1 Definições básicas

Definição 1.1. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma **seminorma** em X é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$.

Observação 1.2. Note que $p(0) = 0$, pois $p(0) = p(0x) = |0|p(x) = 0$. No entanto, podemos ter $p(x) = 0$ para algum $x \in X \setminus \{0\}$.

Temos também que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, pois $0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1|p(x) = 2p(x)$. Dividindo por 2, obtemos o desejado.

Definição 1.3. Se $p : X \to \mathbb{K}$ for uma seminorma tal que $p(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, então p é chamada de **norma**. Neste caso, denotaremos a norma por $\| \cdot \|$ e diremos que o par $(X, \| \cdot \|)$ é um **espaço normado**.

Exemplo 1.4. $| \cdot | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $| \cdot |$ a função módulo usual, é uma norma em $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. $| \cdot | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sendo $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$, é uma norma em $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.6. Em $\mathbb{R}^n$, as seguintes normas são muito utilizadas:

1. $| \cdot | : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $|x| = |(x_1, \ldots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$;
2. $| \cdot |_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $|x|_s = |(x_1, \ldots, x_n)|_s = \sum_{i=1}^n |x_i|$, sendo $|x_i|$ o módulo usual em $\mathbb{R}$;
3. $| \cdot |_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, sendo novamente $|x_i|$ o módulo usual em $\mathbb{R}$.

Chamamos tais normas de **norma euclidiana**, **norma da soma** e **norma do máximo**, respectivamente.

Lema 1.7. Se $0 < r < 1$ e $a, b \geq 0$, então $(a + b)^r \leq a^r + b^r$.

Demonstração. Se $a = 0$ ou $b = 0$, então o resultado é válido. Caso contrário, podemos supor $b \neq 0$ e, deste modo, temos que $(a + b)^r \leq a^r + b^r$ se, e somente se, $\left(\frac{a}{b} + 1\right)^r \leq \left(\frac{a}{b}\right)^r + 1$. De fato, basta dividir por b^r para ver que o primeiro caso implica no segundo e multiplicar por b^r para ver que o segundo implica o primeiro.

Defina então $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ como $f(t) = (t + 1)^r - t^r - 1$ e observe que $f'(t) = r(t + 1)^{r-1} - rt^{r-1} = r[(t + 1)^{r-1} - t^{r-1}] \leq 0$ para todo $t \geq 0$, pois $r - 1 < 0$. Logo, f é decrescente e isso implica que $f(0) \geq f(t)$ para todo $t \geq 0$. Mas isso significa que $(t + 1)^\alpha \leq t^\alpha + 1$ para todo $t \geq 0$, como queríamos. $\square$

Proposição 1.8. $|x|_\infty \leq |x| \leq |x|_s \leq n|x|_\infty$.

Demonstração. Para $i = 1, \ldots, n$, temos que $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x|$. Logo, a primeira desigualdade é válida.

Usando agora o lema anterior, sabemos que $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq (x_1^2)^{\frac{1}{2}} + \ldots + (x_n^2)^{\frac{1}{2}} = |x_1| + \ldots + |x_n| = |x|_s$. Portanto, a segunda desigualdade também segue.

A última é óbvia, pois $|x|_s = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n \max_{1\leq j\leq n} |x_j| = n|x|_\infty$. $\square$

Exemplo 1.9. Considere $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}$ e fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Definindo $p_{x_0} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $p_{x_0}(f) = |f(x_0)|$, temos que p_{x_0} é uma seminorma. Observe que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t - x_0$ é não identicamente nula, mas $p_{x_0}(f) = |f(x_0)| = 0$. Logo, podemos ter elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ que não são o vetor nulo, mas se anulam quando aplicamos p_{x_0}.

Exemplo 1.10. Considere agora $\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$ e, para cada $j \in \mathbb{N}$, defina $p_j : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $p_j(f) = \sup_{|x|\leq j} |f(x)| = \sup_{-j\leq x\leq j} |f(x)|$. Tal função está bem definida, pois funções contínuas são limitadas em compacto. Observe que novamente temos uma seminorma em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, pois a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \in [-j, j], \\ t + j, & \text{se } t \in (-\infty, j), \\ t - j, & \text{se } t \in (j, \infty) \end{cases}$$

é contínua, não identicamente nula, mas $p_j(f) = \sup_{|x|\leq j} |f(x)| = 0$.

Exemplo 1.11. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, defina

$$C_B(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ é limitada e contínua}\}.$$

Considerando $p : C_B(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $p(f) = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$, temos que f é uma norma em $C_B(\Omega)$. A norma p será denotada por $\|\cdot\|_\infty$ e ela é chamada de **norma do supremo** ou **norma da convergência uniforme**.

Exemplo 1.12. Vamos agora falar dos espaços $\ell^p(\mathbb{N})$. Fixado $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : z_n \in \mathbb{C} \text{ e } \|(z_n)\|_p^p < \infty\},$$

sendo $\|(z_n)\|_p := (\sum_{n=1}^\infty |z_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Verifiquemos que $\ell^p(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Como a sequência $(0) \in \ell^p(\mathbb{N})$, então $\ell^p(\mathbb{N}) \neq \emptyset$. Também temos que, se $(z_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda(z_n) := (\lambda z_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, pois

$$\|(\lambda z_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |\lambda z_n|^p = \sum_{n=1}^\infty |\lambda|^p |z_n|^p = |\lambda|^p \sum_{n=1}^\infty |z_n|^p = |\lambda|^p \|(z_n)\|_p^p < \infty.$$

Por último, mostremos que, se $(z_n),(w_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$, então $(z_n)+(w_n) := (z_n + w_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} |z_n + w_n|^p &\leq (|z_n| + |w_n|)^p \leq (2\max\{|z_n|,|w_n|\})^p \\ &= 2^p \max\{|z_n|^p, |w_n|^p\} \leq 2^p(|z_n|^p + |w_n|^p). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|(z_n+w_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n+w_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^p|z_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^p|w_n|^p \\ &= 2^p\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^p\right) = 2^p\left(\|(z_n)\|_p^p + \|(w_n)\|_p^p\right) < \infty \end{aligned}$$

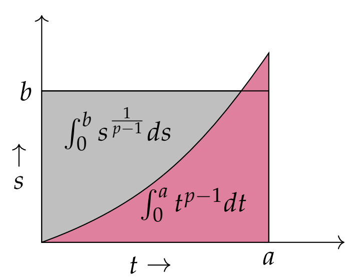
e o resultado segue. Normalmente chamaremos o espaço $\ell^p(\mathbb{N})$ apenas de ℓ^p.

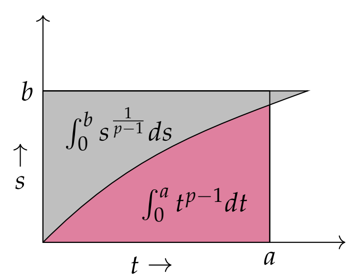
Definição 1.13. Dado $1 < p < \infty$, definimos o **expoente conjugado de** p como $p' := \frac{p}{p-1}$. Se $p = 1$, definimos $p' := \infty$ e, se $p = \infty$, definimos $p' = 1$.

Observação 1.14. Note que, se $1 < p < \infty$, então $1 < p'$. De fato, se $p' \leq 1$, então $\frac{p}{p-1} \leq 1$ e isso implica que $p \leq p-1$, pois $1 < p$ e ao multiplicarmos por $p-1$ a desigualdade não muda. Temos então uma contradição. É fácil ver também que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lema 1.15 (Desigualdade de Young)**.** Se $1 < p < \infty$ e p' é seu expoente conjugado, então $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ para quaisquer $a,b \geq 0$.

Demonstração Geométrica. Considere $\phi : [0,a] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = t^{p-1}$ e $\psi : [0,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(s) = s^{\frac{1}{p-1}}$. Note então que duas coisas podem acontecer: $\phi(a) = a^{p-1} \geq b$ ou $\phi(a) = a^{p-1} < b$. No entanto, se o segundo caso ocorrer, então temos que $\psi(b) = b^{\frac{1}{p-1}} > a$, pois basta elevar ambos os lados por $p-1$ e lembrar que, como $1 < p$, então a desigualdade se mantém, já que elevar por $p-1$ é uma função crescente. Assim, as figuras a seguir representam o primeiro e o segundo caso do que pode acontecer, respectivamente:





Como ab é a área do retângulo com vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) e $(0,b)$, podemos ver que a área das duas funções somadas, que é dada por $\int_0^a \phi(t)dt +$

$\int_0^b \psi(s)ds = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$, será maior que a área de tal retângulo. Fica assim provada a desigualdade. $\square$

Teorema 1.16 (Desigualdade de Hölder)**.** Considerando novamente $1 < p < \infty$ e p' seu expoente conjugado, temos que, se $(z_n) \in \ell^p$ e $(w_n) \in \ell^{p'}$, então $(z_n w_n) \in \ell^1$ e a seguinte desigualdade é válida:

$$\|(z_n w_n)\|_1 \leq \|(z_n)\|_p \|(w_n)\|_{p'}.$$

Demonstração. Primeiramente verifiquemos que o resultado é válido quando $\|(z_n)\|_p = \|(w_n)\|_{p'} = 1$. Pelo lema anterior, temos que a seguinte desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|z_n w_n| = |z_n||w_n| \leq \frac{|z_n|^p}{p} + \frac{|w_n|^{p'}}{p'}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|(z_n w_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n w_n| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p + \frac{1}{p'} \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^{p'} \\ = \frac{\|(z_n)\|_p^p}{p} + \frac{\|(w_n)\|_{p'}^{p'}}{p'} = 1 \end{aligned}$$

e temos o desejado, pois lembre-se que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Agora verifiquemos o caso geral. Se $(z_n) \in \ell^p$ e $(w_n) \in \ell^{p'}$ são quaisquer, então as sequências $z = \left(\frac{z_n}{\|(z_n)\|_p}\right)$ e $w = \left(\frac{w_n}{\|(w_n)\|_{p'}}\right)$ são tais que $\|z\|_p = \|w\|_{p'} = 1$ e o caso anterior se aplica. Assim, temos que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{z_m}{\|(z_n)\|_p} \frac{w_m}{\|(w_n)\|_{p'}} \right| = \frac{1}{\|(z_n)\|_p \|(w_n)\|_{p'}} \sum_{m=1}^{\infty} |z_m w_m| \leq 1,$$

como queríamos. $\square$

Teorema 1.17 (Desigualdade de Minkowski)**.** Dados $(z_n), (w_n) \in \ell^p$, temos que $\|(z_n + w_n)\|_p \leq \|(z_n)\|_p + \|(w_n)\|_p$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Não é difícil ver que o resultado é válido se $p = 1$ ou se $\|(z_n + w_n)\|_p = 0$. Façamos então os outros casos. Seja p' o expoente conjugado de

p. Temos então que $(|z_n + w_n|^{p-1}) \in \ell^{p'}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|(|z_n + w_n|^{p-1})\|_{p'}^{p'} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(|z_n + w_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p \\
&\overset{1.1}{\leq} 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p \right) \\
&= 2^p (\|(z_n)\|_p^p + \|(w_n)\|_p^p) < \infty,
\end{aligned}$$

pois $(z_n), (w_n) \in \ell^p$. Agora note que

$$|z_n + w_n|^p = |z_n + w_n|^{p-1}|z_n + w_n| \leq |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| + |z_n + w_n|^{p-1}|w_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|(z_n + w_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|w_n|.
\end{aligned}$$

No entanto, a Desigualdade de Hölder 1.16 nos garante que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|z_n + w_n|^{p-1}\right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|w_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|z_n + w_n|^{p-1}\right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, juntando as desigualdades e fatorando $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|z_n + w_n|^{p-1}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{\frac{1}{p'}} = \|(z_n + w_n)\|_p^{\frac{p}{p'}}$, obtemos que

$$\|(z_n + w_n)\|_p^p \leq \|(z_n + w_n)\|_p^{\frac{p}{p'}} (\|(z_n)\|_p + \|(w_n)\|_p).$$

Dividindo então ambos os lados por $\|(z_n + w_n)\|_p^{\frac{p}{p'}}$, que é diferente de 0, segue o desejado, pois

$$\frac{\|(z_n + w_n)\|_p^p}{\|(z_n + w_n)\|_p^{\frac{p}{p'}}} = \|(z_n + w_n)\|_p^{p - \frac{p}{p'}} = \|(z_n + w_n)\|_p.$$

□

Proposição 1.18. A função $\|\cdot\|_p : \ell^p \to \mathbb{R}$ é uma norma.

Demonstração. A desigualdade triangular é o resultado anterior e já vimos que $\|\lambda(z_n)\|_p = |\lambda|\|(z_n)\|_p$ quando mostramos que ℓ^p era espaço vetorial. Assim, resta verificar que se $\|(z_n)\|_p = 0$, então (z_n) é a sequência nula. Mas isso de fato ocorre, pois se $\|(z_n)\|_p = 0$, então $\|(z_n)\|_p^p = 0$ e isso implica que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p = 0$. Logo, como temos uma soma de termos positivos, segue que $|z_n|^p = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Extraindo então a raiz p-ésima, segue que $z_n = 0$, pois $|z_n| = 0$ se, e somente se, $z_n = 0$. □

Definição 1.19. Se $p = \infty$, definimos $\ell^\infty := \{(z_n) : z_n \in \mathbb{C} \text{ e } (z_n) \text{ é limitada}\}$ e $\|(z_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$.

Observação 1.20. A função $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ é uma norma.

Observação 1.21. Toda sequência convergente é limitada e, portanto, está em ℓ^∞. Temos também que $\ell^p \subset \ell^\infty$ para todo $1 \le p \le \infty$. De fato, se $(z_n) \in \ell^p$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < \infty$ e, portanto, a sequência $(|z_n|^p)$ converge pra 0. Mas se tal sequência converge pra 0, então a sequência (z_n) também converge pra 0 e temos o desejado. Assim, se definirmos $C(\mathbb{N}) := \{(z_n) : (z_n) \text{ é convergente}\}$ e $C_0(\mathbb{N}) := \{(z_n) : (z_n) \text{ converge pra } 0\}$, temos que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset C_0(\mathbb{N}) \subset C(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ para todo $1 \le p < \infty$.

Observação 1.22. A Desigualdade de Hölder continua valendo se $p = 1$. De fato, dadas $(z_n) \in \ell^1$ e $(w_n) \in \ell^\infty$, temos que $|z_n w_n| = |z_n||w_n| \le |z_n|\|(w_m)\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Somando então dos dois lados, obtemos o desejado:

$$\begin{aligned}
\|(z_n w_n)\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |z_n w_n| \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|\|(w_m)\|_\infty \\
&= \|(w_m)\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \\
&= \|(w_m)\|_\infty \|(z_n)\|_1.
\end{aligned}$$

Observação 1.23. O espaço ℓ^p tem dimensão infinita. De fato, basta observar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $e_n = (\delta_{nj})$ dada por $\delta_{nj} = 0$, se $j \neq n$, e $\delta_{nj} = 1$, se $j = n$, está em ℓ^p para todo $1 \le p \le \infty$. Assim, se ℓ^p tivesse dimensão finita, digamos $\dim(\ell^p) = k$, teríamos que as sequências $e_1, \dots, e_k$ formariam um conjunto linearmente independente e, portanto, deveriam gerar ℓ^p. Mas é claro que não geram, pois a sequência e_{k+1} não está no conjunto gerado por tais sequências, por exemplo.

Observação 1.24. Se $1 \le p \le q \le \infty$, então $\ell^p \subset \ell^q$. De fato, dada $(z_n) \in \ell^p$, temos que $|z_n|^q = |z_n|^{q-p}|z_n|^p \le \|(z_n)\|_\infty^{q-p}|z_n|^p$ e, portanto,

$$\|(z_n)\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^q \le \|(z_n)\|_\infty^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p = \|(z_n)\|_\infty^{q-p} \|(z_n)\|_p^p < \infty.$$

Consequentemente, nossa cadeia de inclusões aumenta, isto é,

$$\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N}) \subset C_0(\mathbb{N}) \subset C(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$$

para quaisquer $1 \leq p \leq q < \infty$.

2 Compacidade e Dimensão I

Definição 2.1. Seja X um conjunto não vazio. Um conjunto $\mathcal{T} \subset \wp(X)$ é chamado de uma **topologia de** X se $\mathcal{T}$ satisfizer as seguintes propriedades:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- Se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, então $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}$.

Definição 2.2. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ uma topologia de X. Um elemento de $\mathcal{T}$ é chamado de **conjunto aberto** e o complementar de um elemento de $\mathcal{T}$ é chamado de **conjunto fechado**.

Definição 2.3. Um **espaço topológico** é um par $(X, \mathcal{T})$ em que X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ é uma topologia de X. Normalmente nos referiremos apenas ao conjunto X como sendo um espaço topológico.

Definição 2.4. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto qualquer não vazio. Podemos então induzir uma topologia em Y dada por $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$. Não é difícil ver que de fato $\mathcal{T}_Y$ é uma topologia de Y e, portanto, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ é um espaço topológico. Chamamos tal topologia de **topologia do subespaço**.

Definição 2.5. Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica em** X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz, para quaisquer $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades:

- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 2.6. Um **espaço métrico** é um par (X, d) em que X é um conjunto não vazio e d é uma métrica em X. Normalmente nos referiremos apenas ao conjunto X como sendo um espaço métrico.

Definição 2.7. Seja (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$ um subconjunto qualquer não vazio. Podemos então induzir uma métrica em Y considerando a restrição $d|_{Y \times Y}$. Desta forma, obtemos que $(Y, d|_{Y \times Y})$ é um espaço métrico. Tal métrica é chamada de **métrica do subespaço**.

Definição 2.8. Seja (X, d) um espaço métrico, $a \in X$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Chamamos o conjunto $B(a, r) := \{x \in X : d(a, x) < r\}$ de **bola aberta (centrada em a e de raio r)** e o conjunto $B[a, r] := \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ de **bola fechada (centrada em a e de raio r)**.

Proposição 2.9. Todo espaço métrico X é um espaço topológico.

Demonstração. Considere

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : \text{para todo } a \in A \text{ existe } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tal que } B(a,r) \subset A\}.$$

Mostremos que $\mathcal{T}$ é uma topologia de X. Note que $X \in \mathcal{T}$, pois $B(x,r) \subset X$ para todo $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Temos também que $\emptyset \in \mathcal{T}$ por vacuidade, isto é, supondo que $\emptyset \notin \mathcal{T}$, teríamos então $x \in \emptyset$ tal que, para qualquer $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $B(x,r) \not\subset \emptyset$. Contradição, pois não existe $x \in \emptyset$. Se $A, B \in \mathcal{T}$ e $A \cap B = \emptyset$, acabamos. Caso contrário, tomando $x \in A \cap B$ qualquer, como $x \in A$, temos $r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B(x,r_1) \subset A$. Por outro lado, como $x \in B$, temos $r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B(x,r_2) \subset B$. Logo, se $r = \min\{r_1, r_2\}$, temos que $B(x,r) \subset A \cap B$. Finalmente, dados $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ e $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, temos que existe $A' \in \mathcal{A}$ de modo que $x \in A'$. Mas como $A' \in \mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, temos que $A' \in \mathcal{T}$ e, portanto, existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $B(x,r) \subset A'$. Assim, $B(x,r) \subset A' \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e o resultado segue. $\square$

Definição 2.10. A topologia definida na proposição anterior é chamada de **topologia induzida pela métrica**.

Definição 2.11. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Definindo $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como $d(x,y) = \|x - y\|$, temos que d é uma métrica em X e, portanto, X é um espaço métrico/topológico.

Definição 2.12. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que a função f é **contínua** se $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\} \in \mathcal{T}$ para todo $A \in \mathcal{T}'$. Ou seja, f é contínua se imagem inversa de aberto é aberto. Tomando agora $x \in X$, dizemos que f é **contínua em** x se para todo $A \in \mathcal{T}'$ tal que $f(x) \in A$ existir $B \in \mathcal{T}$ tal que $x \in B$ e $f(B) \subset A$. Além disso, se a f for bijetora e a sua inversa também for contínua, dizemos que f é um **homeomorfismo entre** X **e** Y.

Uma definição equivalente no caso de espaços métricos é a seguinte: se (X, d) e (Y, d') forem espaços métricos, dizemos que f é contínua em $x_0 \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$, se $d(x, x_0) < \delta$, então $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Definição 2.13. Sejam $\|\cdot\|_X$ e $|\cdot|_X$ duas normas de X. Dizemos que $\|\cdot\|_X$ é **equivalente a** $|\cdot|_X$ se existirem $a, b > 0$ tais que

$$a|x|_X \leq \|x\|_X \leq b|x|_X$$

para todo $x \in X$. Denotaremos tal equivalência por $\|\cdot\|_X \cong |\cdot|_X$.

Observação 2.14. Chamando de $\mathfrak{X}_X$ o conjunto de todas as normas de X, temos que a equivalência definida acima é uma relação de equivalência em tal conjunto.

Que $\|\cdot\|_X \cong \|\cdot\|_X$ é fácil ver, basta tomar $a = b = 1$. Temos então a reflexividade.

Agora mostremos que se $\|\cdot\|_X \cong |\cdot|_X$, então $|\cdot|_X \cong \|\cdot\|_X$. De fato, se $a, b > 0$ são como na definição da equivalência $\|\cdot\|_X \cong |\cdot|_X$, então $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} > 0$ e a seguinte desigualdade é válida para qualquer $x \in X$:

$$\frac{1}{b}\|x\|_X \leq |x|_X \leq \frac{1}{a}\|x\|_X.$$

Temos assim a simetria.

Finalmente, mostremos que se $\|\cdot\|_X^1 \cong \|\cdot\|_X^2$ e $\|\cdot\|_X^2 \cong \|\cdot\|_X^3$, então $\|\cdot\|_X^1 \cong \|\cdot\|_X^3$. Sejam $a, b > 0$ dados pela primeira equivalência e $c, d > 0$ dados pela segunda equivalência. Então

$$a\|\cdot\|_X^2 \leq \|\cdot\|_X^1 \leq b\|\cdot\|_X^2,$$

$$c\|\cdot\|_X^3 \leq \|\cdot\|_X^2 \leq d\|\cdot\|_X^3.$$

Como $a > 0$, a desigualdade de baixo não muda ao multiplicarmos por a e obtemos que $ac\|\cdot\|_X^3 \leq a\|\cdot\|_X^2 \leq \|\cdot\|_X^1$. Mas a desigualdade de baixo também não muda de sinal ao multiplicaros por b. Assim, obtemos a desigualdade $\|\cdot\|_X^1 \leq b\|\cdot\|_X^2 \leq bd\|\cdot\|_X^3$. Portanto, $ac, bd > 0$ e $ac\|\cdot\|_X^3 \leq \|\cdot\|_X^1 \leq bd\|\cdot\|_X^3$, como queríamos. Temos a transitividade e, portanto, a relação de equivalência.

Observação 2.15. A Proposição 1.8 nos mostra que as normas do máximo, euclidiana e da soma são equivalentes em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.16. Duas normas são equivalentes se, e somente se, induzem a mesma topologia. Ou seja, $\|\cdot\|_X \cong |\cdot|_X$ se, e somente se, $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_X} = \mathcal{T}_{|\cdot|_X}$.

Demonstração. Mostremos a ida. Dado $A \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_X}$, queremos mostrar que $A \in \mathcal{T}_{|\cdot|_X}$, isto é, que para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $\{y \in X : |y - x|_X < r\} \subset A$. Observe que sabemos que existe $s > 0$ tal que $\{y \in X : \|y - x\|_X < s\} \subset A$ e que, como as normas são equivalentes, existe $b > 0$ tal que $\|y - x\|_X \leq b|y - x|_X$. Assim, tomando $r = \frac{s}{b} > 0$, o resultado segue, pois se $y \in X$ é tal que $|y - x|_X < r$, então $\|y - x\|_X \leq b|y - x|_X < br = b\frac{s}{b} = s$ e isso implica que $y \in A$. A inclusão $\mathcal{T}_{|\cdot|_X} \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|_X}$ é análoga, basta usar que existe $a > 0$ tal que $a|y - x|_X \leq \|y - x\|_X$.

Façamos a volta. Como $B_{\|\cdot\|_X}(0, 1) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_X}$, então $B_{\|\cdot\|_X}(0, 1) \in \mathcal{T}_{|\cdot|_X}$ e, portanto, pela definição de topologia induzida pela norma, temos que existe $r > 0$ tal que $B_{|\cdot|_X}(0, r) \subset B_{\|\cdot\|_X}(0, 1)$. Agora observe que se $x \neq 0$, então $\frac{r}{2|x|_X}x \in B_{|\cdot|_X}(0, r)$ e, portanto, $\frac{r}{2|x|_X}x \in B_{\|\cdot\|_X}(0, 1)$. Assim, $\|x\|_X < \frac{2}{r}|x|_X$. Por outro lado, $B_{|\cdot|_X}(0, 1) \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_X}$ e, portanto, existe $s > 0$ tal que $B_{\|\cdot\|_X}(0, s) \subset B_{|\cdot|_X}(0, 1)$. Logo, tomando novamente $x \neq 0$, temos que $\frac{s}{2\|x\|_X}x \in B_{|\cdot|_X}(0, 1)$ e, portanto, $\frac{s}{2}|x|_X \leq \|x\|_X$. Temos o resultado, pois a desigualdade obviamente é válida para o caso em que $x = 0$. $\square$

Definição 2.17. Seja X um conjunto arbitrário. Dizemos que $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ é uma **cobertura de** X se $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

Definição 2.18. Se $(X, \mathcal{T})$ for um espaço topológico, dizemos que X é **compacto** se, e somente se, toda cobertura de X dada por abertos admitir subcobertura finita. Ou seja, se toda cobertura $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ admitir um subconjunto finito $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Observação 2.19. Se X é um espaço métrico, então X é compacto se, e somente se, toda sequência em X admitir uma subsequência convergente.

Definição 2.20. Seja X um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ uma base para tal espaço. Definimos então uma norma em X do seguinte modo: dado $x \in X$, sabemos que existem únicos $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tais que $x = a_1e_1 + \ldots + a_ke_k$. Assim, definimos $|\cdot|_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{R}$ como $|x|_{\mathcal{B}} = |\sum_{i=1}^{k} a_ie_i|_{\mathcal{B}} := \sum_{i=1}^{k} |a_i|$. A unicidade dos coeficientes nos garante que tal função está bem definida.

Lema 2.21. A função $|\cdot|_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. É uma norma;
2. É equivalente à norma $|\cdot|_{\infty}^{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{R}$ dada por $|x|_{\infty}^{\mathcal{B}} = |\sum_{i=1}^{k} a_ie_i|_{\infty}^{\mathcal{B}} := \max_{1 \leq i \leq k} |a_i|$;
3. O conjunto $B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}} := \{x \in X : |x|_{\mathcal{B}} \leq 1\}$ é compacto.

Demonstração. As demonstrações dos itens 1 e 2 são análogas às do $\mathbb{R}^n$. Verifiquemos então o terceiro item. Precisamos mostrar que, dada uma sequência (x_n) em $B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}}$, ela admite uma subsequência convergente e o limite de tal subsequência também está em $B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}}$. Como cada $x_n \in X$ e $\mathcal{B}$ é uma base de X, então existem $a_1^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)} \in \mathbb{K}$ tais que $x_n = a_1^{(n)}e_1 + \ldots + a_k^{(n)}e_k$. Ou seja, temos o seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & = & a_1^{(1)}e_1 & + & \ldots & + & a_k^{(1)}e_k \\
x_2 & = & a_1^{(2)}e_1 & + & \ldots & + & a_k^{(2)}e_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_n & = & a_1^{(n)}e_1 & + & \ldots & + & a_k^{(n)}e_k \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}.$$

Agora observe que, como $|x_n|_{\mathcal{B}} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, por definição, $\sum_{i=1}^{k} |a_i^{(n)}| \leq 1$. Logo, $|a_i^{(n)}| \leq 1$ para $i = 1, \ldots, k$ e $n \in \mathbb{N}$. Considerando então as sequências $(a_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, que são limitadas, segue, por Bolzano-Weierstrass, que tais sequências admitem subsequências convergentes. Assim, existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito e $a_1 \in \mathbb{K}$ tais que a sequência $(a_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge para a_1 em $\mathbb{K}$. Agora observe que $(a_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma subsequência de $(a_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ e, portanto, também é limitada. Assim, novamente por Bolzano-Weierstrass, existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito e $a_2 \in \mathbb{K}$ tais que a sequência $(a_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_2}$ converge para a_2 em $\mathbb{K}$. Repetindo o argumento até a k-ésima sequência $(a_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k-1}$ infinito e $a_k \in \mathbb{K}$ tais que $(a_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge para a_k em $\mathbb{K}$.

Finalmente, considerando $x = a_1e_1 + \ldots + a_ke_k$, temos que a subsequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge para x em X com a norma $|\cdot|_{\mathcal{B}}$. De fato, para cada $i = 1, \ldots, k$, temos que a sequência $(a_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_k}$ é uma subsequência de $(a_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_i}$, pois $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}_{k-1} \subset \ldots \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Portanto, como a sequência $(a_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_i}$ converge para a_i por definição, toda subsequência também convergirá, o que implica que

$$|x_n - x|_{\mathcal{B}} = \left|\sum_{i=1}^{k}(a_i^{(n)} - a_i)e_i\right|_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{k}|a_i^{(n)} - a_i| \xrightarrow[n\in\mathbb{N}_k]{\mathbb{K}} 0.$$

Ou seja, $x_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}_k]{|\cdot|_{\mathcal{B}}} x$, como queríamos. Observando agora que

$$|x|_{\mathcal{B}} \leq |x - x_n|_{\mathcal{B}} + |x_n|_{\mathcal{B}} \leq |x - x_n|_{\mathcal{B}} + 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}_k$, temos que $x \in B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}}$, pois $|x - x_n|_{\mathcal{B}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Segue o resultado. □

Teorema 2.22. Se $\dim(X) = k < \infty$, então quaisquer duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.

Demonstração. Como já vimos que a relação $\cong$ entre normas é uma relação de equivalência, basta mostrarmos que $\|\cdot\|_1 \cong |\cdot|_{\mathcal{B}}$, sendo $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ uma base qualquer fixada. Mas observe que se $\|\cdot\|_1$ é uma norma, então para todo $x \in X$ temos que

$$\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\right\|_1 \leq \sum_{i=1}^{k}|a_i|\|e_i\|_1 \leq b\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) = b|x|_{\mathcal{B}},$$

sendo $b := \max_{1\leq i\leq k}\|e_i\|_1$. Temos então uma parte da desigualdade desejada, resta verificar que existe $a > 0$ tal que $a|x|_{\mathcal{B}} \leq \|x\|_1$ para todo $x \in X$. Suponha então que não existe tal $a > 0$. Deste modo, temos uma sequência (x_n) tal que $\frac{1}{n}|x_n|_{\mathcal{B}} > \|x_n\|_1 \geq 0$. Definindo agora a sequência (u_n), onde $u_n := \frac{x_n}{|x_n|_{\mathcal{B}}}$, temos que $\frac{1}{n} > \|u_n\|_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e isso mais o lema anterior implicam o seguinte:

1. $u_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{\|\cdot\|_1} 0$;

2. Existe uma subsequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ e $u \in X$ tais que $|u|_{\mathcal{B}} \leq 1$ e $u_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}']{|\cdot|_{\mathcal{B}}} u$.

Mas observe que, como cada u_n é tal que $|u_n|_{\mathcal{B}} = 1$, então $|u|_{\mathcal{B}} = 1$. De fato, se $|u|_{\mathcal{B}} < 1$, então tomando $\varepsilon = 1 - |u|_{\mathcal{B}} > 0$, temos que existe $n \in \mathbb{N}'$ tal que $|u - u_n|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$. Mas $|u_n|_{\mathcal{B}} - |u|_{\mathcal{B}} \leq |u - u_n|_{\mathcal{B}} < \varepsilon = 1 - |u|_{\mathcal{B}}$. Logo, isso implica que $|u_n|_{\mathcal{B}} < 1$, o que é uma contradição, pois $|u_n|_{\mathcal{B}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando agora que $u_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{\|\cdot\|_1} 0$, temos que, em particular, $u_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}']{\|\cdot\|_1} 0$. Por outro lado, $\|u_n - u\|_1 \leq b|u_n - u|_{\mathcal{B}}$. Fazendo então $\mathbb{N}' \ni n \to \infty$, obtemos que $u_n \xrightarrow[n\in\mathbb{N}']{\|\cdot\|_1} u$. Contradição, pois isso implicaria que $u = 0$, mas sabemos que $|u|_{\mathcal{B}} = 1$. Segue o resultado. □

Corolário 2.23. Se $\dim(X) < \infty$, então qualquer norma induz a mesma topologia.

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior e do Teorema 2.16. □

Corolário 2.24. Se $\dim(X) < \infty$, então $K \subset X$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

Demonstração. A ida vale em qualquer espaço métrico, então mostremos a volta. Como K é limitado, existe $r > 0$ tal que $K \subset B[0;r]$, sendo $B[0;r] := \{x \in X : |x|_{\mathcal{B}} \leq r\}$. Considerando então $T_r : X \to X$ dada por $T_r(x) = rx$, segue que $|T_r(x) - T_r(y)|_{\mathcal{B}} = |rx - ry|_{\mathcal{B}} = r|x - y|_{\mathcal{B}}$. Ou seja, T_r é Lipschitz e, portanto, contínua em $(X, |\cdot|_{\mathcal{B}})$. Usando mais uma vez que $B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}}$ é compacta, obtemos que $B[0;r]$ é compacta, pois $T_r(B_{|\cdot|_{\mathcal{B}}}) = B[0;r]$ e é sabido que imagem de compacto por função contínua é compacto. Finalmente, como K é fechado e $K \subset B[0;r]$, segue que K é compacto. Temos o desejado. □

3 Compacidade e Dimensão II

Se $\dim(X) = \infty$, as condições "fechado e limitado" podem não implicar compacidade. De fato, considere $X = \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, que já sabemos ter dimensão infinita pela Observação 1.23. Tome a sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\ell^p(\mathbb{N})$ dada por $e_n = (\delta_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ e observe que $\|e_n\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_{nj}|^p = |\delta_{nn}|^p = 1$. Logo, $\|e_n\|_p = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixando agora $(z_m) \in \ell^p(\mathbb{N})$, observe que

$$\|e_n - (z_m)\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\delta_{ni} - z_i|^p = |1 - z_n|^p + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq n}}^{\infty} |z_i|^p \geq |1 - z_n|^p.$$

Mas, como $z_m \to 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_m| \leq \frac{1}{2}$ para todo $m \geq m_0$. Portanto, se $m \geq m_0$,

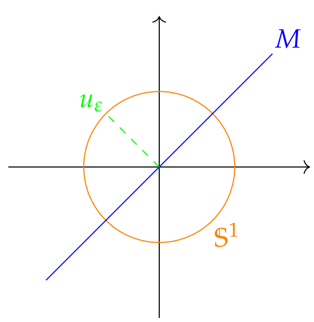
$$\|e_n - (z_m)\|_p \geq |1 - z_n| \geq |1| - |z_n| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

e com isso concluímos que não existe subsequência convergente da sequência $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ou seja, tomamos uma sequência na bola fechada e unitária em $\ell^p(\mathbb{N})$, que é um conjunto fechado e limitado, e mostramos que tal sequência não admite subsequência convergente, o que implica que tal bola não é compacta (Observação 2.19).

Lema 3.1 (Riesz)**.** Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $M \subsetneq X$ um subespaço próprio e fechado de X. Então, para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe $u_\varepsilon \in X \setminus M$ tal que

1. $\|u_\varepsilon\| = 1$;
2. $d(u_\varepsilon, M) = \inf_{m\in M} \|u_\varepsilon - m\| \geq \varepsilon$.

Demonstração. O desenho a seguir ilustra o resultado:



Passemos agora à demonstração em si. Dado $u \in X \setminus M$, que existe pois M é próprio, temos que $d := d(u, M) := \inf_{m\in M} \|u - m\| > 0$, pois M é fechado. Agora observe que $d < \frac{d}{\varepsilon}$ e, portanto, existe $m_\varepsilon \in M$ tal que $\|u - m_\varepsilon\| < \frac{d}{\varepsilon}$ pela definição de ínfimo. Definindo então $u_\varepsilon := \frac{u - m_\varepsilon}{\|u - m_\varepsilon\|}$, temos que tal vetor é o desejado. De fato, primeiramente observe que se $u_\varepsilon \in M$, então $u_\varepsilon = \frac{u - m_\varepsilon}{\|u - m_\varepsilon\|} =$

m para algum $m \in M$. Mas isso implicaria que $u = m_\varepsilon + m\|u - m_\varepsilon\| \in M$, já que M é subespaço. Contradição, então de fato $u_\varepsilon \in X \setminus M$. Que $\|u_\varepsilon\| = 1$ é claro, resta assim verificar a segunda propriedade. Dado $m \in M$, temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - m\| &= \left\| \frac{u - m_\varepsilon}{\|u - m_\varepsilon\|} - m \right\| \\
&= \frac{1}{\|u - m_\varepsilon\|} \|u - \underbrace{m_\varepsilon - m\|u - m_\varepsilon\|}_{\in M} \| \\
&\geq \frac{d}{\|u - m_\varepsilon\|} > \frac{d}{\frac{d}{\varepsilon}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\|u_\varepsilon - m\| > \varepsilon$ para todo $m \in M$, o que implica que $d(u_\varepsilon, M) \geq \varepsilon$, como queríamos. $\square$

Definição 3.2. Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $n, m \geq n_0$, tivermos que $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$. Usualmente denotaremos que a sequência é de Cauchy da seguinte forma: $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$.

Observação 3.3. As sequências de Cauchy satisfazem as seguintes propriedades:

1. Toda sequência de Cauchy é limitada.
2. Toda sequência convergente é de Cauchy.
3. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ é uma subsequência que converge para algum $a \in X$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para a.
4. Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ converge.

Lema 3.4. Se $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço normado, então todo subespaço $M \subset X$ tal que $\dim(M) < \infty$ é um subconjunto fechado de X.

Demonstração. Precisamos verificar que se existe uma sequência (x_n) em M tal que x_n converge para algum $x \in X$, então na verdade $x \in M$.

Para tal, primeiramente observe que, pelo segundo item da observação anterior, sabemos que a sequência é de Cauchy. Observe também que se considerarmos a restrição da norma em M, isto é, considerarmos a função $\|\cdot\|_X|_M : M \to \mathbb{R}$, ela será uma norma em M. Considere agora $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_k\}$ uma base de M e $|\cdot|_{\mathcal{B}}$ a norma induzida por esta base. Como já vimos, $\|\cdot\|_X|_M \cong |\cdot|_{\mathcal{B}}$. Deste modo, ao escrevermos $x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(n)} e_i$, teremos que

$$\sum_{i=1}^k \left| \alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)} \right| = |x_n - x_m|_{\mathcal{B}} \leq b\|x_n - x_m\|_X \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Consequentemente, para $i = 1, \ldots, k$, a sequência $(\alpha_i^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, e, portanto, pelo último item da observação anterior, sabemos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{K}} \alpha_i$.

Finalmente, considerando $u := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in M$, temos que

$$a\|x_n - u\|_X \leq |x_n - u|_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e isso implica que $\|x_n - u\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Portanto, como $\|x_n - x\|_X \to 0$ e $\|x_n - u\|_X \to 0$, pela unicidade do limite segue que $x = u \in M$, como queríamos. $\square$

Teorema 3.5 (de Riesz)**.** Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado e $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$. Então B_X é compacta se, e somente se, $\dim(X) < \infty$.

Demonstração. A volta é o terceiro item do Lema 2.21. Façamos então a ida.

Considere $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\|_X = 1$ e defina $M_1 := [x_1] := \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Como $\dim(M_1) = 1$ e $\dim(X) = \infty$, temos que $M_1 \neq X$ e que M_1 é fechado (lema anterior). Portanto, se $\varepsilon = \frac{1}{2}$, o Lema de Riesz nos garante que existe $x_2 \in X \setminus M_1$ tal que $\|x_2\|_X = 1$ e $d(x_2, M_1) \geq \frac{1}{2}$, o que implica que $d(x_2, d_1) = \|x_2 - x_1\|_X \geq \frac{1}{2}$. Assim, defina $M_2 := [x_1, x_2] := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$ e novamente observe que $M_2 \neq X$ e que M_2 é fechado. Utilizando mais uma vez o Lema de Riesz, segue que existe $x_3 \in X \setminus M_2$ tal que $\|x_3\|_X = 1$ e $d(x_3, M_2) \geq \frac{1}{2}$. Agora observe que $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ e $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Finalmente, procedendo por indução, conseguimos construir uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \in X \setminus M_{n-1}$, $\|x_n\|_X = 1$, $d(x_n, M_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ e $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ sempre que $n > m$. Ou seja, temos uma sequência (x_n) em B_X tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \neq m$, o que implica que tal sequência não admite subsequência de Cauchy e, portanto, também não possui subsequência convergente. Assim, B_X não é compacta pela Observação 2.19 e temos o resultado, pois demonstramos que se $\dim(X) = \infty$, então B_X não pode ser compacta. $\square$

4 Operadores Lineares

Definição 4.1. Sejam X e Y espaços vetoriais definidos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : X \to Y$ é chamada de **operador linear** (ou **transformação linear** ou **aplicação linear**) se ela satisfizer a seguinte propriedade: dados $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ quaisquer, então $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$.

Usualmente denotaremos $T(x)$ apenas por Tx.

Observação 4.2.

1. Se X e Y são espaços vetoriais, então sempre existe um operador entre tais espaços, chamado de **operador nulo**. Denotamos tal operador por $0 : X \to Y$ e ele é definido como $0(x) = 0_Y$, sendo 0_Y o vetor nulo de Y.

2. Quando $X = Y$, podemos definir o **operador identidade** como sendo a própria função identidade, que denotaremos por I_x ou apenas I, quando X estiver claro.

3. Denotaremos o espaço dos operadores lineares de X em Y por $\mathcal{L}(X, Y)$ e, quando $X = Y$, apenas por $\mathcal{L}(X)$. Observe que tal espaço admite estrutura de espaço vetorial. De fato, dados $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos a soma $T + S : X \to Y$ como sendo o operador $(T + S)(x) := T(x) + S(x)$, e definimos a multiplicação de T por um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ como sendo o operador $\lambda T : X \to Y$ definido por $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$

4. Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos três subespaços importantes associados a tal operador.

   (a) O **núcleo de** T: $\mathcal{N}(T) := T^{-1}(0) = \{x \in X : T(x) = 0\}$.

   (b) A **imagem de** T: $\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : y = T(x) \text{ para algum } x \in X\}$.

   (c) O **gráfico de** T: $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$. Observe que de fato o gráfico é um subespaço de $X \times Y$, pois $(x, Tx) + (y, Ty) = (x + y, Tx + Ty) = (x + y, T(x + y))$ e $\lambda(x, Tx) = (\lambda x, \lambda Tx) = (\lambda x, T(\lambda x))$, já que T é um operador.

Exemplo 4.3. Sabemos da Álgebra Linear que se tomarmos $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$, tal matriz define um operador de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ dado por

$$Ax := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.4. Seja $X = Y = C^\infty([0,1]) = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} : \varphi \text{ é infinitamente diferenciável}\}$. Um operador linear de $C^\infty([0,1])$ em $C^\infty([0,1])$ extremamente importante é o **operador derivação**, que é dado por:

$$T : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$$
$$\varphi \mapsto T\varphi := \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$$

Exemplo 4.5. Considerando novamente $X = Y = C^\infty([0,1])$, temos mais um operador muito importante, que é o **operador de Laplace** (de dimensão 1). Tal operador é definido como:

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty([0,1]) &\to C^\infty([0,1]) \\ \varphi &\mapsto \Delta\varphi := \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi'' \end{aligned}$$

Exemplo 4.6. Seja $X = C([0,1])$, $Y = \mathbb{C}$ e $f : C([0,1]) \to \mathbb{C}$ dada por $f(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x)dx$. Usualmente denotaremos $f(\varphi)$ por $\langle f, \varphi \rangle$.

Definição 4.7. Fixados dois espaços normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ é um **operador limitado** se ele leva conjuntos limitados de X em conjuntos limitados de Y. Ou seja, dado $E \subset X$ limitado, temos que $T(E) \subset Y$ é também limitado.

Denotaremos o conjunto de todos os operadores limitados de X em Y por $\mathcal{B}(X,Y)$ e, quando $X = Y$, apenas por $\mathcal{B}(X)$.

Observação 4.8. A definição de operador limitado não implica que a imagem do operador será limitada a menos que $T \equiv 0$. De fato, se $T \not\equiv 0$, então existe $x \in X$ tal que $T(x) \neq 0$ e, portanto,

$$\|T(\lambda x)\|_Y = \|\lambda T x\|_Y = |\lambda| \underbrace{\|Tx\|_Y}_{>0} \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} \infty.$$

Logo, $\mathcal{R}(T)$ é ilimitada.

Lema 4.9. Dado $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ se, e somente se, existir $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Mostremos a ida. Seja $B_X[0,1]$ a bola em X centrada na origem e de raio 1. Como T é limitado, temos que $T(B_x[0,1]) \subset Y$ é limitado. Logo, existe $C > 0$ tal que $T(B_X[0,1]) \subset B_X[0,C]$. Mostremos que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$. De fato, se $x = 0$, então a desigualdade é trivialmente válida, pois $T0 = 0$. Caso contrário, note que $\frac{x}{\|x\|_X} \in B[0,1]$ e, portanto,

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y \leq C,$$

como queríamos.

Para ver a volta, considere $E \subset X$ limitado. Então, por definição, existe $r > 0$ tal que $E \subset B_X[0,r]$. Mas se isso acontece, então $T(E) \subset B_Y[0,Cr]$ e, portanto, $T(E)$ é limitado. Para ver tal inclusão, observe que, dado $Tx \in T(E)$, temos que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\| \leq Cr$. Segue o resultado. $\square$

Exemplo 4.10. Dado $1 \leq p < \infty$, considere $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ o operador dado por $T(z_1, z_2, z_3, \ldots) := (z_2, z_3, \ldots)$. Claramente $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ e, além disso, observe que

$$\|T((z_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_p^p = \sum_{i=2}^{\infty} |z_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p = \|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p.$$

Logo, $T \in \mathcal{B}(\ell^p)$, pois podemos tomar $C = 1$ no lema anterior.

Exemplo 4.11. Considere $X = C([a,b])$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ e $T : X \to X$ dado por

$$T\varphi(t) := \int_a^t \varphi(x)dx, \ t \in [a,b].$$

Não é muito difícil ver que tal operador é linear e, além disso, observe que

$$\begin{aligned} |T\varphi(t)| &= \left|\int_a^t \varphi(x)dx\right| \\ &\leq \int_a^t \underbrace{|\varphi(x)|}_{\geq 0} dx \\ &\leq \int_a^b |\varphi(x)|dx \\ &\leq \int_a^b \|\varphi\|_\infty dx \\ &= \|\varphi\|_\infty (b-a). \end{aligned}$$

Logo, para todo $t \in [a,b]$, temos que $|T\varphi(t)| \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$ e isso implica que $\|T\varphi\|_\infty \leq (b-a)\|\varphi\|_\infty$. Como φ também foi escolhido arbitrariamente, segue que $T \in \mathcal{B}(C([a,b]))$.

Exemplo 4.12 (Contraexemplo)**.** Considere $X = C^1([0,1])$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ e seja T o operador derivação. Temos então que T **não** é limitado. De fato, dado $E = \{\varphi_n(x) = x^n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$, observe que $\|\varphi_n\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1}|x^n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, E é limitado, mas $T(E)$ não é, pois $T\varphi_n = \varphi_n' = nx^{n-1}$ e isso implica que

$$\|T\varphi_n\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1} |nx^{n-1}| = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ou seja, T não é um operador limitado se considerarmos a norma $\|\cdot\|_\infty$ no domínio.

Exemplo 4.13. No exemplo anterior, se considerarmos a norma $\|\varphi\|_{C^1} := \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty$ no domínio, então o operador se torna limitado, pois

$$\|T\varphi\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_{C^1}.$$

Observação 4.14. Se $\|\cdot\|_1 \cong \|\cdot\|_2$ em X e $|\cdot|_1 \cong |\cdot|_2$ em Y, então $T \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1);(Y, |\cdot|_1))$ se, e somente se, $T \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_2);(Y, |\cdot|_2))$.

Teorema 4.15. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e suponha que $\dim(X) < \infty$. Então $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y)$.

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, pois a outra inclusão é válida por definição. Fixe então uma base $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ de X. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $x \in X$, então $x = \sum_{i=1}^k a_i e_i$ e temos que

$$\|Tx\|_Y = \left\| T\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right)\right\|_Y = \left\|\sum_{i=1}^k a_i Te_i\right\|_Y \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|Te_i\|_Y \leq M \sum_{i=1}^k |a_i| = M|x|_B,$$

onde $M = \max_{1 \leq i \leq k} \|Te_i\|_Y$. Portanto, $\|Tx\|_Y \leq M|x|_B \leq Mb\|x\|_X$ para todo $x \in X$ e o resultado segue. □

Teorema 4.16. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Temos então as seguintes equivalências:

1. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$;

2. T é uma função (uniformemente) contínua;

3. T é contínua na origem.

Demonstração. Para ver que 1 implica 2, basta observar que existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Logo, tomando $x, y \in X$ quaisquer, temos que $\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq C\|x-y\|_X$ e, portanto, T é uniformemente contínua, pois basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Que 2 implica 3 é óbvio. Mostremos agora que 3 implica 1.

Tomando $\varepsilon = 1$, temos $\delta > 0$ tal que, se $\|x\|_X = \|x - 0\|_X < \delta$, então $\|Tx - T0\|_Y < 1$. Portanto, se $x \neq 0$, segue que $\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \in B_X(0,\delta)$ e isso implica que

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x\right)\right\|_Y = \frac{\delta}{2\|x\|_X}\|Tx\|_Y < 1.$$

Logo, $\|Tx\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ para todo $x \neq 0$ e a desigualdade $\|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ é trivialmente válida quando $x = 0$. Segue o resultado. □

Corolário 4.17. Dado $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, temos:

1. Se $x_n \to x$, então $Tx_n \to Tx$;

2. $\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{0\})$ é um subespaço fechado de X;

3. T preserva sequências de Cauchy, isto é, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X, então (Tx_n) é uma sequência de Cauchy em Y.

Demonstração. 1. Dado $\varepsilon > 0$, queremos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n \geq n_0$, então $\|Tx_n - Tx\|_Y < \varepsilon$. Mas note que, como T é contínua em x, então para tal $\varepsilon > 0$ temos $\delta > 0$ tal que, se $\|y - x\|_X < \delta$, então $\|Ty - Tx\|_Y < \varepsilon$. Lembre-se também que $x_n \to x$. Logo, para tal $\delta > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_1$, então $\|x_n - x\|_X < \delta$. Portanto, tomando $n_1 = n_0$ o resultado segue.

2. Se T é contínua, então imagem inversa de fechado é fechado e $\{0\}$ é fechado em Y.

3. Note que existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ e (x_n) de Cauchy, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, se $n, m \geq n_0$, então $\|x_n - x_m\|_X < \frac{\varepsilon}{C}$. O resultado segue com tal n_0 pois, para $n, m \geq n_0$, teremos $\|Tx_n - Tx_m\|_Y \leq C\|x_n - x_m\|_Y < \varepsilon$.

$\square$

Observação 4.18. $\mathcal{B}(X, Y)$ na verdade é um subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$. De fato, note que, se tomarmos $S, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então existem $C_1, C_2 > 0$ tais que, para qualquer $x \in X$, a seguinte desigualdade é válida:

$$\begin{aligned}
\|(S + \lambda T)x\|_Y &= \|Sx + \lambda Tx\|_Y \\
&\leq \|Sx\|_Y + |\lambda|\|Tx\|_Y \\
&\leq C_1\|x\|_Y + |\lambda|C_2\|x\|_Y \\
&= (C_1 + |\lambda|C_2)\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Usando agora o Lema 4.9, temos o desejado, pois mostramos que soma de operadores limitados é limitado e produto de operador limitado por um escalar também é limitado.

Definição 4.19. Se $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, definimos a **norma uniforme de** T (ou **norma operador** ou **norma operador uniforme**) como:

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Observe que de graça já ganhamos que $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|x\|_X$ para todo $x \in X$. No entanto, precisamos verificar que tal norma está bem definida, isto é, que tal sup de fato existe. Mas isto ocorre, pois $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ e isso implica que existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Assim, $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq C$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$ e, definindo

$$A_T := \left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\} \right\},$$

temos que $A_T \neq \emptyset$ e que A_T é limitado superiormente por C. Logo, pelas propriedades da reta, existe o supremo.

Observação 4.20. Não é muito difícil ver que a norma definida anteriormente é de fato uma norma. Agora observe que

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

De fato, como

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$$

para todo $x \in X \setminus \{0\}$, então tal desigualdade vale, em particular, para $x \in X$ tal que $\|x\|_X = 1$. Assim, tomando o sup do lado esquerdo, temos uma das desigualdades desejadas. Por outro lado,

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq \sup_{\|z\|_X = 1} \|Tz\|_Y$$

e, portanto, temos a outra desigualdade, o que implica o desejado.

Lema 4.21. Dados X, Y e Z espaços normados, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, então $S \circ T \in \mathcal{B}(X,Z)$ e vale a seguinte desigualdade:

$$\|S \circ T\|_{\mathcal{B}(X,Z)} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,Z)} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}.$$

Demonstração. Como $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, então existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $\|Tx\|_Y \leq C_1 \|x\|_X$ para todo $x \in X$ e $\|Sy\|_Z \leq C_2 \|y\|_Y$ para todo $y \in Y$. Assim, $C_2 C_1 > 0$ e temos que $\|S(Tx)\|_Z \leq C_2 \|Tx\|_Y \leq C_2 C_1 \|x\|_X$, como queríamos. Segue que $S \circ T \in \mathcal{B}(X,Z)$. Mostremos agora que vale a desigualdade desejada. Note que $\|S(Tx)\|_Z \leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,Z)} \|Tx\|_Y \leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,Z)} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$ para todo $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$. Portanto, pela observação anterior, ao tomarmos o sup apenas nos $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ nos dá o desejado. $\square$

Corolário 4.22. $\mathcal{B}(X)$ é fechado por composição e, além disso, observe que, se $T \in \mathcal{B}(X)$, então $\|T^2\| \leq \|T\|\|T\| = \|T\|^2$. Aplicando agora o mesmo raciocínio para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ e isso implica que $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$. Portanto, tomando o lim sup, temos o seguinte:

$$\limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

Observação 4.23. Dada $(a_n) \in \mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, podemos considerar o lim sup dessa sequência e definimos $R \in [0, \infty]$ de modo que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Quando $R > 0$, a série de potências $\sum a_n \lambda^n$ é convergente para qualquer $\lambda \in B(0,R)$. Logo, podemos definir $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ como $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$. Além disso, dado $K \subset B(0,R)$ compacto, a série $\sum a_n \lambda^n$ converge uniformemente para f em K. Chamamos então a série $\sum a_n \lambda^n$ de **série de Taylor da** f.

Com tal analogia em mente e levando em conta o último corolário, podemos considerar $T \in \mathcal{B}(X)$, sendo X Banach (ver próxima seção), e definir

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|_{\mathcal{B}(X)}^{\frac{1}{n}}.$$

Novamente teremos que, se $R > 0$ e $\lambda \in B(0,R)$, então a série de operadores $\sum T^n \lambda^n$ ($T^0 = I_X$) será convergente em $\mathcal{B}(X)$. Logo, podemos definir $f : B(0,R) \to \mathcal{B}(X)$ como $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n$.

5 Espaços de Banach

Definição 5.1. Um espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado de **espaço de Banach** se ele for completo com a métrica induzida pela norma. Ou seja, se toda sequência de Cauchy em X convergir para algum $x \in X$.

Definição 5.2. Seja (x_n) uma sequência em $(X, \|\cdot\|_X)$. Podemos então definir uma nova sequência (s_n) em X dada por:

$$\begin{aligned}
s_1 &= x_1 \\
s_2 &= x_1 + x_2 \\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
&\vdots \\
s_n &= x_1 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.
\end{aligned}$$

Chamamos tal sequência de **série (com termo geral x_n)** ou **sequência das somas parciais de x_n** e a denotamos por $\sum x_n$.

Definição 5.3. Se $\sum x_n$ é uma série em $(X, \|\cdot\|_X)$, então dizemos que ela é:

1. **Convergente**, se existir $s \in X$ tal que $s_n \to s$. Ou seja, $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_X = 0$. Além disso, dizemos que s é a **soma da série** e escrevemos
$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

2. **Absolutamente convergente**, se a série de números $\sum \|x_n\|_X$ convergir em $\mathbb{R}$.

Observação 5.4. Vale observar que $\sum x_n$ não é o mesmo que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. No primeiro caso estamos apenas reescrevendo a sequência (s_n) e, no segundo, estamos assumindo implicitamente que a série converge e considerando o limite da sequência $\sum x_n$. Ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ representa um vetor e $\sum x_n$ representa uma sequência.

Teorema 5.5. Dado $(X, \|\cdot\|_X)$ espaço normado, temos a seguinte equivalência:

1. $(X, \|\cdot\|_X)$ é Banach;

2. Toda série $\sum x_n$ em X que converge absolutamente na verdade é convergente em X.

$1 \implies 2$. Seja $\sum x_n$ uma série que converge absolutamente e defina $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$. Tomando então $m > n$, temos que

$$\begin{aligned}
\|s_m - s_n\|_X &= \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right\|_X \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|_X \\
&= \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_X - \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X.
\end{aligned}$$

Assim, chamando $\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|_X$ de t_k, temos que $\|s_m - s_n\|_X \leq t_m - t_n$. Usando agora a hipótese de que (t_k) é convergente, isso implica que ela é de Cauchy, como já é sabido do Cálculo. Logo, isso implica que a sequência (s_k) também é de Cauchy e, como X é Banach por hipótese, tal sequência converge para algum $s \in X$, como queríamos. $\square$

$2 \implies 1$. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X. Considerando a sequência $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, podemos escolher $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq n_1$, então $\|x_m - x_n\|_X < \varepsilon_1$. Usando repetidas vezes a hipótese de que a sequência é de Cauchy, podemos então tomar $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_2 > n_1$ tal que, se $m, n \geq n_k$, então $\|x_m - x_n\|_X < \frac{1}{2^k}$. Assim, em particular, $\|x_{n_{(j+1)}} - x_{n_j}\|_X < \frac{1}{2^j}$. Definindo a sequência (y_k) como $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, observe que tal sequência satisfaz o seguinte:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \ldots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}.$$

Além disso, como $\|y_k\|_X = \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_X < \frac{1}{2^k}$, segue que a série $\sum \|y_k\|_X$ é convergente e, portanto, a série $\sum y_k$ é absolutamente convergente. Usando agora a hipótese, existe $y \in X$ tal que $\| \sum_{i=1}^{k} y_i - y\|_X \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ou seja,

$$\|x_{n_{k+1}} - (y + x_{n_1})\|_X \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, portanto, $x_{n_{k+1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y + x_{n_1}$. Mas então encontramos uma subsequência de (x_n) que converge em X. Como (x_n) é de Cauchy, então na verdade a sequência toda convergirá para $y + x_{n_1}$. Segue o resultado. $\square$

Exemplo 5.6. Se $\dim(X) < \infty$, então X é Banach (em qualquer norma, pois as normas neste caso são todas equivalentes). De fato, dada uma sequência (x_n), temos que o conjunto $K := \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ é compacto, pois é fechado e limitado e estamos em dimensão finita. Logo, (x_n) possui subsequência convergente, mas como é de Cauchy, isso implica que a sequência original também converge. Temos o desejado.

Exemplo 5.7. Se M é um subespaço fechado de X e X é um espaço de Banach, então M com a norma induzida/restrita é também de Banach. De fato, dada uma sequência (x_n) de Cauchy em M, segue que ela é de Cauchy em X. Usando agora que X é Banach, tal sequência converge para algum $x \in X$. Mas por hipótese M é fechado, logo, contém todos os limites de suas sequências, o que implica que $x \in M$ e, portanto, temos o resultado.

Teorema 5.8. Dado $1 \leq p < \infty$, temos que $\ell^p(\mathbb{N})$ é Banach.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ^p e escreva $x_n = (z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots)$. Tomando então $\varepsilon > 0$, podemos considerar $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que, se $m, n \geq n_\varepsilon$, então $\|x_n - x_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Mas observe que isso é o mesmo que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$ e isso implica que, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e quaisquer $n, m \geq n_\varepsilon$, $\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$. Notemos agora que tais desigualdades possuem duas consequências:

1. Fixado $j_0 \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(z_{j_0}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$, pois, para $n, m \geq n_\varepsilon$, o seguinte é válido:

$$\left|z_{j_0}^{(n)} - z_{j_0}^{(m)}\right|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left|z_i^{(n)} - z_i^{(m)}\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}.$$

   Ou seja, $\left|z_{j_0}^{(n)} - z_{j_0}^{(m)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo, como tal sequência vive em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é completo, existe $z_{j_0} \in \mathbb{C}$ tal que $z_{j_0}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{C}} z_{j_0}$.

2. Fixado $k \in \mathbb{N}$ e tomando $m, n \geq n_\varepsilon$, temos que $\sum_{i=1}^{k} \left|z_j^{(n)} - z_j^{(m)}\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}$. Portanto, se mantivermos $m \geq n_\varepsilon$ fixo e fizermos $n \to \infty$, obtemos que $\sum_{i=1}^{k} \left|z_j - z_j^{(m)}\right|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p}$. Logo, a sequência $\left(z_j - z_j^{(m)}\right)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$, pois tomamos $k \in \mathbb{N}$ arbitrário.

Finalmente, defina $x = (z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e observe que $x \in \ell^p$, pois $x = (x - x_m) + x_m = \left(z_j - z_j^{(m)}\right)_{j \in \mathbb{N}} + \left(z_j^{(m)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$. Isto é, x é soma de elementos em ℓ^p. E, por último, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\ell^p} x$, pois, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \left|z_i - z_i^{(m)}\right|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p}$ para todo $m \geq n_\varepsilon$ (segundo item anterior). Mas tal desigualdade é o mesmo que dizer que $\|x - x_m\|_p^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p} < \varepsilon^p$ e, portanto, $\|x - x_m\|_p < \varepsilon$, como queríamos. $\square$

Teorema 5.9. Dados X e Y espaços normados com Y Banach, temos que o espaço $\mathcal{B}(X, Y)$ também é Banach.

Demonstração. Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(X,Y)$. Dado $\delta > 0$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, se $m,n \geq n_\delta$, então $\|T_n - T_m\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \delta$. Logo, ao fixarmos $x \in X \setminus \{0\}$, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m,n \geq n_\varepsilon$, então $\|T_n x - T_m x\|_Y < \varepsilon$. Ou seja, a sequência $(T_n x)$ é de Cauchy em Y. Usando agora que Y é Banach, segue que existe $y \in Y$ tal que $T_n x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Portanto, defina $T : X \to Y$ como $T(0) = 0$ e $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n x$.

Observe que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pelas propriedades de limite, isto é, limite da soma é a soma dos limites e o produto por escalar sai do limite. Verifiquemos agora que na verdade $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. De fato, como toda sequência de Cauchy é limitada, isso implica que existe $M > 0$ tal que $\|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\frac{\|T_n x\|_X}{\|x\|_X} \leq \|T_n\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq M$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Logo, sabemos que $\|T_n x\|_Y \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Assim, fixado $x \in X$, temos que

$$\|Tx\|_Y = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \leq M\|x\|_X$$

e isso implica o desejado, isto é, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Finalmente, mostremos que $T_n \to T$. De fato, note que a sequência (T_n) ser de Cauchy é equivalente ao fato de que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $m,n \geq n_\varepsilon$ e $x \in X$, então $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_Y$. Assim, ao fixarmos $x \in X$ e $n \geq n_\varepsilon$, podemos fazer $m \to \infty$ e obtemos que $\|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X$. Agora observe que esta última desigualdade é equivalente ao fato de que $\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \varepsilon$, o que implica o desejado. $\square$

Corolário 5.10. Se $\dim(Y) < \infty$, então $\mathcal{B}(X,Y)$ é Banach. Logo, temos que $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ é Banach, sendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$.

Definição 5.11. Seja X espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Denotamos por X^* o espaço vetorial $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ e chamamos tal espaço de **dual algébrico de** X. Os elementos de X^* são chamados de **funcionais lineares de** X.

O espaço $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ será denotado por X' e chamaremos tal espaço de **dual topológico de** X. Os elementos de X' serão chamados de **funcionais lineares contínuos de** X. Note que $X' \subset X^*$.

Observação 5.12. Se $f \in X'$ e $x \in X$, denotaremos $f(x)$ por $\langle f, x\rangle$.

Observação 5.13. Se $\dim(X) < \infty$, então $X^* = X'$, basta recordar do Teorema 4.15.

Observação 5.14. X' é sempre Banach e, dado $f \in X'$, temos que $\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle f, x\rangle|$.

Exemplo 5.15. Seja $X = \mathbb{R}^n$ e, para $k = 1, \ldots, n$, considere $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $\langle f_k, x\rangle = \langle f_k, (x_1, \ldots, x_n)\rangle = x_k$. Não é muito difícil ver que f_k é linear e, além disso, note que $|\langle f_k, x\rangle| = |x_k| \leq \|x\|$. Logo, $\|f_k\|_{(\mathbb{R}^n)'} \leq 1$. No entanto, a igualdade é válida, pois tomando $x = e_1$, por exemplo, temos que $\|x\| = 1$ e $\langle f_k, x\rangle = 1$. Assim, $\sup_{\|x\|=1} |\langle f_k, x\rangle| = 1$.

Exemplo 5.16. Seja $X = (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ e considere $f : X \to \mathbb{C}$ dada por $\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(x)dx$. Note que

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_a^b \varphi(x)dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|dx \leq \int_a^b \|\varphi\|_\infty dx = (b-a)\|\varphi\|_\infty$$

para qualquer $\varphi \in X$. Logo, $\|f\|_{X'} \leq b-a$. Mas observe que $\varphi \equiv 1$ é tal que $\|\varphi\|_\infty = 1$ e $\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b 1dx = b-a$. Assim, $\|f\|_{X'} = b-a$.

Exemplo 5.17. Dados $1 \leq p \leq \infty$ e $z = (z_n) \in \ell^{p'}(\mathbb{N})$, onde p' é o expoente conjugado de p, defina $f_z : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ como $\langle f_z, (x_n) \rangle = \sum_{i=1}^\infty z_i x_i$. Observe agora que

$$|\langle f_z, (x_n) \rangle| \leq \sum_{i=1}^\infty |z_i x_i| \leq \|(x_n)\|_p \|z\|_p'$$

e, portanto, $f_z \in [\ell^p]'$ e $\|f\|_{[\ell^p]'} \leq \|z\|_{p'}$.

Definição 5.18. Sejam X e Y espaços normados e $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dizemos que T é um **isomorfismo de** X **em** Y se T satisfizer as seguintes propriedades:

1. T é bijetora;
2. $T^{-1} \in \mathcal{B}(X,Y)$.

Ou seja, T é um isomorfismo quando T for um homeomorfismo linear. Além disso, se existir um isomorfismo entre X e Y, dizemos que X e Y são **isomorfos** e escrevemos $X \cong Y$.

Observação 5.19. Se $T : X \to Y$ é um isomorfismo, então existem $a, b > 0$ tais que

$$a\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq b\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. De fato, tomando $b = \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$, temos que a segunda desigualdade é satisfeita. Por outro lado, $\|T^{-1}y\|_X \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\|y\|_Y$ para todo $y \in Y$. Logo, se $x \in X$, então

$$\|x\|_X = \|T^{-1}Tx\|_X \leq \|T^{-1}\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\|Tx\|_Y.$$

Assim, tomando $a = \frac{1}{\|T^{-1}\|_{\mathcal{B}(Y,X)}}$, segue o resultado.

Observe então que a função $X \ni x \mapsto \|Tx\|_Y \in \mathbb{R}$ é uma norma em X equivalente à norma original.

Exemplo 5.20. $(\mathbb{R}^n)^*$ é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. De fato, defina $T : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ por $T(\alpha) = T_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sendo $T_\alpha(x) = \langle T_\alpha, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = \langle x, \alpha \rangle$. Como estamos em dimensão finita, basta verificar que T é bijetora e linear. A linearidade é simples, basta observar que

$$\langle T_{r\alpha + s\beta}, x \rangle = \langle x, r\alpha + s\beta \rangle = r\langle x, \alpha \rangle + s\langle x, \beta \rangle = r\langle T_\alpha, x \rangle + s\langle T_\beta, x \rangle$$

para quaisquer $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos agora que T é sobrejetora. Dado $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, queremos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $T_\alpha = f$. Mas observe que, dado $x \in \mathbb{R}^n$, então $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e, portanto,

$$\langle f, x \rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\langle f, e_i \rangle}_{\alpha_i} = \langle x, \alpha \rangle,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\langle f, e_1 \rangle, \dots, \langle f, e_n \rangle)$. Logo, $f = T_\alpha$ e mostramos a sobrejetividade.

Mostremos que T também é isometria, o que implica que T é injetora. Dados $x, \alpha \in \mathbb{R}^n$, $|\langle T_\alpha, x \rangle| = |\langle x, \alpha \rangle| \leq |x|_e |\alpha|_e$, onde $|\cdot|_e$ é a norma euclidiana (tal desigualdade segue por Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (8.7)). Assim, se $x \neq 0$,

$$\frac{|\langle T_\alpha, x \rangle|}{|x|_e} \leq |\alpha|_e$$

e isso implica que $\|T_\alpha\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leq |\alpha|_e$ Mas na verdade temos a igualdade, pois se $\alpha \neq 0$, então

$$\frac{|\langle T_\alpha, \alpha \rangle}{|\alpha|_e} = \frac{|\langle \alpha, \alpha \rangle|}{|\alpha|_e} = \frac{|\alpha|_e^2}{|\alpha|_e} = |\alpha|_e.$$

Ou seja, o sup é atingido e temos que $\|T_\alpha\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = \|\alpha\|_e$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^n$ (o caso em que $\alpha = 0$ é válido trivialmente, pois $T_0 \equiv 0$). Observe também que isometria de fato implica a injetividade, pois se $T_\alpha = T_\beta$, então $0 = \|T_\alpha - T_\beta\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = \|T_{\alpha-\beta}\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = \|\alpha - \beta\|_e$. Ou seja, $\alpha = \beta$.

Teorema 5.21 (Representação de Riesz em ℓ^p)**.** Dado $1 \leq p < \infty$, temos que $(\ell^p(\mathbb{N}))' \cong \ell^{p'}(\mathbb{N})$, sendo p' o expoente conjugado de p.

Demonstração. Demonstremos o caso em que $1 < p < \infty$. Definindo $T : \ell^{p'} \to (\ell^p)'$ como $T(z) = T_z : \ell^p \to \mathbb{C}$, onde $T_z(x) = \langle T_z, x \rangle = \sum_{n=1}^\infty z_n x_n$, afirmamos que T é o isomorfismo desejado.

Primeiramente observe que $T \in \mathcal{L}(\ell^{p'}, (\ell^p)')$, pois séries se comportam bem com combinações lineares e a convergência da série é garantida pela Desigualdade de Hölder (1.16). Assim, dados $z \in \ell^{p'}$ e $x \in \ell^p$, temos que

$$|\langle T_z, x \rangle| = \left| \sum_{n=1}^\infty z_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^\infty |z_n x_n| \leq \|x\|_p \|z\|_{p'}$$

e isso implica que, se $x \neq 0$, então

$$\frac{|\langle T_z, x \rangle|}{\|x\|_p} \leq \|z\|_{p'}.$$

Ou seja, $\|T_z\|_{(\ell^p)'} \leq \|z\|_{p'}$. No entanto, a igualdade é válida para todo $z \in \ell^{p'}$. De fato, se $z \neq 0$, defina a seguinte sequência:

$$x_n := \begin{cases} \overline{z_n} \cdot (|z_n|^{p'-2}), & \text{se } z_n \neq 0 \\ 0, & \text{se } z_n = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que $x \in \ell^p$. De fato, note que

$$|x_n|^p = |\overline{z_n} \cdot (|z_n|^{p'-2})|^p = |\overline{z_n}|^p (|z_n|^{p'-2})^p = |z_n|^p |z_n|^{(p'-2)p} = |z_n|^{(p'-1)p},$$

se $z_n \neq 0$, e $|x_n|^p = 0$, se $z_n = 0$. Assim, $|x_n|^p = |z_n|^{(p'-1)p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e temos que

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{(p'-1)p} = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{p'} = \|z\|_{p'}^{p'} < \infty,$$

como queríamos. Agora observe que

$$\langle T_z, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} \cdot (|z_n|^{p'-2}) \cdot z_n = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \cdot |z_n|^{p'-2} = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{p'} = \|z\|_{p'}^{p'}$$

e isso implica o seguinte:

$$\frac{|\langle T_z, x \rangle|}{\|x\|_p} = \frac{\|z\|_{p'}^{p'}}{\|x\|_p} = \frac{\|z\|_{p'}^{p'}}{\|z\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}} = \|z\|_{p'}^{p' - \frac{p'}{p}} = \|z\|_{p'}.$$

Logo, $\|T_z\|_{(\ell^p)'} = \|z\|_{p'}$ e com isso já conseguimos garantir a injetividade e a continuidade da T. Além disso, temos também que $T \in \mathcal{B}(\ell^{p'}, (\ell^p)')$, basta tomar $C = 1$.

Agora observe o seguinte: se T for sobrejetora, então $\|f\|_{(\ell^p)'} = \|T^{-1} f\|_{p'}$, pois para toda $f \in (\ell^p)'$ existe um único $z \in \ell^{p'}$ tal que $f = Tz$ e isso acontece se, e somente se, $z = T^{-1} f$. Logo, $\|z\|_{p'} = \|T^{-1} f\|_{p'} = \|T_z\|_{(\ell^p)'} = \|f\|_{(\ell^p)'}$, como queríamos. Mostremos então a sobrejetividade da T. Dado $f \in (\ell^p)'$ e $x = (x_n) \in \ell^p$ qualquer, temos que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ é base de Schauder, como visto em alguma lista, e portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} x.$$

Assim,

$$\langle f, x \rangle = \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle f, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n = \langle T_z, x \rangle,$$

onde $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\langle f, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Resta verificar que $z \in \ell^{p'}$. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $w_n = \sum_{k=1}^{n} w_k e_k$, sendo

$$w_k = \begin{cases} \frac{|z_k|^{p'}}{z_k}, & \text{se } z_k \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, por um lado, temos

$$\|w_n\|_p^p = \sum_{n=1}^{n} |w_k|^p = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{|z_k|^{p'}}{z_k} \right|^p = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^{(p'-1)p} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'}$$

e, por outro lado,

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'} = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{|z_k|^{p'}}{z_k} = \langle f, w_n \rangle \leq \|f\|_{(\ell^p)'} \|w_n\|_p = \|f\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo, dividindo ambos os lados da última desigualdade por $\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}$, obtemos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'} \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{(\ell^p)'}.$$

Mas $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$. Assim, elevando ambos os lados por p', segue que

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{p'} \leq \|f\|_{(\ell^p)'}^{p'}$$

e, portanto, fazendo $n \to \infty$, temos que $\|z\|_{\ell^{p'}}^{p'} \leq \|f\|_{(\ell^p)'}^{p'} < \infty$, o que implica que $z \in \ell^{p'}$, como queríamos. □

Observação 5.22. O teorema nos garante que $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$ e que $(\ell^2)' \cong \ell^2$, mas não é válido que $(\ell^\infty)' \cong \ell^1$.

Observação 5.23. Lembre-se que uma isometria entre dois espaços métricos (X, d_1) e (Y, d_2) é uma função $f : X \to Y$ tal que $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$. Note que toda isometria é injetora, pois se $f(x) = f(y)$, então $0 = d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$. Mas $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$, logo, temos o desejado. Assim, se a f for sobrejetora, temos uma inversa g para a f. Além disso, se a f for contínua e sobrejetora, então f é um homeomorfismo, pois é relativamente fácil ver que basta tomar $\delta = \varepsilon$ para a continuidade ser satisfeita tanto pela f quanto pela g. Note que usamos fortemente tal observação no teorema anterior com a métrica induzida pela norma.

6 Uma curta introdução à Teoria Espectral

Definição 6.1. Seja $A \in \mathcal{B}(X)$, sendo X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$.

1. Chamamos o seguinte conjunto de **conjunto resolvente de** A:
$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : X \to X \text{ é isomorfismo}\}.$$
(Aqui $\lambda - A := \lambda I_X - A$)

2. Chamamos o seguinte conjunto de **espectro de** A:
$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Teorema 6.2. Seja X um espaço de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ e suponha que $\|T\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$. Então $I - T : X \to X$ é um isomorfismo.

Demonstração. Como $r = \|T\| < 1$, a série $\sum T^n$ é absolutamente convergente em $\mathcal{B}(X)$, pois $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ e isso implica que $\sum \|T^n\| \leq \sum \|T\|^n < \infty$. Assim, existe $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{B}(X)$, pois $\mathcal{B}(X)$ é Banach e já vimos que ser Banach é equivalente a toda série absolutamente convergente ser convergente. Afirmamos que $S = (I - T)^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(I - T) \circ S &= (I - T) \circ \sum_{n=0}^{\infty} T^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (I - T) \circ T^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (T^n - T^{n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (T_k - T^{k+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (I - T^{n+1}) \\
&= I - \lim_{n\to\infty} T^{n+1}.
\end{aligned}$$

Mas $\lim_{n\to\infty} T^{n+1} = 0$, pois sabemos do Cálculo que se a série converge, então a sequência dos termos vai pra 0. Como analogamente demonstramos que $S \circ (I - T) = I$, segue o desejado. Isto é, mostramos que $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. ☐

Corolário 6.3. Se $A \in \mathcal{B}(X)$, então $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\sigma(A)$ é um compacto de $\mathbb{C}$.

Demonstração. Iremos demonstrar apenas a segunda afirmação. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\|A\|_{\mathcal{B}(X)} < |\lambda|$, temos que $\lambda \in \rho(A)$, pois $\|\frac{A}{\lambda}\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$ e isso implica que $I - (\frac{A}{\lambda}) : X \to X$ é um isomorfismo com inversa dada por

$$(\lambda^{-1}(\lambda I - A))^{-1} = (I - \lambda^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n.$$

Ou seja, $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$ e isso nos garante que $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, \|A\|_{\mathcal{B}(X)})$. Agora, dado $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda I - A = (\lambda I - \lambda_0 I) + (\lambda_0 I - A) = ((\lambda I - \lambda_0 I) \circ (\lambda_0 I - A)^{-1} + I) \circ (\lambda_0 I - A) = \\
= (I - (-(\lambda I - \lambda_0 I) \circ (\lambda_0 I - A)^{-1})) \circ (\lambda_0 I - A)
\end{aligned}
$$

e isso implica que, se $\|(\lambda I - \lambda_0 I) \circ (\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)} < 1$, então $\lambda I - A$ é um isomorfismo. Ou seja, se definirmos ε_{λ_0} como

$$
|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}} = \varepsilon_{\lambda_0},
$$

então $B(\lambda_0, \varepsilon_{\lambda_0}) \subset \rho(A)$ e

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1} \circ (I - (-(\lambda I - \lambda_0 I \circ (\lambda_0 I - A)^{-1})))^{-1} \\
&= (\lambda_0 I - A)^{-1} \circ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda I - \lambda_0 I^n) \circ (\lambda_0 I - A)^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda I - \lambda_0 I)^n \circ (\lambda_0 I - A)^{-n-1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

7 Hahn-Banach e Aplicações

Definição 7.1. Uma **(relação de) ordem parcial** em um conjunto X é uma relação binária R (R pode ser visto como um subconjunto de $X \times X$) que satisfaz as seguintes propriedades:

1. xRx para todo $x \in X$ ($(x, x) \in R$) (reflexiva);
2. Se xRy e yRx, então $x = y$ ($(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$) (antissimétrica);
3. Se xRy e yRz, então xRz ($(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$) (transitiva).

Usualmente denotaremos a relação R por $\leq$. Note que $\leq$ é apenas uma notação, já que em geral os conjuntos em que definiremos uma relação não serão formados por números. Se a ordem parcial satisfizer $x \leq y$ ou $y \leq x$ para quaisquer $x, y \in X$, então tal ordem será chamada de **ordem total**.

Definição 7.2. Dado $E \subset X$ e $\leq$ uma ordem parcial sobre X, dizemos que um elementos $a \in X$ é uma **cota superior para** E se $x \leq a$ para todo $x \in E$.

Definição 7.3. Se $(X, \leq)$ for um conjunto parcialmente ordenado, dizemos que um elemento $m \in X$ é um **elemento maximal** se para qualquer $x \in X$ tal que $m \leq x$ tivermos que $m = x$.

Lema 7.4 (Lema de Zorn)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que todo subconjunto C de X que é totalmente ordenado admite cota superior. Então X possui elemento maximal.

Observação 7.5. É sabido que o Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha. Logo, se você aceita os axiomas de ZFC como uma fundamentação para a Matemática, você está implicitamente assumindo que o Lema de Zorn é válido. Pode-se demonstrar que o Axioma da Escolha implica o Lema de Zorn (e vice-versa), mas tal demonstração foge do escopo dessas notas. Logo, o Lema de Zorn é mais para ser visto como um axioma do que como um resultado que deveria ser demonstrado.

Acredito que vale a pena também comentar que o Teorema de Hahn-Banach **não** é equivalente ao Axioma da Escolha, pois pode-se demonstrar o Hahn-Banach utilizando o Lema do Ultrafiltro, que é um lema um pouco mais fraco do que o Axioma da Escolha.

Observação 7.6. Sejam X e Y conjuntos quaisquer, $A \subset X$ e $f : A \to Y$ uma função qualquer. Uma **extensão da** f é uma função $g : B \to Y$ em que $A \subset B$ e $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Note que, se g é uma extensão da f, então $\mathcal{G}(f) \subset \mathcal{G}(g)$, onde $\mathcal{G}$ denota o gráfico da função.

Exemplo 7.7. Considere X um espaço vetorial real, $N \subset X$ um subespaço, $p : X \to \mathbb{R}$ uma seminorma e $f \in N^*$ ($f : N \to \mathbb{R}$) tal que $\langle f, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in N$. Defina

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) = \{\mathcal{G}(g) : g : D(g) \to \mathbb{R} \text{ é uma extensão linear de } f, \\ D(g) \text{ é subespaço de } X \text{ e } \langle g, x \rangle \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(g)\}\end{aligned}$$

e observe que $\mathcal{F}(f) \subset \wp(X \times \mathbb{R})$ e que $\mathcal{F}(f) \neq \emptyset$, pois $\mathcal{G}(f) \in \mathcal{F}(f)$. Vamos agora conseguir um elemento maximal em tal família utilizando o Lema de Zorn. Seja $C \subset \mathcal{F}(f)$ um subconjunto totalmente ordenado com a relação de ordem dada pela inclusão $\subset$. Assim, temos que, para quaisquer $\mathcal{G}(g), \mathcal{G}(h) \in C$, $\mathcal{G}(g) \subset \mathcal{G}(h)$ ou $\mathcal{G}(h) \subset \mathcal{G}(g)$. Defina $D = \bigcup_{\mathcal{G}(g) \in C} D(g)$. Verifiquemos que D é um subespaço de X. Dados $x, y \in D$, existem g e h tais que $x \in D(g)$ e $y \in D(h)$. Como C é totalmente ordenado, podemos supor $D(g) \subset D(h)$. Logo, $x, y \in D(h)$. Mas $D(h)$ é subespaço por hipótese e, deste modo, temos que $x + \lambda y \in D(h)$ para qualquer $\lambda \in br$. No entanto, $D(h) \subset D$. Temos então o desejado.

Defina agora $\varphi : D \to \mathbb{R}$ como $\langle \varphi, x \rangle := \langle g, x \rangle$, sendo $x \in D(g)$. Verifiquemos que φ está bem definido, é linear, estende a f e que $\langle \varphi, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in D$. De fato, se $x \in D$ e $x \in D(g) \cap D(h)$, podemos novamente supor que $\mathcal{G}(h) \subset \mathcal{G}(g)$ e com isso teremos $\langle g, x \rangle = \langle h, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle$, como queríamos. Analogamente temos que, dados $x, y \in D$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, existe g tal que $x + \lambda y \in D(g)$. Logo, $\langle \varphi, x + \lambda y \rangle = \langle g, x + \lambda y \rangle$ é linear. Que φ estende a f é fácil ver e claramente $\langle \varphi, x \rangle = \langle g, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in D$. Temos então que todas as condições são satisfeitas pela φ, o que implica que $\mathcal{G}(\varphi) \in \mathcal{F}(g)$ e que $\mathcal{G}(g) \subset \mathcal{G}(\varphi)$ para todo $\mathcal{G}(g) \in C$. Ou seja, $\mathcal{G}(\varphi)$ é uma cota superior para o conjunto totalmente ordenado C. Como C foi qualquer, acabamos de verificar que a hipótese do Lema de Zorn foi satisfeita, isto é, todo conjunto totalmente ordenado admite cota superior. Com isso conseguimos concluir que existe $\mathcal{G}(F) \in \mathcal{F}(F)$ elemento maximal.

Teorema 7.8 (Teorema de Hahn-Banach Real)**.** Seja X um espaço vetorial real, $p : X \to \mathbb{R}$ uma seminorma, $N \subset X$ um subespaço e $f \in N^*$ satisfazendo $\langle f, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in N$. Então existe $F \in X^*$ tal que F estende f e $\langle F, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. No exemplo anterior já mostramos que existe $F : M \to \mathbb{R}$ uma extensão maximal de $f : N \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\langle F, x \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Se mostrarmos que $X = M$, acabou. Suponha então que existe $x_0 \in X \setminus M$ e, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, defina $g_\alpha : M \oplus [x_0] \to \mathbb{R}$ como $\langle g_\alpha, y + \lambda x_0 \rangle := \langle F, x \rangle + \lambda \alpha$. Não é muito difícil de ver que g_α é linear e que estende a F, o que implica que, em particular, estende a f. Assim, se mostrarmos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\langle g, z \rangle \leq p(z)$ para todo $z \in M \oplus [x_0]$, chegaremos em uma contradição com a maximalidade da F. Tome então $y_1, y_2 \in M$ e note que

$$\begin{aligned}\langle F, y_1 \rangle + \langle F, y_2 \rangle = \langle F, y_1 + y_2 \rangle \leq p(y_1 + y_2) = p(y_1 - x_0 + y_2 + x_0) \leq \\ \leq p(y_1 - x_0) + p(y_2 + x_0).\end{aligned}$$

Ou seja, temos que $\langle F, y_1 \rangle - p(y_1 - x_0) \leq p(y_2 + x_0) - \langle F, y_2 \rangle$ para quaisquer $y_1, y_2 \in M$. Tome agora $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\sup\{\langle F, y \rangle - p(y - x_0) : y \in M\} \leq \alpha \leq \in f\{p(y + x_0) - \langle F, y \rangle : y \in M\}.$$

Podemos escolher α deste modo pois a conta que fizemos anteriormente com y_1 e y_2 nos garante que de fato tal sup é menor ou igual ao inf. Verifiquemos que tal α satisfaz o desejado. Considerando $z = y + \lambda x_0 \in M \oplus [x_0]$, se $\lambda = 0$, então $\langle g_\alpha, z \rangle = \langle g_\alpha, y \rangle = \langle F, y \rangle \leq p(y) = p(z)$ e temos o desejado. Se $\lambda > 0$, então

$$\begin{aligned}
\langle g_\alpha, y + \lambda x_0 \rangle &= \langle F, y \rangle + \lambda\alpha \\
&\leq \langle F, y \rangle + \lambda \left(p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \left\langle F, \frac{y}{\lambda} \right\rangle \right) \\
&= \langle F, y \rangle + \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} - x_0\right) - \lambda \left\langle F, \frac{y}{\lambda} \right\rangle \\
&= \langle F, y \rangle + p(y + \lambda x_0) - \langle F, y \rangle \\
&= p(y + \lambda x_0) \\
&= p(z)
\end{aligned}$$

e novamente temos o desejado. Finalmente, se $\lambda < 0$, então

$$\begin{aligned}
\langle g_\alpha, y + \lambda x_0 \rangle &= \langle F, y \rangle + \lambda\alpha \\
&\leq \langle F, y \rangle + \lambda \left(\left\langle F, -\frac{y}{\lambda} \right\rangle - p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) \right) \\
&= \langle F, y \rangle + \lambda \left\langle F, -\frac{y}{\lambda} \right\rangle - \lambda p\left(-\frac{y}{\lambda} - x_0\right) \\
&= \langle F, y \rangle - \langle F, y \rangle + p(y + \lambda x_0) \\
&= p(y + \lambda x_0) \\
&= p(z)
\end{aligned}$$

e temos o desejado. Conclusão, $M = X$ e $F \in X^*$, como queríamos. □

Lema 7.9. Seja X um espaço vetorial complexo.

1. Se $f \in X^*_{\mathbb{C}}$, então $u := \text{Re}(f) \in X^*_{\mathbb{R}}$ e a seguinte igualdade é válida:

$$\langle f, x \rangle = \langle u, x \rangle - i\langle u, ix \rangle.$$

2. Se $u \in X^*_{\mathbb{R}}$ e definimos $f : X \to \mathbb{R}$ pela igualdade anterior, então $f \in X^*_{\mathbb{C}}$.

3. Se X for normado, então $f \in X'_{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $u = \text{Re}(f) \in X'_{\mathbb{R}}$ e, além disso, $\|f\|_{X'_{\mathbb{C}}} = \|u\|_{X'_{\mathbb{R}}}$.

Demonstração do item 1. Tome $f \in X^*_{\mathbb{C}}$ e considere $u = \text{Re}(f)$. Então, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que, por um lado,

$$\langle f, x + \alpha y \rangle = \text{Re}(\langle f, x + \alpha y \rangle) + i\text{Im}(\langle f, x + \alpha y \rangle)$$

e, por outro,

$$\begin{aligned}\langle f, x+\alpha y\rangle &= \langle f, x\rangle + \alpha\langle f, y\rangle \\ &= \mathrm{Re}(\langle f, x\rangle) + i\mathrm{Im}(\langle f, x\rangle) + \alpha(\mathrm{Re}(\langle f, y\rangle) + i\mathrm{Im}(\langle f, y\rangle)) \\ &= \mathrm{Re}(\langle f, x\rangle) + \alpha\mathrm{Re}(\langle f, y\rangle) + i(\mathrm{Im}(\langle f, x\rangle) + \alpha\mathrm{Im}(\langle f, y\rangle)).\end{aligned}$$

Igualando então a parte real, obtemos que $\mathrm{Re}(\langle f, x+\alpha y\rangle) = \mathrm{Re}(\langle f, x\rangle) + \alpha\mathrm{Re}(\langle f, y\rangle)$. Ou seja, $\langle u, x+\alpha y\rangle = \langle u, x\rangle + \alpha\langle u, y\rangle$. Verifiquemos agora a igualdade do enunciado. Por um lado, temos que

$$\langle f, ix\rangle = i\langle f, x\rangle = i(\mathrm{Re}(\langle f, x\rangle) + i\mathrm{Im}(\langle f, x\rangle)) = -\mathrm{Im}(\langle f, x\rangle) + i\mathrm{Re}(\langle f, x\rangle).$$

Por outro,

$$\langle f, ix\rangle = \mathrm{Re}(\langle f, ix\rangle) + i\mathrm{Im}(\langle f, ix\rangle).$$

Comparando então as partes real e imaginária, concluímos que $\mathrm{Im}(\langle f, x\rangle) = -\mathrm{Re}(\langle f, ix\rangle)$ e, portanto, $\langle f, x\rangle = \mathrm{Re}(\langle f, x\rangle) - i\mathrm{Re}(\langle f, ix\rangle) = \langle u, x\rangle - i\langle u, ix\rangle$, como queríamos. □

Demonstração do item 2. Dado $u \in X^*_{\mathbb{R}}$, defina $f : X \to \mathbb{C}$ como $\langle f, x\rangle = \langle u, x\rangle - i\langle u, ix\rangle$ e mostremos que, dados $x \in X$ e $a+ib \in \mathbb{C}$, então

$$\langle f, (a+ib)x\rangle = (a+ib)\langle f, x\rangle.$$

De fato, se $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in X$, então

$$\begin{aligned}\langle f, x+ay\rangle &= \langle u, x+ay\rangle - i\langle u, i(x+ay)\rangle \\ &= \langle u, x\rangle + a\langle u, y\rangle - i\langle u, ix+iay\rangle \\ &= \langle u, x\rangle + a\langle u, y\rangle - i\langle u, ix\rangle - ia\langle u, iy\rangle \\ &= \langle u, x\rangle - i\langle u, ix\rangle + a(\langle u, y\rangle - i\langle u, iy\rangle) \\ &= \langle f, x\rangle + a\langle f, y\rangle.\end{aligned}$$

Agora observe que $\langle f, ix\rangle = i\langle f, x\rangle$. De fato,

$$\begin{aligned}\langle f, ix\rangle &= \langle u, ix\rangle - i\langle u, i(ix)\rangle \\ &= \langle u, ix\rangle + i\langle u, x\rangle \\ &= i(\langle u, x\rangle - i\langle u, ix\rangle) \\ &= i\langle f, x\rangle.\end{aligned}$$

Assim, juntando os dois fatos nós obtemos que $\langle f, (a+ib)x\rangle = (a+ib)\langle f, x\rangle$, pois $\langle f, ax\rangle = a\langle f, x\rangle$ e $\langle f, ibx\rangle = ib\langle f, x\rangle$. Note também que se considerarmos $a = 1$ na primeira conta feita, então também já garantimos que $\langle f, x+y\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle$ e com isso nós mostramos que $f \in X^*_{\mathbb{C}}$, como queríamos. □

Demonstração do item 3. Suponha que $f \in X'_{\mathbb{C}}$. Mostremos que $u \in X'_{\mathbb{R}}$. De fato, dado $x \in X$ tal que $\|x\|_X = 1$, temos que

$$|\langle u, x\rangle| = |\mathrm{Re}(\langle f, x\rangle)| \leq |\langle f, x\rangle| \leq \|f\|_{X'_{\mathbb{C}}}.$$

Logo, $\|u\|_{X'_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{X'_{\mathbb{C}}}$. Façamos agora a volta, ie, se $u \in X'_{\mathbb{R}}$, então $f \in X'_{\mathbb{C}}$. Considere $x \in X$ de modo que $\langle f, x\rangle \neq 0$ e defina $\alpha := \frac{\overline{\langle f,x\rangle}}{|\langle f,x\rangle|}$. Agora observe que, como $|\langle f, x\rangle| \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
|\langle f, x\rangle| &= \frac{\overline{\langle f, x\rangle}}{|\langle f, x\rangle|}\langle f, x\rangle \\
&= \alpha\langle f, x\rangle \\
&= \langle f, \alpha x\rangle \\
&\stackrel{1}{=} \langle u, \alpha x\rangle \\
&\leq \|u\|_{X'_{\mathbb{R}}}\|\alpha x\|_X \\
&= \|u\|_{X'_{\mathbb{R}}}|\alpha|\|x\|_X \\
&\stackrel{2}{=} \|u\|_{X'_{\mathbb{R}}}\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Em (1) usamos que $\langle f, \alpha x\rangle = |\langle f, x\rangle|$ é um número real e, portanto, é igual a sua parte real $\langle u, \alpha x\rangle$. Em (2) usamos que $|\alpha| = 1$. Observe então que isso implica que $\|f\|_{X'_{\mathbb{C}}} \leq \|u\|_{X'_{\mathbb{R}}}$ e, portanto, segue a igualdade desejada. □

Teorema 7.10 (Teorema de Hahn-Banach Complexo)**.** Considere X um espaço vetorial complexo, $N \subset X$ um subespaço complexo, $p : X \to \mathbb{R}$ uma seminorma e $f \in N^*_{\mathbb{C}}$ tal que $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in N$. Então existe $F \in X^*_{\mathbb{C}}$ tal que $F|_N = f$ e $|\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Já sabemos pelo lema anterior que $u = \mathrm{Re}(f) \in N^*_{\mathbb{R}}$ e que $|\langle u, x\rangle| \leq |\langle f, x\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in N$. Logo, $\langle u, x\rangle \leq p(x)$. Utilizando agora a versão real do Hahn-Banach, temos $U \in X^*_{\mathbb{R}}$ tal que $U|_N = u$ e $|\langle U, x\rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Defina então $F : X \to \mathbb{C}$ como $\langle F, x\rangle := \langle U, x\rangle - i\langle U, ix\rangle$. Já sabemos pelo segundo item do lema anterior que $F \in X^*_{\mathbb{C}}$. Além disso, se $x \in N$, então

$$\langle F, x\rangle = \langle U, x\rangle - i\langle U, ix\rangle = \langle u, x\rangle - i\langle u, ix\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Note que utilizamos o primeiro item do lema na última igualdade. Finalmente, se $x \in X$ e $\langle F, x\rangle \neq 0$, temos que

$$|\langle F, x\rangle| = \frac{\overline{\langle F, x\rangle}}{|\langle F, x\rangle|}\langle F, x\rangle = \langle F, \alpha x\rangle = \langle U, \alpha x\rangle \leq p(\alpha x) = |\alpha|p(x) = p(x)$$

e o resultado segue. □

Vejamos agora algumas consequências do Hahn-Banach.

Corolário 7.11. Seja $M \subset X$ um subespaço próprio e fechado. Então existe $f \in X'_{\mathbb{C}}$ tal que $\|f\|_{X'} = 1$ e $\langle f, x\rangle = 0$ para todo $x \in M$.

Demonstração. Seja $x_0 \in X \setminus M$ e considere $\delta = d(x_0, M) = \int_{y \in M} \|x_0 - y\|_X > 0$. Defina $g : M \oplus [x_0] \to \mathbb{C}$ como $g(y + \lambda x_0) = \lambda\delta$. Não é difícil ver que g é linear e que $g(y) = \langle g, y \rangle = 0$ para todo $y \in M$. Mostremos que $|\langle g, z \rangle| \leq \|z\|_X$ para todo $z \in M \oplus [x_0]$. De fato, tomando $z = y + \lambda x_0$, então se $\lambda \neq 0$, temos que

$$|\langle g, y + \lambda x_0 \rangle| = |\lambda\delta| = |\lambda|\delta \leq |\lambda| \left\| x_0 - \frac{-y}{\lambda} \right\|_X = \|\lambda x_0 + y\| = \|z\|_X.$$

Considerando $p(z) = \|z\|_X$ no Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ que estende g e que satisfaz $|\langle f, x \rangle| \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Observe então que $M \subset \mathcal{N}(g) \subset \mathcal{N}(f)$ e que $\|f\|_{X'} \leq 1$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $y_n \in M$ de modo que $\delta \leq \|x_0 - y_n\| < \delta + \frac{1}{n}$ (definição de ínfimo). Assim,

$$\|f\|_{X'} \geq \frac{|\langle f, x_0 - y_n \rangle|}{\|x_0 - y_n\|_X} = \frac{\delta}{\|x_0 - y_n\|_X} \geq \frac{\delta}{\delta + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\delta}{\delta} = 1$$

e temos que $1 \leq \|f\|_{X'} \leq 1$, como queríamos. $\square$

8 Espaços de Hilbert

Definição 8.1. Seja H um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Um **produto interno** em H é uma função $(\cdot,\cdot)_H : H \times H \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $u, v, w \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(u + \lambda v, w)_H = (u, w) + \lambda(v, w)$;
2. $(v, u)_H = \overline{(u, v)_H}$;
3. $(u, u)_H \geq 0$;
4. $(u, u)_H = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Chamaremos o par $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ de **espaço com produto interno**.

Observação 8.2. Se $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ é um espaço com produto interno, então para quaisquer $u, v, w \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que

$$(u, v + \lambda w)_H = (u, v)_H + \overline{\lambda}(u, w)_H.$$

Além disso, se $u = 0$, então $(u, v)_H = 0$ para qualquer $v \in H$, pois $(0, v)_H = (0 + 0, v)_H = (0, v)_H + (0, v)_H$. Logo, cancelando $(0, v)_H$ de ambos os lados temos o desejado.

Exemplo 8.3. Se $H = \mathbb{C}$, então a função dada por $(z, w)_{\mathbb{C}} := z\overline{w}$ é um produto interno.

Exemplo 8.4. Se $H = \mathbb{C}^n$, então a função $(z, w) := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$ também é um produto interno. Observe que neste caso $z = (z_1, \ldots, z_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, estão em $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 8.5. Em $H = \ell^2(\mathbb{N})$, a função dada por $(x, y)_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ é um produto interno. Note que de fato $(x, y)_{\ell^2} \in \mathbb{C}$ pela Desigualdade de Hölder (1.16).

Definição 8.6. Se $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ é um espaço com produto interno, podemos definir $|\cdot|_H : H \to \mathbb{R}$ como

$$|u|_H := \sqrt{(u, u)_H}.$$

Note que, como por hipótese $(u, u)_H \geq 0$, tal definição faz sentido.

Lema 8.7 (Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** Dados $u, v \in H$, temos que a seguinte desigualdade é válida:

$$|(u, v)_H| \leq |u|_H |v|_H.$$

Demonstração. Note que, se $(u,v)_H = 0$, então a desigualdade é válida trivialmente. Caso contrário, defina $\lambda := \frac{(u,v)_H}{|(u,v)_H|}$, $w := \lambda v$ e $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ como $\varphi(t) := (u - tw, u - tw)_H$. Com isso em mãos, o seguinte acontece:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (u - tw, u - tw)_H \\
&= (u,u)_H - t(u,w)_H - t(w,u)_H + t^2(w,w)_H \\
&= |w|_H^2 t^2 - t((u,w)_H + \overline{(u,w)_H}) + |u|_H^2 \\
&= |w|_H^2 t^2 - 2\mathrm{Re}((u,w)_H)t + |u|_H^2 \\
&= |\lambda v|_H^2 t^2 - 2\mathrm{Re}((u,\lambda v)_H)t + |u|_H^2 \\
&= |v|_H^2 t^2 - 2\mathrm{Re}(|(u,v)_H|)t + |u|_H^2 \\
&\overset{*}{=} |v|_H^2 t^2 - 2|(u,v)_H|t + |u|_H^2,
\end{aligned}$$

sendo que em (*) usamos o fato de que $|(u,v)_H| \in \mathbb{R}$. Ou seja, obtivemos que $\varphi(t) = |v|_H^2 t^2 - 2|(u,v)_H|t + |u|_H^2 \geq 0$. Logo, observando que temos uma equação de segundo grau sempre dando um valor maior ou igual a 0, a Fórmula de Bhaskara nos diz que o Δ tem que ser menor ou igual a 0, pois a concavidade da parábola está para cima. Assim, considerando $a = |v|_H^2$, $b = -2|(u,v)_H|$ e $c = |u|_H^2$, temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4|(u,v)_H|^2 - 4|v|_H^2|u|_H^2 \leq 0$$

e o resultado segue. □

Demonstração Alternativa. Primeiramente note que, se $u = 0$ ou $v = 0$, então o resultado segue, pois neste caso $(u,v)_H = 0$, como já foi observado anteriormente. Assim, supondo $u, v \neq 0$, podemos definir $\alpha = (u,v)_H$, $\lambda = -\frac{\overline{\alpha}}{|u|_H^2}$ e com isso obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\lambda u + v|_H^2 \\
&= (\lambda u + v, \lambda u + v)_H \\
&= \lambda\overline{\lambda}|u|_H^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda\alpha) + |v|^2 \\
&= \frac{\alpha\overline{\alpha}}{|u|_H^2} + 2\mathrm{Re}\left(-\frac{\alpha\overline{\alpha}}{|u|_H^2}\right) + |v|_H^2 \\
&\overset{*}{=} |v|_H^2 - \frac{|\lambda|^2}{|u|_H^2}.
\end{aligned}$$

Note que em (*) usamos o fato de que $-\frac{\alpha\overline{\alpha}}{|u|_H^2} \in \mathbb{R}$. Logo, o resultado segue. □

Corolário 8.8. O mapa $|\cdot|_H : H \to \mathbb{R}$ dado por $|u|_H = \sqrt{(u,u)_H}$ é uma norma.

Demonstração. Dados $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in H$, temos que

$$|\lambda u|_H = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)_H} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u,u)_H} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(u,u)_H} = |\lambda||u|_H$$

e, portanto, a primeira condição para ser norma é satisfeita.

Verifiquemos agora a triangular. Dados $u, v \in H$, temos que

$$|u+v|_H^2 = (u+v, u+v)_H = (u,u)_H + 2\mathrm{Re}((u,v)_H) + (v,v)_H.$$

No entanto, $2\mathrm{Re}((u,v)_H) \leq 2|(u,v)_H| \leq 2|u|_H|v|_H$, $(u,u)_H = |u|_H^2$ e $(v,v)_H = |v|_H^2$. Logo,

$$|u+v|_H^2 \leq |u|_H^2 + 2|u|_H|v|_H + |v|_H^2 = (|u|_H + |v|_H)^2.$$

Extraindo a raiz, segue o desejado.

E, finalmente, queremos mostrar que $|u|_H = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Mas de fato, se $|u|_H = 0$, então $|u|_H^2 = 0$ e isso implica que $(u,u)_H = 0$. No entanto, por definição de produto interno, isso implica que $u = 0$. Por outro lado, se $u = 0$, já vimos que $(u,v)_H = 0$ para qualquer $v \in H$. Considerando então $v = u$, o resultado segue, pois $0 = \sqrt{0} = \sqrt{(u,u)_H} = |u|_H$. $\square$