ϕ para (5.7). Esses λ's, cuja existência ainda é um problema, serão, de agora em diante, chamados **valores admissíveis**.

Observação 5.3. *Note que, as soluções de* (5.6) *e* (5.7) *(se existirem) são, na verdade,* C^∞*, conduzindo, assim, à soluções* C^∞ *de* (5.2)*. Este é um fato que surpreende, porque diz que a própria estrutura do problema aumenta a regularidade de suas soluções.*

A fim de determinar para quais $\lambda \in \mathbb{C}$ existe $\phi \in C\big([0,l];\mathbb{C}\big) \cap C^2\big((0,l);\mathbb{C}\big)$, $\phi \not\equiv 0$, com $\phi(0) = \phi(l) = 0$ e

$$\phi'' = \lambda\phi, \text{ em } (0,l),$$

suponhamos a existência de um $\lambda \in \mathbb{C}$ para o qual exista uma tal ϕ. Então, multiplicando a EDO por $\overline{\phi}$ (a função conjugada de ϕ), ela fica

$$\phi''(x) \cdot \overline{\phi(x)} = \lambda\phi(x) \cdot \overline{\phi(x)}, \quad x \in (0,l).$$

Integrando essa última igualdade em x, de 0 até l, do lado direito, obtemos

$$\lambda \int_0^l \phi(x) \cdot \overline{\phi(x)}dx = \lambda \int_0^l |\phi(x)|^2.$$

Do esquerdo, integrando por partes, temos

$$\int_0^l \phi''(x) \cdot \overline{\phi(x)}dx = \big(\phi' \cdot \overline{\phi}\big)\big|_0^l - \int_0^l \phi'(x) \cdot \overline{\phi'(x)}dx = -\int_0^l |\phi'(x)|^2,$$

onde usamos a hipótese de que $\phi(0) = \phi(l) = 0$.

Unindo estas duas conclusões encontramos

$$\underbrace{-\underbrace{\int_0^l |\phi'(x)|^2 dx}_{\geq 0}}_{\leq 0} = \lambda \underbrace{\int_0^l |\phi(x)|^2 dx}_{>0}$$

e como $\phi \not\equiv 0$, devemos ter $\lambda \leq 0$.

Se considerarmos $\lambda = 0$, a EDO fica $\phi'' = 0$ cujas soluções são as funções afim $\phi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, mas as condições $\phi(0) = \phi(l) = 0$ obrigam a ser $\phi \equiv 0$, o que não queremos. Donde, podemos supor, para o que se segue, que os valores admissíeveis para λ satisfazem $\lambda < 0$.

Por outro lado, consideremos agora, como estudado nas EDO's, para cada $\lambda < 0$ o polinômio característico da equação $\phi'' = \lambda\phi$, ou seja, o polinômio $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por [5]

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

[5]Que provém da tentativa de se encontrar uma solução da forma $\phi(x) = e^{\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, para a EDO $\phi'' = \lambda\phi$. Daí, cada raiz μ deste polinônio produz uma solução exponencial da EDO.

Sabemos que $\phi(x) = e^{\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, resolve $\phi'' = \lambda\phi$ se, e somente se, $p(\mu) = 0$, ou seja, se, e somente se, $\mu^2 = \lambda$. Sendo $\lambda < 0$, p possui duas raízes μ_1 e μ_2 de modo que $\mu_2 = \overline{\mu_1}$.

Dito isso, concluímos que para cada $\lambda < 0$, as funções $\phi_1(x) = e^{\mu_1 x}$ e $\phi_2(x) = e^{\mu_2 x}$ são duas soluções L.I. de $\phi'' = \lambda\phi$ e, consequentemente, geram o espaço vetorial X de todas as suas soluções.

Note que, se $\mu_1 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, então devemos ter $a = 0$, donde podemos supor que $b = |\lambda|^{1/2}$, logo

$$\mu_1 = ib \quad \text{e} \quad \mu_2 = -ib$$

e as soluções L.I. acima podem escrever-se como

$$\phi_1(x) = e^{ibx} \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = e^{-ibx}.$$

Nestas condições, para toda ϕ solução de $\phi'' = \lambda\phi$ existem contantes $A, B \in \mathbb{C}$ de modo que [6]

$$\phi(x) = Ae^{ibx} + Be^{-ibx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como queremos que ϕ resolva (5.7), devemos ter $\phi(0) = \phi(l) = 0$, o que, primeiramente, nos dá

$$0 = \phi(0) = Ae^{ib\cdot 0} + Be^{-ib\cdot 0} = A + B \Longrightarrow B = -A.$$

Com isso,

$$\phi(x) = Ae^{ibx} - Ae^{-ibx} = A\big(e^{ibx} - e^{-ibx}\big) = 2Ai\sin(bx),$$

de onde, impondo $\phi(l) = 0$, obteremos

$$0 = \phi(l) = 2Ai\sin(bl) \Longrightarrow bl = n\pi, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z},$$

porque não queremos $A = 0$. Conclusão esta que nos dá

$$b = |\lambda|^{1/2} = \frac{n\pi}{l}, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z},$$

nos dizendo quais devem ser os valores admissíveis de λ, a saber,

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N},$$

[6] Aqui é importante nos lembrarmos da Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

os quais produzem as soluções ϕ, de (5.7), da forma

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Todo o estudo realizado acima pode ser resumido no seguinte resultado.

Teorema 5.4. *Se* $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} : H \cap C^2(0,l) \subset C([0,l]) \longrightarrow C([0,l])$*, então o conjunto dos seus* **auto-valores** *é o conjunto infinito enumerável*

$$\sigma(\Delta) = \left\{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

chamado seu **espectro***, e o conjunto de suas* **auto-funções** *correspondentes é*

$$\left\{\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) : n \in \mathbb{N}\right\},$$

de maneira que $u : [0,l] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$*, dada por* $u(x,t) = T(t)\phi(x)$*, resolve* (5.2) *se, e somente se, existem* $n \in \mathbb{N}$ *e* $c \in \mathbb{C}$ *tal que para todo* $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$ *vale*

$$u(x,t) = ce^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Observação 5.5. *O teorema acima diz que a cada natural* $n \in \mathbb{N}$ *está associado a solução* (5.2)*,* $u_n : [0,l] \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$*, dada por*

$$u_n(x,t) = e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

de modo que, para todo $x \in [0,l]$*,*

$$u_n(x,0) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Nessas condições, pensando no problema apontado no final da Seção 2, podemos agora reformulá-lo do seguinte modo:

"Para cada $f \in H$ *existe uma sequência de escalares* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que, em algum sentido, podemos escrever*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0,l] \text{ ?"} \tag{5.8}$$

O exercício que enunciaremos a seguir completará o formulação deste problema.

Exercício 5.6. *Dados $l > 0$ e $\alpha > 0$ constantes fixadas e $f : [0, l] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1, com $f'(0) = f'(l) = 0$, consideremos o problema*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < l \text{ e } t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \tag{5.9}$$

Procurando uma solução do tipo $u(x,t) = T(t)\phi(x)$ (ou seja, por meio do método de separação de variáveis), conclua que deve existir um inteiro $n \geq 0$ de modo que u se escreve como

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} t} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Pensando agora na questão de se passar de uma combinação linear de soluções para as duas primeiras condições

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < l \text{ e } t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

para uma série de soluções, impondo a esta série que ela também deva satisfazer a condição inicial, conclua também que isso conduz ao problema de se obter uma sequência de escalares $(a_n)_{n\geq 0}$ em $\mathbb{C}$ de modo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l]. \tag{5.10}$$

Capítulo 6

Séries de Fourier

1 Introdução

Os argumentos empregados na dedução do problema sobre a igualdade (5.8) foram aplicados a uma função f, definida apenas em um intervalo $[0, l]$, entretanto, essa igualdade pode ser considerada para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admitir a representadação dada em (5.8), então f deve ser uma **função ímpar e $2l$-periódica** [1].

Analogamente, a igualdade apresentada em (5.10) pode ser considerada para todo $x \in \mathbb{R}$, ainda que a f que a tenha originado estivesse definida apenas em $[0, l]$. Do mesmo modo, se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admitir a representadação dada em (5.10), então f deve ser uma **função par e $2l$-periódica**.

Como toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser escrita como uma soma $f = g + h$, de uma função ímpar g com uma par h, e a soma de funções $2l$-periódicas é também periódica, a questão mais geral que surge então é:

"Dada $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, uma função $2l$-periódica, existem sequências de escalares complexos $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de maneira que, em algum sentido, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \text{ ?"}$$

Série esta que, por razões estéticas, reescreveremos como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right], \quad x \in [0, l], \tag{6.1}$$

[1] Em virtude do fato de as funções seno e cosseno serem 2π-periódicas.

que é a "forma real" do que definiremos a seguir como Série de Fourier.

2 Recordando funções pares e ímpares

Separamos esta breve seção para recordar alguns fatos básicos, e úteis, sobre funções pares e ímpares que usaremos sistematicamente no desenvolvimento da próxima. As demonstrações dos resultados aqui mencionados serão deixadas como exercícios aos alunos. Comecemos com propriedades algébricas.

Lema 6.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções de uma variável real a valores complexos, temos:*

(i) Se f e g são funções pares, então a soma, $f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, e o produto, $f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, são também funçẽs pares.

(ii) Se f e g são funções ímpares, então $f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função ímpar e $f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funçao par.

(iii) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f \cdot g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma funçao ímpar.

Observação 6.2. *Os exemplos canônicos de funções pares e ímpares são:*

(i) **Pares:** *Função cosseno, $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e potências pares da variável "x": x^0, x^2, x^4, $\cdots$, x^{2n}, com $n \in \mathbb{N}$.*

Mais geralmente, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$, é uma função par.

Além disso, se $n \geq 0$ é um inteiro, a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \alpha x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$, é também par. Em particular, as funções constantes são pares.

(ii) **Ímpares:** *Função seno, $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e potências ímpares da variável "x": x^1, x^3, x^5, $\cdots$, x^{2n+1}, com $n \in \mathbb{N}$.*

Analogamente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sin(\alpha x)$, $x \in \mathbb{R}$, é uma função ímpar.

Do mesmo modo, para todo inteiro $n \geq 0$, a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \alpha x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, é também ímpar.

A partir das informações apresentadas acima, segue que, todo polinômio

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^{2j}, \quad x \in \mathbb{R},$$

no qual só figuram potênicias pares da variável "x", é uma função par.

Por outro lado, os polinômios

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^{2j+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que apenas consideram potênicias ímpares da variável "x", são funções ímpares.

Observação 6.3. *Recordemos, dos cursos de Análise Real, que as funções seno e cosseno, podem, respectivamente, ser expressas como soma de séries de potências ímpares e pares:*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

É curioso destacar que, reciprocamente, com o advento das séries de Fourier, pode ser demonstrado que as potências pares x^{2n}, podem ser expressas, num certo sentido, como soma de uma série de funções, na qual só figuram funções do tipo $f_n(x) = a_n \cos(\alpha_n x)$, $n \in \mathbb{N}$, e as potências ímpares x^{2n+1}, expressam-se como soma de uma série, cujas parcelas são funções do tipo $g_n(x) = b_n \sin(\alpha_n x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Lema 6.4. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas, por meio da Mudança de Variáveis, para todo $l > 0$, temos que:*

(i) Se f é **ímpar**, *então $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.*

(ii) Se g é **par**, *então $\int_{-l}^{l} g(x)dx = 2\int_{0}^{l} g(x)dx$.*

Lema 6.5. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções deriváveis.*

(i) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função ímpar, então, pela Regra da Cadeia, sua derivada $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função par.

(ii) Analogamente, se $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função par, então sua derivada $g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função ímpar.

Lema 6.6. *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua $2l$-periódica, então para todo $y \in \mathbb{R}$ vale a igualdade*

$$\int_{y-l}^{y+l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Demonstração. Com efeito, definindo $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(y) = \int_{y-l}^{y+l} f(x)dx.$$

Agora, note que

$$\int_{0}^{y-l} f(x)dx = \int_{0}^{y-l} f(x+2l)dx \overbrace{=}^{MV:\, z=x+2l} \int_{2l}^{y+l} f(z)dz.$$

Pela periodicidade de f temos

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{y-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{y+l} f(x)dx\right) = \frac{d}{dy}\left(\int_{y+l}^{2l} f(x)dx + \int_{0}^{y+l} f(x)dx\right) =$$

$$\frac{d}{dy}\left(-\int_{2l}^{y+l} f(x)dx + \int_{0}^{y+l} f(x)dx\right) = -f(2l) + f(0) = 0,$$

demonstrando que que F é uma função constante, ou seja, $F(y) = F(0)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, como afirmamos. □

3 Coeficientes de Fourier

Para dar prosseguimento a este assunto, fixado $l > 0$, precisaremos fixar um **produto interno** conveniente no conjunto das funções contínuas e $2l$-periódicas, o qual será identificado com o conjunto

$$C_{per}([-l,l]) := \{f \in C([-l,l];\mathbb{C}) : f(l) = f(-l)\},$$

porque, naturalmente, todo o comportamento de uma função $2l$-periódica fica determinado pelo seu comportamento no intervalo fechado $[-l,l]$ (ou em qualquer outro de comprimento $2l$).

Dadas $f, g \in C_{per}([-l,l])$, por hora, escreveremos

$$(f,g) := \int_{-l}^{l} f(x)\cdot \overline{g(x)}dx.$$

Não é difícil ver que essa regra define um produto interno em $C_{per}([-l,l])$.

Observação 6.7. *Nos lembremos da Álegebra Linear que, dada uma* **base ortonormal**

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

de um espaço produto interno $E = \big(E, (\cdot,\cdot)_E\big)$ de dimensão finita n, todo vetor $u \in E$ se exprime, de modo único como combinação linear dos elementos desta base, ou seja, existem escalares $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{C}$ de modo que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j.$$

Fixado, pois, um índice $k = 1, 2, \cdots, n$, usando a igualdade acima e a ortonormalidade desta base, calculemos o produto interno de u por u_k:

$$(u,u_k)_E = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (u_j,u_k)_E = \beta_1(u_1,u_k)_E + \cdots + \beta_k(u_k,u_k)_E + \cdots + \beta_n(u_n,u_k)_E =$$

$$0 + \cdots + \beta_k \cdot 1 + \cdots + 0 = \beta_k,$$

demonstrando que, para cada $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$\beta_k = (u,u_k)_E,$$

ou seja, os coeficientes de u na base $\mathcal{B}$ são obtidos em termos de u e dos elementos dessa base.

Seguindo a "filosofia geral" deste curso, suponhamos que uma $f \in C_{per}([-l,l])$ possa ser expressa pela igualdade (6.1) e, sem se preocupar com os problemas de convergência envolvidos, tentemos obter sugestões sobre como determinar as sequências de escalares $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a partir da função f e das funções seno e cosseno presentes na construção daquela série, como indicado no modelo finito-dimensional lembrado na observação anterior considerando, agora, o produto interno $(f,g) := \int_{-l}^{l} f(x)\cdot\overline{g(x)}dx$.

Com efeito, suponhamos que se tenha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right],\quad x\in[0,l], \tag{6.2}$$

e que seja possível integrar a série termo a termo, ou seja, comutar a soma com o sinal de integral. Assim, podemos escrever

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right].$$

Destaquemos para todo $n\in\mathbb{N}$

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{n\pi}\big[\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\big] = 0. \tag{6.3}$$

e

$$\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = -\frac{l}{n\pi}\big[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\big] = -\frac{l}{n\pi}\big[\cos(n\pi) - \cos(n\pi)\big] = 0, \tag{6.4}$$

porque o cosseno é uma função par.

Com isso, vemos que

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}2l = a_0 l,$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Para os próximos argumentos, será extremamente útil nos lembrarmos das seguintes identidades trigonométricas, válidas para todos os números reais a, b:

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big] \tag{6.5}$$

e

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big] \tag{6.6}$$

Agora, fixado um natural $m\in\mathbb{N}$, multiplicando (6.2) por $\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, integrando de $-l$ a l e usando (6.5) vem

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx}_{=0,\, por\ (6.5)} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right] =$$

$$\frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left[\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx + \int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx\right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx}_{=0,\, integral\ de\ funcao\ impar}.$$

Em resumo,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx + \int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx\right]. \tag{6.7}$$

Agora, note que, novamente por (6.5), temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx = 0.$$

Por outro lado, quando $n \neq m$, ainda por (6.5), vale que

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx = 0$$

e ser for $n = m$, temos

$$\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx = \int_{-l}^{l} 1dx = 2l.$$

Essas conclusões, em (6.7), nos dão

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{a_m}{2}2l,$$

nos dizendo que, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx. \tag{6.8}$$

De maneira inteiramente análoga, fixado um natural $m \in \mathbb{N}$, multiplicando agora (6.2) por $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, integrando de $-l$ a l e usando (6.6) obteremos

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx}_{=0,\ por\ (6.4)} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right] =$$

$$\frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx}_{=0,\ integral\ de\ funcao\ impar} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}\left[\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx - \int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right)dx\right],$$

o que, após procermos como nas linhas que antecedem (6.8), nos dará

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx. \tag{6.9}$$

Os argumentos acima realizados, nos dizem, ao final, que dada uma função $f \in C_{per}([-l,l])$, como para todo $n \in \mathbb{N}$ os produtos $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ e $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ definem funções contínuas, independentemente de qualquer convergência de qualquer série, é sempre possível considerar os números [2]:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

e, com eles, construir a série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]. \tag{6.10}$$

[2] Toda função contínua num intervalo limitado e fechado é Riemann integrável.

A fim de estudar critérios de convergência para esta série e responder se ela, eventualmente, representa a função f em algum sentido, usaremos números complexos para reescrevê-la de uma maneira mais compacta seguindo o seguinte roteiro:

(1^o) Pela Fórmula de Euler, para todo real $\theta \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(2^o) Fixandos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, usando as expressões acima no termo geral da série (6.10), podemos escrever

$$a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = a_n \frac{e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} + e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}}{2} + b_n \frac{e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} - e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}}{2i} =$$

$$\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} = \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}.$$

(3^o) Pondo então , para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$c_0 := \frac{a_0}{2}, \quad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{e} \quad c_{-n} := \frac{a_n + ib_n}{2},$$

a série (6.10) pode reescrever-se como [3]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}. \tag{6.11}$$

(4^o) É comum escrever $E := \{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$, em que $E_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função dada por

$$E_n(x) := e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}.$$

Com essa notação (6.12) fica

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n E_n.$$

[3] Note que, quando $n \in \mathbb{Z}$ é negativa, então $-n \in \mathbb{N}$ de modo que $c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$ e $e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} = e^{-i\left(\frac{(-n)\pi x}{l}\right)}$.

Observação 6.8. *Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, valem as igualdades*

$$\int_{-l}^{l} E_n(x)\overline{E_m(x)}dx = \begin{cases} \int_{-l}^{l} e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx = \int_{-l}^{l} 1dx = 2l, & \text{se } m = n. \\ \\ \int_{-l}^{l} e^{i\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)}dx = \frac{l}{i\pi(n-m)}\, e^{i\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)}\Big|_{-l}^{l} = 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases}$$

Isso quer dizer que o conjunto E é **ortonormal** *em $C_{per}([-l, l])$ segundo o produto interno* [4]

$$(\cdot, \cdot)_{L^2} : C_{per}([-l, l]) \times C_{per}([-l, l]) \longrightarrow \mathbb{C},$$

dado por

$$(f, g)_{L^2} := \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Observação 6.9. *Com as novas notações, podemos exibir a sequência de coeficientes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em termos do produto interno $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ e dos elementos de E:*

Com efeito, dado $n \in \mathbb{Z}$, se $n = 0$ temos

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot 1dx = (f, E_0)_{L^2}.$$

Se $n \geq 1$, então

$$c_n := \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx - i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right] =$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\overline{E_n(x)}dx = (f, E_n)_{L^2}.$$

Finalmente, se $n \leq 1$, então, usando que o cosseno é par e o seno é ímpar, vem

$$c_n := \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{(-n)\pi x}{l}\right)dx + i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{(-n)\pi x}{l}\right)dx\right] =$$

[4]Particularmente estudados são os casos em que $l = 1$ e $l = \pi$. Nessas circunstâncias, o produto interno assume, respectivamente, as seguintes expressões, esteticamente bastante agradáveis:

$$(f, g)_{L^2} := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx \quad \text{e} \quad (f, g)_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\overline{E_n(x)}dx = (f, E_n)_{L^2}.$$

O que, em resumo, diz que para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$ vale que

$$c_n = (f, E_n)_{L^2}.$$

Todas as considerações acima realizadas nos permitem definir os coeficientes de Fourier de uma função contínua e $2l$-periódica.

Definição 6.10. *Dada $f \in C_{per}([-l, l])$, definimos:*

(i) Os **coeficientes de Fourier** *de f são os números $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, dados por* [5]

$$\widehat{f}(n) := c_n = (f, E_n)_{L^2}.$$

(ii) A **transformada de Fourier (periódica)** *de f, indica por $\mathcal{F}(f)$, é a sequência dos seus coeficientes de Fourier, ou seja, a sequência de números complexos*

$$\mathcal{F}(f) := \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

(iii) A **série de Fourier** *de f é a série de funções $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)E_n$, ou, mais explicitamente, a série*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}.$$

Finalizemos esta seção destacando as primeiras estimativas dos coeficientes de Fourier. Para isso, recordemos o conjunto $l^\infty(\mathbb{Z})$, formado pelas sequências limitadas de números complexos:

$$l^\infty(\mathbb{Z}) := \left\{\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \xi_n \in \mathbb{C},\ \text{para todo } n \in \mathbb{Z},\ \text{e } \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n| < \infty\right\}.$$

É fácil ver que $l^\infty(\mathbb{Z})$ tem estrutura de espaço vetorial relativamente às operações usuais de soma, termo a termo, de sequências e multiplicação, também termo a termo, por escalar. Além disso,

[5] Diz-se também que $\widehat{f}(n)$ é o n-ésimo coeficiente de Fourier de f, ou ainda, o coeficiente de Fourier de f correspondente à frequência n.

Análise funcional ensina que $l^\infty(\mathbb{Z})$ é um **espaço de Banach** munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty : l^\infty(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

$$\|\xi\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n|, \quad \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in {}^\infty(\mathbb{Z}).$$

Para o que segue, notemos, primeiramente que, para todos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ vale que

$$|E_n(x)| = \left|e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}\right| = \left|\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right| = 1.$$

Em particular

$$\|E_n\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |E_n(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} 1 dx\right)^{1/2} = 1.$$

Dito isso, fixada uma função $f \in C_{per}([-l,l])$, temos:

(1^o) Para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|(f, E_n)_{L^2}\right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \underbrace{\|E_n\|_{L^2}}_{=1} = \|f\|_{L^2}.$$

Isso significa que, para toda $f \in C_{per}([-l,l])$, sua transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$, ou seja, é uma sequência limitada e, mais ainda, vale a estimativa

$$\left\|\mathcal{F}(f)\right\|_\infty \leq \|f\|_{L^2}.$$

(2^o) A aplicação $\mathcal{F} : C_{per}([-l,l]) \longrightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$, que associa a cada função $2l$-periódica f, sua transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)$, é um operador linear [6] contínuo, considerando, naturalmente, $C_{per}([-l,l])$ munido da norma que provém do produto interno L^2 e $l^\infty(\mathbb{Z})$ munido da norma do supremo.

Ademais, a estimativa dada em (1^o) assegura que

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(C_{per};l^\infty)} \leq 1.$$

[6] Da linearidade do produto interno na primeira coordenada tem-se $(\widehat{f+\lambda g})(n) = (f+\lambda g, E_n)_{L^2} = (f,E_n)_{L^2} + \lambda(g,E_n)_{L^2} = \widehat{f}(n) + \lambda\widehat{g}(n)$ o que, segundo as operações de espaços vetoriais de sequências, dá $\mathcal{F}(f+g) = \left((\widehat{f+\lambda g})(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} + \lambda\left(\widehat{g}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.

Por outro lado, escolhendo $f \equiv 1$, claramente $\|f\|_{L^2} = 1$ e, dado $n \in \mathbb{Z}$, seus coeficientes ficam

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} 1 \cdot \overline{E_n(x)}dx = \begin{cases} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} 1 \cdot e^{-i\left(\frac{0\cdot\pi x}{l}\right)}dx = \int_{-l}^{l} 1dx = 1, & \text{se } n = 0. \\ \\ \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} 1 \cdot e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx = -\frac{l}{i\pi n}\, e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}\Big|_{-l}^{l} = 0, & \text{se } n \neq 0, \end{cases}$$

donde $\big\|\mathcal{F}(1)\big\|_{\infty} = 1$, demonstrando a desigualdade contrária

$$1 = \frac{\big\|\mathcal{F}(1)\big\|_{\infty}}{\|f\|_{L^2}} \leq \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(C_{per};l^{\infty})},$$

o que nos dá

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(C_{per};l^{\infty})} = 1.$$

(3^o) Escrevendo $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, calculemos

$$\Delta E_n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\ e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n\pi i}{l}e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}\right) = \frac{n\pi i}{l}\cdot\frac{d\ e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}}{dx} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}E_n(x),$$

resumindo, para todo $n \in \mathbb{Z}$, [7]

$$\Delta E_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}E_n.$$

Isso significa que o conjunto $E = \big\{E_n : n \in \mathbb{Z}\big\}$ é um conjunto de auto-funções para o operador de Laplace Δ em dimensão 1.

Nessas condições, quando mostrarmos que E é uma "base" para $C_{per}([-l, l])$, em particular, essa será uma base de auto-vetores de Δ, consequentemente, o que, ao final, demonstraremos é que Δ é "**diagonalizável**" em $C_{per}([-l, l])$.

4 Convergência da Série de Fourier

O teorema a seguir provém da Análise Funcional, mas deixamos sua demonstração aqui apenas para deixar o texto o mais auto-contido possível.

Teorema 6.11 (Desigualdade de Bessel). *Se $f \in C_{per}([-l, l])$, então, para todo $N \in \mathbb{N}$, vale a*

[7] **Exercício:** Faça o caso $n = 0$.

desigualdade

$$\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

Demonstração. Com efeito, fixado $N \in \mathbb{N}$, por propriedades do produto interno, podemos escrever

$$0 \leq \left\|f - \sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)E_n\right\|^2 = \|f\|_{L^2}^2 - 2\text{Re}\left(f, \sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)E_n\right)_{L^2} + \underbrace{\left\|\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)E_n\right\|^2}_{Teorema\ de\ Pitagoras} =$$

$$\|f\|_{L^2}^2 - 2\text{Re}\sum_{n=-N}^{N}\overline{\widehat{f}(n)}\underbrace{(f,E_n)_{L^2}}_{=\widehat{f}(n)} + \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2\underbrace{\|E_n\|^2}_{=1} =$$

$$\|f\|_{L^2}^2 - 2\text{Re}\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \|f\|_{L^2}^2 - 2\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2 + \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2 =$$

$$\|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2,$$

ou seja,

$$0 \leq \|f\|_{L^2}^2 - \sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2,$$

e o teorema está provado. □

Corolário 6.12. *Se $f \in C_{per}([-l,l])$, então valem as propriedades:*

(i) A série numérica $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{f}(n)\right|^2$ é absolutamente convergente, no sentido de que existe o limite

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2.$$

(ii) **Lema de Riemann-Lebesgue:**

$$\lim_{|N|\to\infty}\widehat{f}(n) = 0.$$

Demonstração. (i) Com efeito, a Desigualdade de Bessel afirma que a sequência $\left(\sum_{n=-N}^{N}\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)_{N\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Como ela é a sequências das somas parciais de uma sequência de termos não-negativos, ela é também não-decrescente. Assim, do "Teorema mais Importante da Análise", ela é convergente e, além disso, vale a estimativa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

(ii) Da convergência da série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$, concluímos que o limite do seu termos geral é 0, ou seja,

$$\lim_{|N|\to\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = 0.$$

A continuidade da função raiz quadrada [8], por sua vez, assegura que então

$$\lim_{|N|\to\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| = 0,$$

o que equivale a dizer que

$$\lim_{|N|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0,$$

como queríamos. □

4.1 A transformada de Fourier em L^2

Consideremos o espaço de Hilbert "l^2-pequeno"

$$l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \xi_n \in \mathbb{C}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}, \text{ e } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\},$$

munido do produto interno

$$(\xi, \eta)_{l^2} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \cdot \overline{\eta_n},$$

para $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$.

A Desigualdade de Bessel garante que, para toda $f \in C_{per}([-l,l])$, sua transformada de Fourier $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência em $l^2(\mathbb{Z})$ e que, além disso, vale a desigualdade

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{l^2} = \|\widehat{f}\|_{l^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2},$$

[8]Ou seja, para toda sequência convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $a_n \geq 0$, vale que $\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$.

como a prova de (i) do Corolário 6.12 explicou.

Essa estimativa assegura que, se $L^2([-l,l])$ indica o "completamento" de $C_{per}([-l,l])$, munido do produto interno $(\cdot,\cdot)_{L^2}$, então $\mathcal{F}$ pode ser estendida, de modo único, a este completamento, dando origem ao isomorfismo

$$\mathcal{F} : L^2([-l,l]) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}),$$

ainda chamado de transformada de Fourier, que constitui um dos mais importantes no desenvolvimento teoria moderna das EDP's.

4.2 Regularidade e Decaimento

Exigindo mais regularidade das funções que se pretende tomar a transformada de Fourier, podemos considerar os espaços de funções $2l$-periódicas e de classe C^m, $m \in \mathbb{N}$, ou seja, os espaços

$$C^m_{per}([-l,l]) := C^m([-l,l]) \cap C_{per}([-l,l]).$$

Uma das características mais importantes da transformada de Fourier é que ela é capaz de converter a regularidade das funções em taxa de decaimento dos seus coeficientes, como estabelece o teorema a seguir.

Teorema 6.13. *Se $f \in C^m_{per}([-l,l])$, para $m = 0,1,2,\cdots$, então existe uma constante $M > 0$, dependendo apenas de f, de maneira que para todo $n \in \mathbb{Z}$ tem-se*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \frac{M}{(1+|n|)^m}. \tag{6.12}$$

Em palavras, quando f é de classe C^m, seus coeficientes de Fourier tendem a 0 mais rápido do que qualquer potência $(1+|n|)^{-\alpha}$, com $\alpha \leq m$, quando $|n| \to \infty$.

Demonstração. Com efeito, quando $m = 0$, das primeiras estimativas para os coeficientes de Fourier, temos

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_{L^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.13}$$

o que nos dá (6.12) com $M = \|f\|_{L^2}$.

Se for $m = 1$, então $f' \in C_{per}([-l,l])$, por isso podemos calcular os coeficientes de Fourier de f', para cada $n \in \mathbb{Z}$, por

$$\widehat{(f')}(n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f'(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx,$$

o que, após integrar por partes, fica

$$\frac{1}{2l}\left(f\cdot e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}\right)\Big|_{-l}^{l}+\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\frac{n\pi i}{l}e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx.$$

Como $f\cdot e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$ é $2l$-periódica, a primeira parcela acima é nula, portanto

$$\widehat{(f')}(n)=\frac{1}{2l}\cdot\frac{n\pi i}{l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx=\frac{1}{2l}\cdot\frac{n\pi i}{l}\cdot\widehat{f}(n)$$

de onde, tomando o módulo, vem

$$|n|\big|\widehat{f}(n)\big|=\frac{2l^2}{\pi}\big|\widehat{(f')}(n)\big|\le\frac{2l^2}{\pi}\|f'\|_{L^2}.$$

Somando essa desigualdade com (6.13), obtemos

$$\big|\widehat{f}(n)\big|+|n|\big|\widehat{f}(n)\big|\le\|f\|_{L^2}+\frac{2l^2}{\pi}\|f'\|_{L^2},$$

de onde vemos que, pondo $M:=\|f\|_{L^2}+\frac{2l^2}{\pi}\|f'\|_{L^2}$ [9], resulta que

$$(1+|n|)\big|\widehat{f}(n)\big|\le M,\quad n\in\mathbb{Z},$$

senda esta a desigualdade (6.12) no caso $m=1$.

De modo inteiramente análogo prova-se, indutivamente, a desigualdade (6.12) para todos os valores de $m\in\mathbb{N}$, usando a igualdade

$$\left(f^{(m)}\right)^{\wedge}(n)=\left(\frac{n\pi i}{2l^2}\right)^m\widehat{f}(n),\quad n\in\mathbb{Z},$$

o que completa a demonstração. $\square$

[9]Vale a pena mencionar que a quantidade $\|f\|_{H^1}:=\|f\|_{L^2}+\|f'\|_{L^2}$ é a norma do espaço de Sobolev $H^1(-l,l)$.

4.3 Convergência uniforme da série de Fourier

Na prova da proposição a seguir, faremos uso da importantíssima "Desigualdade de Young" no caso $p = 2$, a saber: Dados $a, b \geq 0$ vale que

$$a \cdot b \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \tag{6.14}$$

Com efeito, basta perceber que $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

A forma geral da Desigualdade de Young é a seguinte: Para cada $1 < p < \infty$, definimos seu **expoente conjugado** pondo $p' := \frac{p}{p-1}$, então para todos $a, b \geq 0$ vale

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}.$$

Note que, quando $p = 2$, tem-se também $p' = 2$, e a Desigualdade de Young se torna (6.14).

Finalmente, vale a pena mencionar que (6.14) equivale a Desigualdade entre as Médias: Para todos $\alpha, \beta \geq 0$ tem-se

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2},$$

bastando fazer $a = \sqrt{\beta}$ e $b = \sqrt{\beta}$ em (6.14) e vice-versa.

Proposição 6.14. *Se $f \in C^1_{per}([-l, l])$, então sua série de Fourier converge uniformemente para uma função contínua g em $[-l, l]$.*

Demonstração. A ideia da prova consiste em usar o Teste M de Weierstrass.

Com efeito, da prova do Teorema 6.13, para todo inteiro $n \neq 0$, temos

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \frac{2l^2}{\pi}\frac{1}{|n|} \cdot \left|\widehat{(f')}(n)\right|.$$

Daí, fixados $n \neq 0$ e $y \in [-l, l]$, vale que

$$\left|\widehat{f}(n)E_n(y)\right| = \left|\widehat{f}(n)\right| = \frac{2l^2}{\pi}\frac{1}{|n|} \cdot \left|\widehat{(f')}(n)\right| \underbrace{\leq}_{ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2} \frac{2l^2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{|n|^2} + \frac{1}{2}\left|\widehat{(f')}(n)\right|^2\right),$$

donde, para todo $n \neq 0$ e $y \in [-l, l]$

$$\left|\widehat{f}(n)E_n(y)\right| \leq \frac{l^2}{\pi}\left(\frac{1}{|n|^2} + \left|\widehat{(f')}(n)\right|^2\right).$$

Como $\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{|n|^2}$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{(f')}(n)\right|^2$ são séries convergentes, sendo a segunda em virtude da Desigualdade de Bessel, a conclusão segue do Teste M de Weierstrass. $\square$

Observação 6.15. *Note que este resultado ainda não garante que a série de Fourier de f converge para ela própria. Ele apenas assegura a existência de uma função $g \in C_{per}([-l,l])$ de modo que, em particular, para todo $y \in [-l,l]$*

$$g(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}.$$

A continuidade de g resulta do fato de que o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua.

4.4 Núcleo de Dirichlet

Dada uma função $f \in C_{per}([-l,l])$, a fim de estudar a convergência pontual da série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)E_n$ para a própria f, procuraremos reescrever suas somas parciais de uma maneira mais conveniente que nos permita obter estimativas que sejam suficientes à convergência. Comecemos com uma observação.

Observação 6.16. *Dada $f \in C_{per}([-l,l])$, fixando $N \in \mathbb{N}$ e $y \in [-l,l]$, podemos escrever a N-ésima soma parcial da série de Fourier de f como*

$$S_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)E_n(y) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx\right) \cdot e^{i\left(\frac{n\pi y}{l}\right)} =$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\left(\frac{n\pi(y-x)}{l}\right)}dx = \int_{-l}^{l} f(x)\left[\frac{1}{2l}\sum_{n=-N}^{N} e^{i\left(\frac{n\pi(y-x)}{l}\right)}\right]dx = \int_{-l}^{l} f(x)D_N(y-x)dx,$$

em que

$$D_N(\theta) := \frac{1}{2l}\sum_{n=-N}^{N} e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Escreveremos, por simplicidade, [10]

$$S_N(y) = (D_N * f)(y), \quad y \in [-l,l].$$

[10] Diz-se que S_N é o "produto de convolução" entre f e D_N.

A sequência de funções $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é chamada o **Núcleo de Dirichlet***, cujas principais propriedades do Núcleo de Dirichlet no lema a seguir.*

Lema 6.17. *Para cada natural $N \in \mathbb{N}$ valem as propriedades:*

(i) $D_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função par.*

(ii) $D_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função $2l$-periódica, em particular $D_N(l) = D_N(-l)$.*

(iii) $D_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua.*

(iv) $D_N(0) = \frac{1}{l}\left(N + \frac{1}{2}\right)$.

(v) $\int_{-l}^{l} D_N(\theta)d\theta = 1$.

(vi) Se $\theta \neq 2ml$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, então vale a representação

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2l}\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)}.$$

Demonstração. Com efeito, (ii) e (iii) são evidentes. Para as demais, note que

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-N}^{N} e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)} = \frac{1}{2l}\left\{1 + \sum_{n=1}^{N}\left[e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)} + e^{-i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)}\right]\right\} = \frac{1}{2l}\left[1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)\right],$$

o que, primeiro, demonstra que D_N é uma soma finita de funções pares, logo deve ser par.

Em segundo, integrando de $-l$ a l vem

$$\int_{-l}^{l} D_N(\theta)d\theta = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left[1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)\right]d\theta = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} d\theta + \sum_{n=1}^{N} 2\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)d\theta = 1,$$

em virtude de (6.5), nos dando (v).

Também,

$$D_N(0) = \frac{1}{2l}\left[1 + \sum_{n=1}^{N} 2\cos\left(\frac{n\pi 0}{l}\right)\right] = \frac{1}{2l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{N} 1\right] = \frac{1}{l}\left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente, supondo que $\theta \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-N}^{N} e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)} = \frac{1}{2l}\left\{1 + \sum_{n=1}^{N}\left[e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)} + e^{-i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2l}\left[1 + 2\text{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{l}\right)}\right)\right] = \frac{1}{2l}\left[1 + 2\text{Re}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)} - e^{i\left(\frac{(N+1)\pi\theta}{l}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)}}\right)\right],$$

em que, na última igualdade, usamos a soma dos N primeiros termos de uma P.G. [11] Agora, colocando $e^{i\left(\frac{n\pi\theta}{2l}\right)}$ em evidência no numerador e no denominador de

$$\frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)} - e^{i\left(\frac{(N+1)\pi\theta}{l}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)}},$$

vem

$$\frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)} - e^{i\left((N+1)\frac{\pi\theta}{l}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} - e^{i\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}}{e^{-i\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} - e^{i\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}}{-i\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} =$$

$$\frac{ie^{i\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} - ie^{i\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} =$$

$$\frac{i\cos\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right) - \sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right) - i\cos\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right) + \sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)}.$$

Tomando então sua parte real, vemos que

$$1 + \text{Re}\left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)} - e^{i\left(\frac{(N+1)\pi\theta}{l}\right)}}{1 - e^{i\left(\frac{\pi\theta}{l}\right)}}\right) = 1 + \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right) - \sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)} =$$

$$\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)}, \quad \text{desde que } \theta \neq 2ml,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Concluindo assim que, para todo $N \in \mathbb{N}$ e $\theta \neq 2ml$, $m \in \mathbb{Z}$, vale que

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2l}\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\theta}{2l}\right)},$$

e as propriedades estão todas demonstradas.

[11] $\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{z - z^{N+1}}{1-z}$, se $z \neq 1$.

□

4.5 Convergência pontual da série de Fourier

Para as considerações a seguir, indicaremos por $\mathcal{L}^1([-l,l])$ o conjunto das funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ Riemann integráveis e absolutamente integrávis em $[-l,l]$. Lembre-se que, ao contrário da integral de Lebesgue, ser Riemann integrável não é o mesmo que ser absolutamente integrável. Considerando o caso próprio, podemos dar como exemplo, a função $\psi:[-l,l]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[-l,l] \\ -1, & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\cap[-l,l] \end{cases}$$

é absolutamente integrável mas não é integrável, porque seu conjunto de descontinuidades é todo o intervalo $[-l,l]$.

Um outro exemplo, agora do caso impróprio e no intervalo $[0,1]$, é fornecido pela função

$$f := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\chi_{[1/(n+1),1/n]},$$

em que χ_A significa a **função característica** do conjunto A, ou seja, aquela que vale 1 nos pontos de A e 0 nos fora de A. Nesse caso tem-se

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\cdot\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1},$$

cuja convergência decorre do Critério de Leibniz para séries alternadas.

Por outro lado,

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

sendo ela uma série harmônica divergente.

Definição 6.18 (Generalização dos coeficientes de Fourier para funções integráveis). *Seja* $f\in\mathcal{L}^1([-l,l])$, *para cada* $n\in\mathbb{Z}$ *pomos*

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx,$$

os quais serão também chamados de **coeficientes de Fourier** *de* f. *Mais especificamente,* $\widehat{f}(n)$ *é o* **coeficiente de Fourier de f correspondente à frequência** n.

Além disso, a sequência $\widehat{f} = (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *ainda é chamada* **transformada de Fourier** *de* f *e a série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}$, *a* **série de Fourier** *de* f.

Observação 6.19. *Para* $f \in \mathcal{L}^1([-l,l])$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *a existência do número decorre do fato de que o produto* $f \cdot g$ *de função integrável* f *por uma integrável e limitada* g *é também integrável (demonstre).*

Neste caso, a estimativa para os coeficientes é obtida por

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx\right| \leq \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \left|f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}\right|dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left|f(x)\right|dx = \|f\|_{L^1},$$

donde

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_{L^1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Quando $f \in C_{per}([-l,l])$, *tinhamos* $\widehat{f}(n) = (f, E_n)_{L^2}$ *e as estimativas eram*

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \|f\|_{L^2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

em virtude da Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Finalmente, devemos mencionar que a norma L^2 *é "melhor" do que a norma* L^1 *no sentido de que* [12]

$$L^2([-l,l]) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}^1([-l,l]),$$

com

$$\|f\|_{L^1} \leq (2l)^{1/2}\|f\|_{L^2},$$

evidenciando que a norma L^2 *domina, ou é mais forte, do que a* L^1. [13]

Teorema 6.20 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função* $2l$*-periódica com* $f \in \mathcal{L}^1([-l,l])$, *então*

$$\lim_{|N|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Demonstração. Faremos a demonstração usando o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [5]: "Se $f \in \mathcal{L}^1([-l,l])$, então existe uma sequência $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $C_{per}([-l,l])$, tal que $\|f_j - f\|_{L^1} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$."

[12] Isso quer dizer que os objetos de L^2 são mais regulares do que os de L^1.

[13] Isso significa, em particular, que, neste caso, a converência L^2 implica na L^1.

Nessas condições, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma função $f_\varepsilon \in C_{per}([-l, l])$ tal que

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \big[f(x) - f_\varepsilon(x)\big]e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx + \underbrace{\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f_\varepsilon(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}dx}_{=\widehat{f_\varepsilon}(n)},$$

donde

$$\big|\widehat{f}(n)\big| \leq \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} \big|f(x) - f_\varepsilon(x)\big|dx + \big|\widehat{f_\varepsilon}(n)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \big|\widehat{f_\varepsilon}(n)\big|.$$

Como $\lim\limits_{|n|\to\infty} \big|\widehat{f_\varepsilon}(n)\big| = 0$, podemos fixar um $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|n| \geq n_\varepsilon \implies \big|\widehat{f_\varepsilon}(n)\big| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

consequentemente [14]

$$|n| \geq n_\varepsilon \implies \big|\widehat{f}(n)\big| \leq \varepsilon,$$

o que é o significado de dizer que

$$\lim_{|N|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

□

Analogamente ao que fizemos na Observação 6.16, conclui-se que que quando $f \in \mathcal{L}^1([-l, l])$, vale que $S_N(y) = (D_N * f)(y)$, para todo $-l \leq y \leq l$, donde

$$S_N(y) = (D_N * f)(y) = \int_{-l}^{l} D_N(y-x)f(x)dx \overbrace{=}^{MV:\, z=y-x} \int_{y-l}^{y+l} D_N(z)f(y-z)dz = \int_{-l}^{l} D_N(z)f(y-z)dz,$$

em que na última igualdade, usamos o Lema 6.6, pois $z \longmapsto D_N(z)f(y - z)$ é uma função $2l$-periódica, qualquer que seja o $y \in [-l, l]$ fixado.

Assim, das propriedades do Núcleo de Dirichlet, vem

$$S_N(y) = \int_{-l}^{l} D_N(z)f(y - z)dz = \int_{-l}^{0} \underbrace{D_N(z)}_{=D_N(-z)} f(y - z)dz + \int_{0}^{l} D_N(z)f(y - z)dz =$$

[14] É extremamente importante destacar que, aqui, f_ε não depende de n, mas sim o contrário.

$$\int_{-l}^{0} D_N(-z)f(y-z)dz+\int_{0}^{l} D_N(z)f(y-z)dz = -\int_{l}^{0} D_N(t)f(y+t)dt+\int_{0}^{l} D_N(z)f(y-z)dz =$$

$$\int_{0}^{l} D_N(t)f(y+t)dt + \int_{0}^{l} D_N(z)f(y-z)dz = \int_{0}^{l} D_N(z)\left[f(y+z)+f(y-z)\right]dz,$$

em resumo, para todo $-l \leq y \leq l$ e $N \in \mathbb{N}$, vale a representação

$$S_N(y) = \int_{0}^{l} D_N(z)\left[f(y+z)+f(y-z)\right]dz.$$

Suponhamos agora que f seja tal que, para todo $y \in (-l,l)$, existem os limites laterais de f em y, isto é, os números

$$f(y+) := \lim_{x\to y^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(y-) := \lim_{x\to y^-} f(x).$$

De (v) do Lema 6.17, resulta que $\int_0^l D_N(z)dz = \frac{1}{2}$ e então

$$S_N(y) - \frac{f(y+)+f(y-)}{2} =$$

$$\int_{0}^{l} D_N(z)\left[f(y+z)+f(y-z)\right]dz - \int_{0}^{l} D_N(z)dz\cdot\big(f(y+)+f(y-)\big) =$$

$$\int_{0}^{l} D_N(z)\big\{\left[f(y+z)-f(y+)\right]+\left[f(y-z)-f(y-)\right]\big\}dz,$$

escrevendo então

$$g(y,z) := \left[f(y+z)-f(y+)\right]+\left[f(y-z)-f(y-)\right], \quad y,z \in [-l,l],$$

obtemos uma representação muito útil para a diferença entre as somas parciais da série de Fourier de f e a média dos limites laterais de f em y, a saber:

$$S_N(y) - \frac{f(y+)+f(y-)}{2} = \int_{0}^{l} D_N(z)g(y,z)dz.$$

Teorema 6.21 (O Teste de Dini). *Sejam $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ uma função $2l$-periódica e $\mathcal{L}^1([-l,l])$ e $y \in [-l,l]$ tal que os limites laterais, $f(y+)$ e $f(y-)$, de f em y existam.*

Considerando

$$g(y,z) = \left[f(y+z)-f(y+)\right]+\left[f(y-z)-f(y-)\right], \quad z \in [-l,l],$$

suponhamos que existe $\eta > 0$ de modo que

$$\int_0^\eta \left|\frac{g(y,z)}{z}\right| dz < \infty.$$

Nessas condições,

$$\lim_{N\to\infty} S_N(y) = \frac{f(y+) + f(y-)}{2}.$$

Ou seja, a série de Fourier de f, no ponto y, converge para a média dos limites laterais em y.

Demonstração. Com efeito, para cada $N \in \mathbb{N}$ e $\delta \in (0,l)$, das observações acima, temos

$$S_N(y) - \frac{f(y+) + f(y-)}{2} = \int_0^l D_N(z)g(y,z)dz = \int_0^\delta D_N(z)g(y,z)dz + \int_\delta^l D_N(z)g(y,z)dz.$$

Mostremos, individualmente, que $\int_0^\delta D_N(z)g(y,z)dz \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\int_\delta^l D_N(z)g(y,z)dz \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Primeiramente, para cada $\delta \in (0,l)$, tem-se

$$\left|\int_0^\delta D_N(z)g(y,z)dz\right| = \left|\int_0^\delta zD_N(z)\frac{g(y,z)}{z}dz\right| \leq \int_0^\delta \left|zD_N(z)\right| \left|\frac{g(y,z)}{z}\right| dz.$$

Usando a expressão compacta (vi) dada no Lema 6.17, ou seja,

$$D_N(z) = \frac{1}{2l}\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})\frac{\pi z}{l}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)},$$

para $0 < z < \delta$, vemos que

$$\left|zD_N(z)\right| \leq \frac{1}{2l}\frac{z}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}{\frac{\pi z}{2l}}},$$

de onde vemos, pelo Limite Fundamental, que

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}{\frac{\pi z}{2l}}} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi},$$

o que, em particular, nos diz que $\left|zD_N(z)\right|$ é limitado por uma constante $M > 0$ para z próximo de 0 e uniformemente em $N \in \mathbb{N}$.

Daí, dado $\varepsilon > 0$, para $\delta \in (0,\eta)$ fixo, suficientemente pequeno, obtemos

$$\left|\int_0^\delta D_N(z)g(y,z)dz\right| \leq M\int_0^\delta \left|\frac{g(y,z)}{z}\right| dz \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$, devido a hipótese de integrabilidade de $\left|\frac{g(y,z)}{z}\right|$ em $(0,\eta)$.

Para o segundo termo, fixado o $\delta \in (0,\eta)$ obtido acima, ainda usando a expressão compacta do núcleo $(D_N)_{N\in\mathbb{N}}$, escrevamos

$$\left|\int_\delta^l D_N(z)g(y,z)dz\right| = \frac{1}{2l}\left|\int_\delta^l \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}\right)\frac{g(y,z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}dz\right| \leq$$

$$\frac{1}{2l}\left|\int_\delta^l \sin\left(\frac{N\pi z}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)\frac{g(y,z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}dz\right| + \frac{1}{2l}\left|\int_\delta^l \cos\left(\frac{N\pi z}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)\frac{g(y,z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}dz\right| =$$

$$\frac{1}{2l}\left|\int_\delta^l \sin\left(\frac{N\pi z}{l}\right)\underbrace{\left[\cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)\frac{g(y,z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)}\right]}_{g_1\in\mathcal{L}^1}dz\right| + \frac{1}{2l}\left|\int_\delta^l \cos\left(\frac{N\pi z}{l}\right)\underbrace{g(y,z)}_{g_2\in\mathcal{L}^1}dz\right|.$$

Como as funções $g_1 = g_1(z)$ e $g_2 = g_2(z)$, acima destacadas, são $\mathcal{L}^1$, pois seus denominadores não se anulam em $[\delta, l]$, resulta que cada umas das parcelas acima tendem a zero quando $N \to \infty$, em virtude do Lema Riemann-Lebesgue, Teorema 6.20, pois os integrandos que nelas ocorrem, multiplicando o seno e o cosseno, podem então serem vistas como às partes real e imaginária de funções complexas integráveis, respectivamente, o que completa a demonstração. $\square$

Observação 6.22. *Dizemos que uma função $f : [-l,l] \longrightarrow \mathbb{C}$ é* **uniformemente Hölder contínua** *com expoente $\alpha \in (0,1]$, quando existe $M > 0$ de modo que para todos $x, y \in [-l,l]$ vale que*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha.$$

Neste caso, $f \in C([-l,l])$ e para todos $x, y \in [-l,l]$ podemos escrever

$$\left|\frac{g(y,z)}{z}\right| = \left|\frac{f(y+z)-f(y)}{z} + \frac{f(y-z)-f(y)}{z}\right| \leq M|z|^{\alpha-1}.$$

Como $\int_0^1 z^{\alpha-1}dz < \infty$, pois $\alpha > 0$, toda função Hölder contínua satisfaz o critério de Dini em y, qualquer que seja $y \in [-l,l]$.

Além disso, a média dos limites laterais de f em y é o próprio $f(y)$, já que f é contínua.

Finalmente, se $f \in C^1_{per}([-l,l])$, então f possui derivada limitada em $[-l,l]$, donde f é uniformemente Lipschitz, que é o mesmo que dizer que f é Hölder contínua com expoente $\alpha = 1$.

Conclusão: *Se $f \in C^1_{per}([-l,l])$, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em $[-l,l]$, em virtude do Teste de Dini e da Proposição 6.14.*

5 Exercícios

(1) Determine se o método de separação de variáveis pode ser usada para transformar cada uma das EDP's abaixo em um par de EDO's; neste caso, explicite essas EDO's:

(i) $xu_{xx} + u_t = 0$

(ii) $tu_{xx} + xu_t = 0$

(iii) $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$

(iv) $u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0$

(2) Sejam $l > 0$ e $c > 0$ constantes, $f \in C^1([0,l])$ e $g \in C([0,l])$ e considere o PVI para a EDP da onda

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ t \in \mathbb{R}, \ 0 < x < l \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), \ 0 \leq x \leq l \\ u_t(0,x) = g(x), \ 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

(i) Aplique o método de separação de variáveis para obter uma solução u para as duas primeiras condições deste problema que seja da forma $u(t,x) = T(t)\phi(x)$.

(ii) O item acima dará origem a uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções. Pensando na linearidade destas duas condições, *formule* a necessidade que surge em se poder representar as condições iniciais f e g como somas de séries convenientes.

(3) **O Problema de Dirichlet homogêno num retângulo:** Sejam $a, b > 0$, $\Omega = (0,a)\times(0,b)$, um retângulo, e considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ em } \Omega \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \ 0 \leq x \leq a \\ u(0,y) = 0, \ 0 \leq y \leq b, \\ u(a,y) = f(y), \ 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

em que $f \in C([0,b])$ cumpre $f(0) = f(b) = 0$.

(i) Aplique o método de separação de variáveis para obter uma solução u para as três primeiras condições deste problema que seja da forma $u(x,y) = T(y)\phi(x)$.

(ii) O item acima dará origem a uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções. Nessas condições *formule* a necessidade que surge em se poder representar a condiçao inicial f como soma de uma série conveniente.

Referências Bibliográficas

[1] V. Iório, *EDP - Um curso de Graduação*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, (1991).

[2] D.G. Figueiredo, *Análise de Fourier e equações a derivadas parciais*, Brasília, IMPA-CNPq, (1977).

[3] R. Iório, *Equações Diferenciais Parciais, uma introdução*, Projeto Euclides, IMPA, (1991).

[4] G.B. Folland, *Introduction to partial Differential equation*. 2nd ed. Princeton University Press (1995).

[5] G.B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Aplications*. 2nd ed. Wiley Interciance (1999).

[6] J. Hounie, *Teoria elementar das Distribuições*, Colóquio brasileiro de Matemática, Poços de Caldas (1979).

[7] E. Lima, *Análise Real, Volume 2*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, (2004).

[8] S. Berhanu, P. Cordado and J. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press, (2008).

[9] E. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, (1991).

[10] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, (1979).

[11] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic press, New York, (1975).

[12] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, (2010).

[13] E.R. Aragão-Costa, *Análise Funcional II*, notas de aula ICMC, (2015).

[14] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, (2001).