SMA0300-Geometria Analítica - Aula 1

Roberta Wik Atique

GEOMETRIA		ÁLGEBRA
Pontos, retas, planos	$\Longleftrightarrow$ Descartes	Números
Curvas, superfícies, sólidos		Equações

Descartes, no século 17, introduziu o sistema de coodenadas, fazendo assim uma conexão entre a geometria e a álgebra. Deste modo, os problemas geométricos são transformados em equações. Atualmente a Geometria Algébrica é uma importante área de pesquisa em matemática, ou seja, problemas geométricos são transformados em problemas algébricos, geralmente mais fáceis de resolver.

Nesta disciplina queremos estudar geometria espacial usando esta abordagem, ou seja, através de um sistema de coordenadas, transformar os objetos e problemas geométricos em equações. Uma vez resolvidas estas equações podemos voltar e resolver o problema geométrico.

Introduziremos os sistemas de coordenadas através da Álgebra Linear. Estudaremos a álgebra linear no espaço tri-dimensional (que chamamos de E^3). No segundo semestre vocês estudarão álgebra linear mais geralmente.

Precisamos de um conjunto e operações entre os elementos deste conjunto. O conjunto que queremos é o conjunto de vetores em E^3.

Na física do ensino médio aprendemos que um vetor é *representado* por um segmento de reta com um sentido de percurso. Dados os pontos distintos A e B, o segmento orientado, que denotaremos por (A, B), é o segmento AB com o sentido de percurso de A para B. O módulo do vetor é o comprimento do segmento AB ou a distância entre A e B ($d(A, B)$), dois vetores têm mesma direção se os segmentos são paralelos e têm mesmo sentido se forem paralelos e *apontam* para o mesmo lugar. Aqui queremos dar um rigor matemático para esta abordagem. Um segmento orientado *ocupa* um lugar no espaço. Deste modo dados dois quaisquer segmentos orientados nem sempre poderemos definir uma soma.

Dados dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) dizemos que:

1. Têm mesma direção se as retas AB e CD (chamadas retas suportes), são paralelas.
2. Se (A, B) e (C, D) têm mesma direção, então eles têm mesmo sentido se os segmentos AC e BD não têm interseção. Se os segmentos AC e BD têm interseção dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm sentidos contrários.

No conjunto dos segmentos orientados vamos definir uma relação de equivalência (ou equipolência): dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equivalêntes se

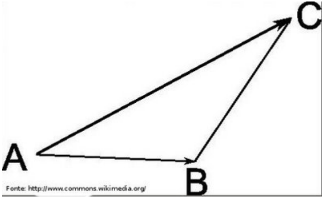
1. $d(A, B) = d(C, D)$, ou seja, os segmentos têm mesmo comprimento.
2. (A, B) e (C, D) têm mesma direção,
3. (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido.

Definição: O vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos segmentos orientados que são equivalentes ao segmento orientado (A, B).

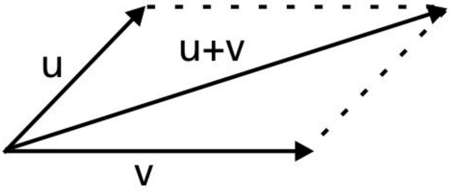
Dado um vetor $\vec{v}$ temos:

1. O módulo do vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes: $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.
2. a direção (resp. sentido) de um vetor é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes.
3. $-\vec{u}$ é um vetor com mesmo módulo e direção que $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$.

Regra do triângulo: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ queremos definir o vetor $\vec{u}+\vec{v}$. Tome um representante $\overrightarrow{AB}$ do vetor $\vec{u}$, isto é, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e escolha o representante $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$.



Regra do paralelogramo: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ queremos definir o vetor $\vec{u}+\vec{v}$. Tome um representante $\overrightarrow{AB}$ do vetor $\vec{u}$, isto é, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e escolha o representante $\overrightarrow{AD}$ do vetor $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Construa o paralelogramo $ABCD$. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$ (diagonal do paralelogramo).



Dado um número real α não nulo e um vetor $\vec{u}$ queremos definir um vetor denotado por $\alpha\vec{u}$.

1. Módulo: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$.
2. $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ TÊM MESMA DIREÇÃO.
3. $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Observações:

1. o vetor nulo não existe geometricamente. Só existe algebricamente de modo que a operação $\vec{u} + (-\vec{u})$ faça sentido. Notação: $\vec{0}$.
2. $0.\vec{u} = \vec{0}$.

Definição: O espaço vetorial V^3 é o conjunto dos vetores com as operações de soma e multiplicação por escalar, que satisfaz as seguintes condições:

1. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
3. Elemento neutro: existe o vetor nulo,
4. Elemento oposto: Dado $\vec{u}$ existe o $-\vec{u}$ de modo que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$,
5. $1.\vec{u} = \vec{u}$,
6. Associativa: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$
7. Distributiva: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$,
8. Distributiva: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$,

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 2

Roberta Wik Atique

O símbolo $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ indica uma sequência ordenada de vetores.

Observação: Convencionamos que o vetor nulo é paralelo a qualquer outro vetor, reta ou plano.

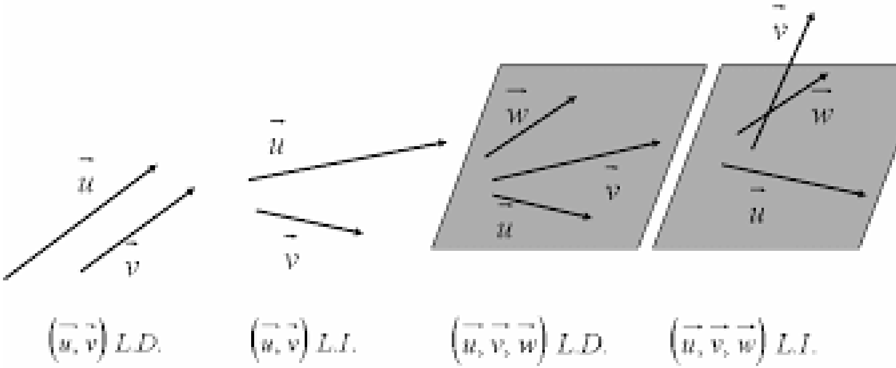
Definição (dependência linear):

1. Uma sequência $(\vec{v})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$.
2. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.
3. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, existe um plano que contém representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
4. Qualquer sequência de 4 ou mais vetores é linearmente dependente (LD).

Definição (independência linear): Uma sequência de vetores é linearmente independente(LI) se não for linearmente dependente (LD):

1. Uma sequência $(\vec{v})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.
3. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, não existe um plano que contém representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Dependência Linear



Definição: Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, dizemos que $\vec{u}$ é **combinação linear** de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se existirem números reais (escalares) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Observação: O vetor nulo é combinação linear de qualquer sequência de vetores.

Proposição 1: Dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ PARALELOS (mesma direção), um deles é combinação linear do outro.
Prova: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido:

$$\vec{u} = \left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v},$$

e vice-versa trocando $\vec{u}$ por $\vec{v}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentido contrário:

$$\vec{u} = -\left(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}\right)\vec{v}.$$

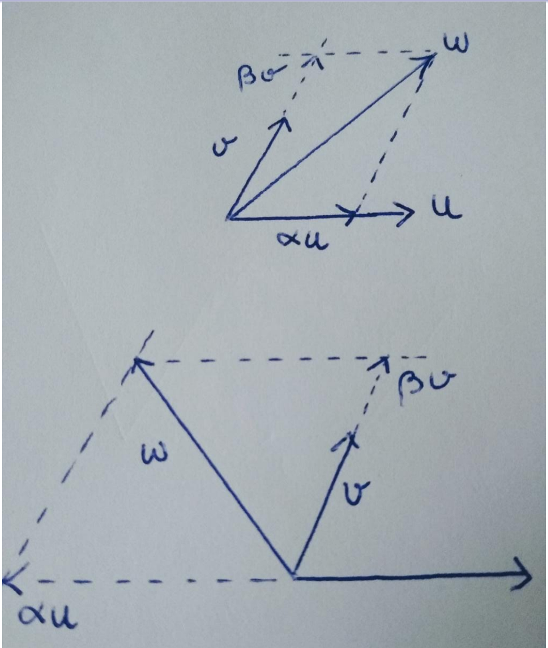
Proposição 2: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD, um deles é combinação linear do outro.

Proposição 3: Suponhamos que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Prova:

- Observe que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ NÃO SÃO o vetor nulo e $\vec{w}$ PODE ser o vetor nulo.
- Suponha $\vec{w}$ paralelo a $\vec{u}$. Vimos que existe um número real α tal que $\vec{w} = \alpha\vec{u}$. Reciprocamente se $\vec{w}$ for paralelo a $\vec{v}$.
- Suponhamos que $\vec{w}$ não é paralelo a $\vec{u}$ nem a $\vec{v}$.

Combinação linear



Exercício: Assinale verdadeiro ou falso. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma sequência de vetores LD.

1. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são necessariamente não nulos.
2. Um dos vetores pode ser o vetor nulo.
3. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ podem ser paralelos.
4. Quaisquer dois vetores da sequência não podem ser LI.
5. Quaisquer dois vetores da sequência podem ser LD.

Proposição 4: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma sequência de vetores LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

Exercício: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer vetores. Tome:

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

Mostre que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LD.
Solução: Vamos encontrar escalares x, y, z (um deles não nulo! por que?) tais que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

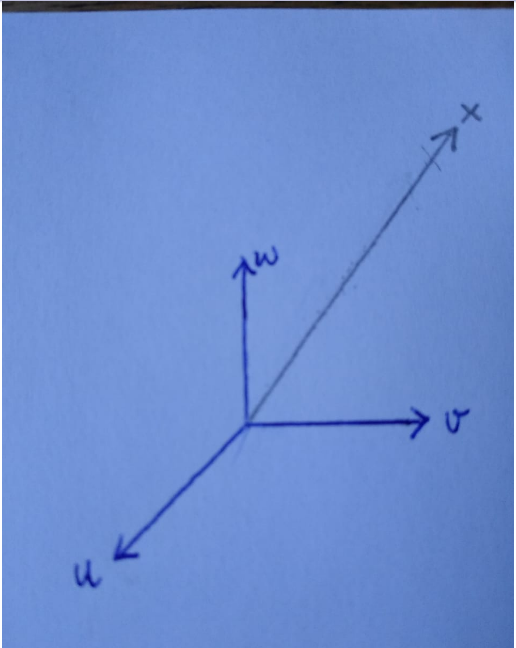
$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = x\vec{u}+2x\vec{v}-x\vec{w}+2y\vec{u}-3y\vec{v}+y\vec{w}+7z\vec{v}-3z\vec{w} =$$

$$(x+2y)\vec{u}+(2x-3y+7z)\vec{v}+(-x+y-3z)\vec{w} = \vec{0} = 0\vec{u}+0\vec{v}+0\vec{w}.$$

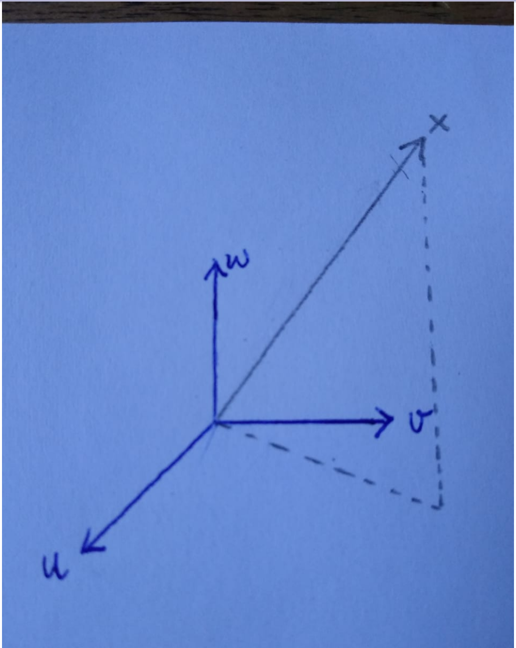
Observe que $x = 2, y = -1, z = -1$ é uma solução. Logo $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Proposição 5: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma sequência de vetores LI então qualquer vetor $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

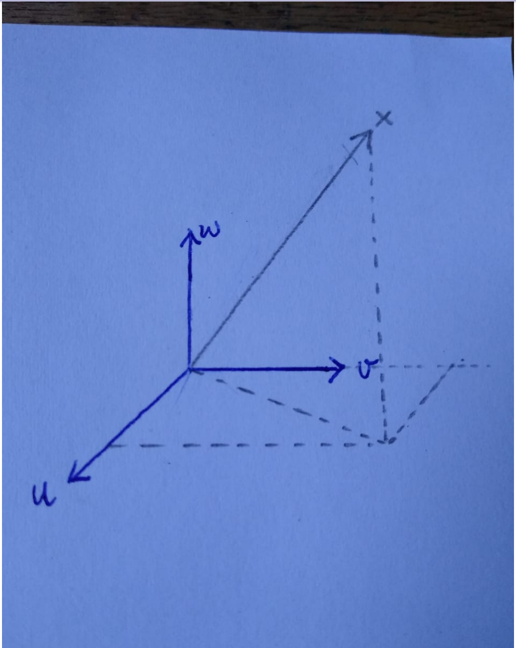
Combinação linear



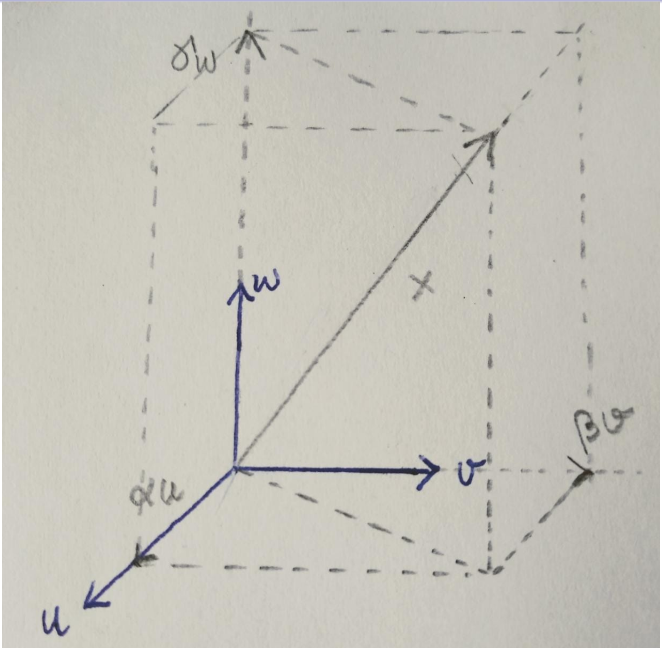
Combinação linear



Combinação linear



Combinação linear



Proposição 6: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, é uma sequência de vetores LD se, e somente se, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}.$$

Vimos que se $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são dois vetores LD não nulos então $\vec{v_2} = \alpha \vec{v_1}$ onde $\alpha = \pm \|\vec{v_2}\| / \|\vec{v_1}\|$. Logo $\alpha \vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{0}$, $\alpha \neq 0$. Se $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ é LD um deles é combinação linear dos outros dois, suponhamos $\vec{v_1}$. Existem α_2 e α_3 escalares tais que

$$\vec{v_1} = \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}.$$

Logo

$$\vec{v_1} - \alpha_2 \vec{v_2} - \alpha_3 \vec{v_3} = \vec{0}.$$

Proposição 7: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, $n = 1, 2, 3$, é uma sequência de vetores LI se, e somente se, a expressão

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

admite apenas a solução nula: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Proposição 8: Seja $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, $n = 1, 2, 3$, uma sequência de vetores LI. Se

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \beta_1 \vec{v_1} + \beta_2 \vec{v_2} + \cdots + \beta_n \vec{v_n}$$

então $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 \ldots \alpha_n = \beta_n$.

Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI então dado qualquer vetor $\vec{x}$ existem ÚNICOS escalares α, β, γ tais que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}.$$

Definição: Uma base de V^3 é uma sequência $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ LI.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e $\vec{v}$ um vetor qualquer de V^3. Então existem únicos escalares x, y, z tais que $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Tais escalares são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ na base E.

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 3

Roberta Wik Atique

Definição: Uma tripla ORDENADA linearmente independente $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ chama-se base de V^3.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e $\vec{v}$ um vetor qualquer de V^3. Então existem únicos escalares x, y, z tais que $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Tais escalares são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ na base E. Notação: $\vec{v} = (x, y, z)_E$.

Observação 1: Uma base é uma tripla ordenada, isto significa que se trocarmos as ordens dos vetores obtemos outra base diferente da inicial. A coordenada x é a primeira coordenada de $\vec{v}$ na base E, a coordenada y é segunda e a coordenada z é a terceira.

Observação 2 (Proposição 8 da aula 2): Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma sequência de vetores LI. Se

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + \beta_3 \vec{e_3}$$

então $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ e $\alpha_3 = \beta_3$.

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base, $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)_E$ e $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)_E$ vetores de V^3 e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 + x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 =$$

$$(x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_E$$

$$\alpha\vec{v}_1 = \alpha(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = \alpha x_1\vec{e}_1 + \alpha y_1\vec{e}_2 + \alpha z_1\vec{e}_3$$

$$\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)_E$$

Proposição:

a $(x_1, y_1, z_1)_E + (x_2, y_2, z_2)_E = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_E$.

b $\alpha(x_1, y_1, z_1)_E = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)_E$.

c $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$.

d $\vec{v} = (x, y, z)_E \rightarrow -\vec{v} = (-x, -y, -z)_E$

Exercícios:

1. Prove que $\vec{u} = \vec{0} \longleftrightarrow \vec{u} = (0, 0, 0)_E$. (item c) acima).
2. Prove o item d) acima.
3. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, calcule as coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
4. O vetor $\vec{t} = (4, 0, 13)$ é combinação linear de $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$?

1. $\vec{0} = \vec{u} = (x, y, z)_E \rightarrow \vec{0} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Mas $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$. Segue da Proposição 8 que $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Reciprocamente

$$\vec{u} = (0, 0, 0)_E \rightarrow \vec{u} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

2. $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = (1, -1, 3) + 2(2, 1, 3) - 3(-1, -1, 4) = (1, -1, 3) + (4, 2, 6) + (3, 3, -12) = (8, 4, -3)$.
3. $(4, 0, 13) = x(1, -1, 3) + y(2, 1, 3) + z(-1, -1, 4) = (x + 2y - z, -x + y - z, 3x + 3y + 4z)$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 13 \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = 1$. Logo $\vec{t}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$.

Exemplos:

1. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 4, 6)$ são LI ou LD?
2. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{w} = (2, 4, 5)$ são LI ou LD?
3. $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$ são LI ou LD?

LD - aula 2

1. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, ou seja, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta\vec{u}$.
2. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, existem escalares x, y e z não todos nulos tais que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Voltemos ao exemplo 3: para verificar se $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$ são LI ou LD temos que resolver a equação

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

se a única solução for $x = y = z = 0$ então os vetores são LI, caso contrário, LD. Vamos reescrever $(*)$:

$$x(1, -1, 3) + y(2, 1, 3) + z(-1, -1, 4) = (0, 0, 0)$$

$$(x + 2y - z, -x + y - z, 3x + 3y + 4z) = (0, 0, 0).$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que as colunas da matriz A são as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Temos um sistema linear homogêneo de 3 equações e 3 incógnitas. O sistema tem solução única trivial se $\det(A) \neq 0$. $(AX = 0 \leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0 \leftrightarrow I.X = X = 0)$.

Proposição: Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$ são LD $\longleftrightarrow$

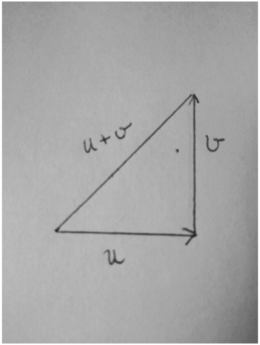
$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Aqui estamos usando o fato que $\det(A) = \det(A^t)$.

Definição: (a) Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$ e as retas AB e AC são perpendiculares.
(b) O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Proposição Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais $\longleftrightarrow$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$



Definição: Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é ortonormal se:
(a) $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$, em outras palavras, os vetores da base são unitários.
(b) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, e $\vec{e}_3$ são dois a dois ortogonais.

Proposição Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Se $\vec{v} = (x, y, z)_E$ então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 4

Roberta Wik Atique

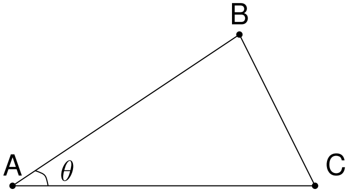
Medida Angular entre vetores

Definição: Sejam $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$ vetores não nulos. A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $B\hat{A}C$.
Observe que:

1. $0 \leq \theta \leq \pi$ se θ for em radianos ou $0 \leq \theta \leq 180$ se θ for em graus.
2. A medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ independe dos representantes $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ com a mesma origem de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.
3. Se $\theta < \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo agudo.
4. Se $\theta > \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo obtuso.
5. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo reto.
6. Seja α a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$. Se $\theta = \alpha$ dizemos que $\vec{u}$ forma ângulos congruentes com $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\theta + \alpha = \pi$ dizemos que $\vec{u}$ forma ângulos suplementares com $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Notação: $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Vamos aplicar a lei dos cossenos no triângulo *BAC*:



Onde $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \vec{CB}$.

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}_{\text{produto escalar}}$$

Produto Escalar

Definição: O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o número real definido por:

a Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

b Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$

onde θ é a medida angular entre eles.

Proposição:

a Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ então

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

b $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

c $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} \longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposição: Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E$. Então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Prova: Vimos que:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$-2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2 = -2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Portanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Exercícios

Nos exercícios todas as coordenadas se referem a uma base ortonormal fixada.

Exercício 1: Determine x de modo que $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$ sejam ortogonais.
Solução:

Nos exercícios todas as coordenadas se referem a uma base ortonormal fixada.

Exercício 1: Determine x de modo que $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$ sejam ortogonais.
Solução:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = x + 0 + 9,$$

$$x = -9.$$

Exercício 2: Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$.

Exercício 2: Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$.

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\vec{u} = (1, -1, -1).$$

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.
$\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ são LD:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = x - 3y + 2z = 0$$

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.
$\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ são LD:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = x - 3y + 2z = 0$$

$\vec{w}$ é ortogonal a $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$:

$$\begin{cases} 1 - x - y + 3 - z = 0 & \longrightarrow x + y + z = 4 \\ -(1 - x) - y + 2(3 - z) = 0 & \longrightarrow x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2) \text{ e } \vec{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$$

Proposição: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

b $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

c $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

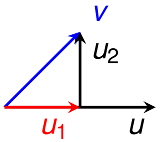
d Se $\vec{u} \neq \vec{0} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Exercício: Classifique como verdadeiro ou falso.

1. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
2. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$.
3. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
4. $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{w}} = \dfrac{\vec{v}}{\vec{w}}$

Projeção Ortogonal

Exercício: Decomponha o vetor $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ como uma soma de um vetor paralelo a $\vec{u} = (1, 5, 4)$ e um vetor ortogonal a $\vec{u}$.



Vamos escrever $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ onde $\vec{u}_1 = \alpha\vec{u} = \alpha(1, 5, 4)$ e $\vec{u}_2 \cdot \vec{u} = 0$.

$$\vec{u}_2 = \vec{v} - \vec{u}_1 = (-3 - \alpha, 4 - 5\alpha, 1 - 4\alpha)$$

$$0 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u} = (-3 - \alpha, 4 - 5\alpha, 1 - 4\alpha) \cdot (1, 5, 4) = 21 - 42\alpha.$$

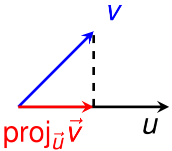
Portanto $\alpha = 1/2$, $\vec{u}_1 = (1/2, 5/2, 2)$ e $\vec{u}_2 = (-7/2, 3/2, -1)$.

Definição: Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. Dado um vetor qualquer $\vec{v}$ o vetor $\vec{w}$ satisfazendo as propriedades abaixo é chamado de projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

a $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u}$.

b $\vec{v} - \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Notação: $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.



Proposição:

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\ \vec{u}.$$

Prova: $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \alpha\vec{u}$ onde

$$0 = (\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v})\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u} - \alpha\vec{u}\cdot\vec{u}.$$

Portanto,

$$\alpha\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Exercício

(Exercício 9-61 Boulos) Em relação a uma base ortonormal, sebe-se que $\overrightarrow{AB} = (2, \sqrt{3}, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{3}, 1)$.

- **a** Verifique que A, B e C são vértices de um triângulo.
- **b** Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A e a área do triângulo.

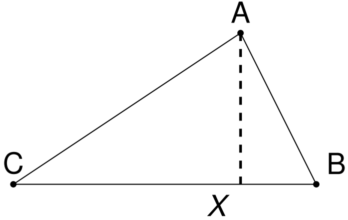
Resolução:

(a) Segue do fato de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ ser LI. Alternativamente, seja θ a medida angular entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(2, \sqrt{3}, 1) \cdot (-1, \sqrt{3}, 1)}{\sqrt{4+3+1}\sqrt{1+3+1}} = \frac{-2+3+1}{\sqrt{40}}.$$

Como $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \neq 1, -1$ segue que A, B e C são vértices de um triângulo.

(b)



Vamos projetar ortogonalmente $\overrightarrow{CA} = (1, -\sqrt{3}, -1)$ sobre $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (1, -\sqrt{3}, -1) + (2, \sqrt{3}, 1) = (3, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{CX} = \text{proj}_{\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|^2}\overrightarrow{CB} = \frac{(1, -\sqrt{3}, -1) \cdot (3, 0, 0)}{\|(3, 0, 0)\|^2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CX} = \frac{3}{9}(3, 0, 0) = (1, 0, 0).$$

Portanto o comprimento da altura é

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}\| = \|(-1, \sqrt{3}, 1) + (1, 0, 0)\| = \|(0, \sqrt{3}, 1)\|$$

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

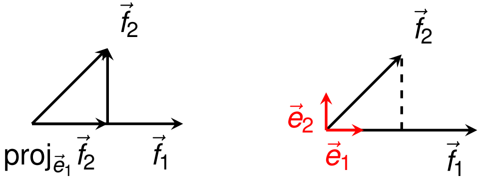
e a área do triângulo é

$$2\|\overrightarrow{CB}\|/2 = \sqrt{9} = 3.$$

Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

Seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ uma base dada. Vamos construir uma base ortonormal $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ onde $\vec{e}_1$ é paralelo a $\vec{f}_1$ e $\vec{e}_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2$ são LD.

1. $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$, ou seja, $\vec{e}_1$ é o versor de $\vec{f}_1$.
2. $$\vec{e}_2 = \frac{\vec{f}_2 - \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2 - \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_2\|}$$



3. $$\vec{e}_3 = \frac{\vec{f}_3 - \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 - \text{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3 - \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 - \text{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3\|}$$

Exercício 1: Mostre que $\vec{e}_3$ é ortogonal a $\vec{e}_1$ e é ortogonal a $\vec{e}_2$.

Exercício 2: Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt na base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$ e $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

- $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \dfrac{(1, 2, 2)}{3}$.
- $\text{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2 = (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 = 1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

  $\vec{f}_2 - \text{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2 = (1, 0, 1) - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

  $\vec{e}_2 = \frac{(2/3,-2/3,1/3)}{\|(2/3,-2/3,1/3)\|} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

- $\mathrm{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 = (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \frac{5}{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

  $\mathrm{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3 = (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

  $\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3$

  $(1, 1, 1) - \frac{5}{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - \frac{1}{3}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9})$

  $\vec{e}_3 = 3(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 5

Roberta Wik Atique

Mudança de Base

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases de V^3. Dado $\vec{u} \in V^3$, temos

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{u} = (y_1, y_2, y_3)_F = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3$$

Objetivo: Obter relações entre x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3. Para isto precisamos escrever os vetores de uma base em relação a outra base.

Podemos escrever:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) +$$

$$y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) =$$

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 +$$

$$(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Portanto:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Definição: A matriz A acima é chamada de matriz mudança de base da base E para a base F. Notação: $A = M_{EF}$.

Temos:

$$\vec{u}_E = M_{EF}\vec{u}_F.$$

Proposição: $M_{FE} = M_{EF}^{-1}$.

Exercício

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases de V^3 tais que

$$\vec{f}_1 = (2, 2, 0)_E, \ \ \vec{f}_2 = (2, -1, 0)_E, \ \ \vec{f}_3 = (1, 1, -5)_E.$$

Verifique se

$$\vec{u} = (2, 2, 0)_F, \ \ \vec{v} = (1, 0, 1)_E, \ \ \vec{w} = (-4, 0, -2)_E$$

são LI ou LD.
Temos que

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_E = M_{EF}\vec{u}_F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para verificar se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI ou LD precisamos calcular:

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Logo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI.

Orientação

Definição: Uma orientação de V^3 consiste em fixar uma base E que é chamada positiva.

Seja F uma base qualquer de V^3. Dizemos que F é uma base positiva se $\det M_{EF} > 0$ (ou $\det M_{FE} > 0$). Caso contrário dizemos que F é uma base negativa

Regra da mão direita

- Considere uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formada pelos dedos médio, indicador e polegar da mão esquerda (nesta ordem). Encolha os outros dedos.

- Coloque a mão direta com os dedos indicando a direção e sentido do vetor $\vec{e}_1$ e com a palma da mão voltada para o semi-espaço onde está o vetor $\vec{e}_2$.

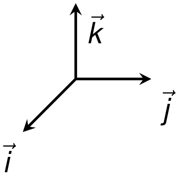
  

  Gire a mão direita fechando-a na direção do vetor $\vec{e}_2$. O polegar da mão direita deverá indicar o mesmo sentido do polegar da mão esquerda.
- Repita o mesmo processo para os vetores $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

Base Ortonormal Positiva

Definição: Denotaremos por $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal que satisfaz a regra da mão direita.

No que segue consideraremos que uma base que satisfaz a regra da mão direita é uma base positiva.



SMA0300-Geometria Analítica - Aula 6

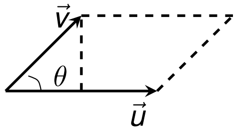
Roberta Wik Atique

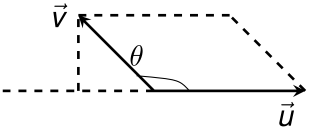
Produto Vetorial

Definição: O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor, indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tal que:

1. Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ então
   - **a** Módulo: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$,
   - **b** Direção: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$,
   - **c** Sentido: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva.

Observação 1: Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LI: considere o paralelogramo $ABCD$ onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo. De fato, $\|\vec{u}\|$ é a base e se θ for um ângulo agudo $\|\vec{v}\| \sin\theta$ é a altura. Se θ for um ângulo obtuso $\|\vec{v}\| \sin(\pi - \theta) = \|\vec{v}\| \sin\theta$ é a altura.



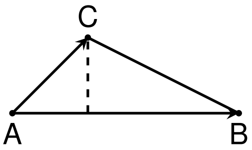


Observação 2: Se $(\vec{u}, \vec{v})$ LI então $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ (por que?). Logo

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ é LD}$$

Observação 3: Seja h a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB. Então

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$



De fato, $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\| h}{2}$.

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2, 2, 1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2, 2, 1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha(2, 2, 1) = (2\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2, 2, 1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha(2, 2, 1) = (2\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2,2,1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha(2,2,1) = (2\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2} = 3|\alpha|$$

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2,2,1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha(2,2,1) = (2\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2} = 3|\alpha|$$

Portanto $\alpha = \pm 1/6$. Como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2,2,1)_E$ são de mesmo sentido, $\alpha = 1/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1/3, 1/3, 1/6)_E$.

Proposição: Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$ então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Para decorar:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Seja $\vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Prova:

1. Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LD. Então (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são proporcionais e o determinante acima é nulo.
2. Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LI.

a Seja θ medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2} + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}.$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$$

$$= x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2.$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2$$

$$= \|(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)\|^2 = \|\vec{w}\|^2.$$

b $(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_1, y_1, z_1) =$
$x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + y_1x_2z_1 - y_1x_1z_2 + z_1x_1y_2 - z_1x_2y_1 = 0.$

$(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 0.$

c Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1z_2 - y_2z_1 \\ y_1 & y_2 & x_2z_1 - x_1z_2 \\ z_1 & z_2 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\det M_{BE} = (y_1z_2 - y_2z_1)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} -$$

$$(x_2z_1 - x_1z_2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 > 0.$
Portanto E é base positiva.

Exercício: Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ onde $\vec{u} = (6, -2, -4)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -10\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k} = (-10, -10, -10)$$

Proposição: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

b $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

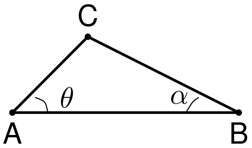
c $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

d $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

Exercício 1: Prove que se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$.

Vimos na observação 2 que $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{u})$ é LD. Analogamente, $(\vec{w}, \vec{v})$ é LD. Assim $\vec{w}$ é um vetor paralelo a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Observe que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{w} \neq \vec{0}$ então teremos 3 vetores não nulos e paralelos entre si, logo $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD, contrariando a hipótese.

Exercício 2: Demonstre a lei dos senos, segunda a qual, em qualquer triângulo, são iguais as razões entre os senos dos ângulos internos e as medidas dos respectivos lados opostos.



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta$$

$$\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \sin\alpha$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \sin\alpha$$

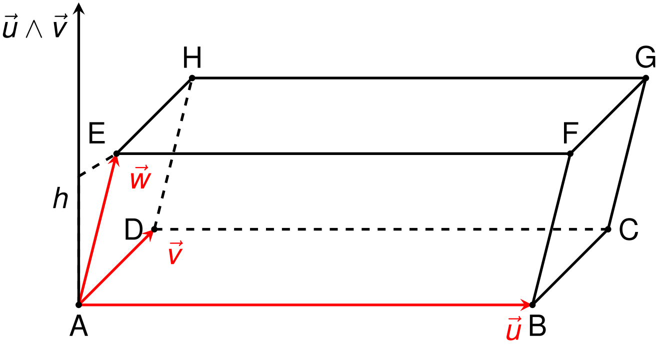
$$\frac{\sin\theta}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 7

Roberta Wik Atique

Produto Misto

Objetivo: Calcular o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$.



Onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

A altura do paralelepípedo é o módulo da projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2}\vec{u}\wedge\vec{v}.$$

$$h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w}\| = \frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2}\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

O volume do paralelepípedo é área da base vezes a altura:

$$V = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = |\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})| = |(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}|$$

Definição: O produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (NESTA ORDEM) é o número real:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Proposição: Em relação à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{A}$$

Prova:

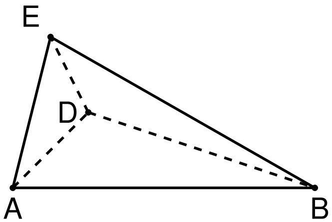
$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (a_3, b_3, c_3)$$

$$= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det A$$

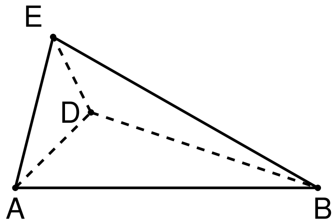
Propriedades:

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$.
2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD $\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$
3. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base positiva.
4. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$ então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base negativa.
5. $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$.
6. $[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$.
7. $[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$.
8. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}]$.

Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 1, 2)$ (em relação a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

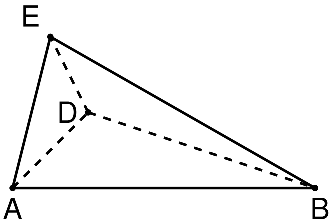


Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 1, 2)$ (em relação a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).



$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$, $\overrightarrow{AE} = (2,1,2)$ (em relação a base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).



$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$V = |-3|/6 = 3/6 = 1/2$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 8
Sistemas de coordenadas e retas

Roberta Wik Atique

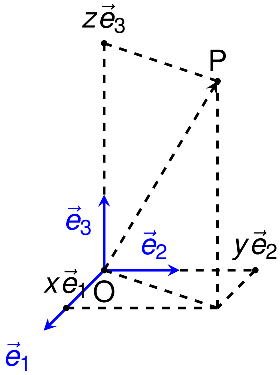
Sistema de coordenadas

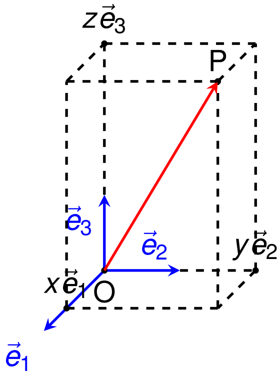
Definição: Um sistemas de coordenadas em E^3 é um par $S = (O, E)$, onde O é um ponto fixado em E^3, chamado de origem, e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base.

Coordenadas: Dado um sistemas de coordenadas $S = (O, E)$ e um ponto $P \in E^3$, escrevemos o vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E$. Dizemos que x, y, e z são as coordenadas do ponto P no sistema S: $P = (x, y, z)_S$.

$$P = (x, y, z)_S \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E,$$

x é chamada de *abscissa*, y é chamada de *ordenada* e z é chamada de *cota*.

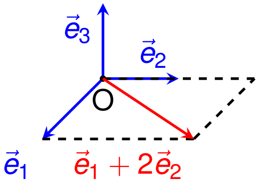

$z\vec{e}_3$
P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
$y\vec{e}_2$
$x\vec{e}_1$
O
$\vec{e}_1$

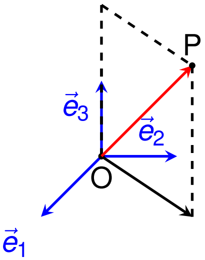


$z\vec{e}_3$
P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
$y\vec{e}_2$
$x\vec{e}_1$
O
$\vec{e}_1$

Exercício

Desenhe $P = (1,2,2) \;\; \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$




P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$

Soma de ponto com vetor

Definição: Sejam $A \in E^3$ e $\vec{u} \in V^3$. Definimos a soma

$$A + \vec{u} = B \iff \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Propriedades: Seja $S = (O, E)$ um sistema de coordenadas e $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$.

(a) $A + \overrightarrow{AB} = B$.

(b) $O + \overrightarrow{OA} = A$.

(c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) =$
$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = B - A$.

(d) $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)$.

Ponto médio

Exercício: Dados $A, B \in E^3$, encontre as coordenadas de M, o ponto médio do segmento AB, sabendo que $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$:

$$M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Distância entre dois pontos

Seja $S = (O, E)$ um sistema de coordenadas onde E é base ortonormal. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ pontos em E^3. Então a distância entre A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Equação Vetorial da Reta

Axioma: Dois pontos distintos em E^3 determinam uma única reta.

Objetivo: Encontrar uma equação da reta determinada por A e B.
Seja r a reta determinada por A e B. Seja X um ponto qualquer de r. Note que $X = A + \overrightarrow{AX}$

$$X \in r \;\Leftrightarrow\; (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}) \text{ é LD}$$

$$\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow X = A + \lambda \overrightarrow{AB},$$

para algum número real λ.

Equação vetorial da reta AB:

$$\boxed{X = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Definição: Qualquer vetor NÃO NULO paralelo a uma reta chama-se vetor diretor dessa reta.

Observação: O vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB. Qualquer vetor não nulo paralelo a $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB.

Um ponto e um vetor não nulo determinam uma única reta. Seja $A \in E^3$ um ponto e $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se X é um ponto da reta, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u})$ é LD. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u}$. Assim, a equação vetorial da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A} + \lambda\, \vec{u}, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos

Exemplo 1: Sejam $A = (0, 1, 1)$ e $B = (1, 2, 1)$. Determine uma equação vetorial da reta AB.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1) - (0, 1, 1) = (1, 1, 0)$$

$$X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0), \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

O ponto $C = (2, 3, 1)$ pertende à reta AB?
O ponto $D = (2, 3, 2)$ pertence à reta AB?

Exemplo 2: Sejam $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{u} = (2, -1, 5)$. A equação vetorial da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$X = (1, 0, 3) + \lambda(2, -1, 5), \ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Equações paramétricas da reta

Dados $S = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ um sistema de coordenadas, $A = (x_0, y_0, z_0)$ ponto em E^3 e $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor não nulo. Seja r a reta determinada por A e $\vec{u}$. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer de r:

$$X = (x, y, z) = A + \lambda\vec{u} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c),$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda \in \mathbb{R})$$

Exemplo 3: Sejam $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 1, 3)$. Determine equações paramétricas da reta AB.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 1) = (1, -1, 2)$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda \in \mathbb{R})$$

Exemplo 4: Sejam $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{u} = (2, -1, 5)$. As equações paramétricas da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda \in \mathbb{R})$$

Equações da reta na forma simétrica

Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em E^3 e $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor não nulo tal que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Seja r a reta determinada por A e $\vec{u}$. Seja $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a}, \quad \lambda = \frac{y - y_0}{b}, \quad \lambda = \frac{z - z_0}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

são chamadas de equações da reta r na forma simétrica.

Exemplo 5: Sejam $A = (1, 1, 3)$ e $\vec{u} = (2, 1, 5)$. As equações da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ na forma simétrica é:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 3}{5}.$$

Posição relativa entre retas

Considere as retas:

$$r : X = A + \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{(I)}$$

$$s : X = B + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \qquad \text{(II)}$$

Em E^3 as retas podem ser:

- retas coplanares: paralelas ou concorrentes,
- retas não coplanares: reversas.

Proposição 1: r e s são retas coplanares. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LD. Além disso:

(a) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD então r e s são retas paralelas ou (I) e (II) são equações da mesma reta e neste caso dizemos que r e s são coincidentes.

(b) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI então r e s são retas concorrentes.

Proposição 2: Se $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LI então r e s são retas reversas.

Resumo

$r : X = A + \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
$s : X = B + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R})$

- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LD e $(\vec{u}, \vec{v})$ LD: paralelas ou coincidentes (neste caso basta verificar se $A \in s$).
- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LD e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI: concorrentes (um ponto em comum).
- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LI: reversas.

Exercícios

Exercício 1: Sejam $A=(1,2,5)$ e $B=(0,1,0)$. Determine o ponto P da reta AB tal que $\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\|$.

Resolução: $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-5)$. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + \lambda\overrightarrow{AB} = (1,2,5) + \lambda(-1,-1,-5) = (1-\lambda, 2-\lambda, 5-5\lambda)$.

$$\|\overrightarrow{PB}\| = \|(-1+\lambda, -1+\lambda, -5+5\lambda)\| = 3\|\overrightarrow{PA}\| = 3\|(\lambda,\lambda,5\lambda)\|$$

$$\sqrt{(-1+\lambda)^2 + (-1+\lambda)^2 + (-5+5\lambda)^2} = 3\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+(5\lambda)^2}$$

$$27(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 9.27.\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad 8\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$\lambda = 1/4$ ou $\lambda = -1/2 \Rightarrow P = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4})$ ou $P = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2})$.

Exercício 2: Encontre a posição relativa entre
$r : X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$ e $s : X = (3,-4,4) + \mu(1,-2,2)$.

Resolução: $\vec{u} = (2,-1,3)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ e
$\overrightarrow{AB} = (3,-4,4) - (8,1,9) = (-5,-5,-5)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 9
Planos

Roberta Wik Atique

Axioma: Três pontos não colineares em E^3 determinam um único plano.

Objetivo: Encontrar uma equação do plano determinado pelos pontos A, B e C não colineares. Observe que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é LI
Seja π o plano determinado por A, B e C. Seja X um ponto qualquer de π. Note que $X = A + \overrightarrow{AX}$

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ é LD}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

para um par de números reais λ, μ.

Equação vetorial do plano ABC:

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Definição: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI paralelos ao plano π são chamados de vetores diretores deste plano.

Observação: Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores diretores do plano ABC.

Um ponto e dois vetores LI determinam um único plano. Seja $A \in E^3$ um ponto e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI. Se X é um ponto do plano, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ é LD. Logo existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Assim, a equação vetorial do plano que passa por A e cujos vetores diretores são $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Equações paramétricas do plano

Dados $S = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ um sistema de coordenadas, $A = (x_0, y_0, z_0)$ ponto em E^3, $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (m, n, p)$ vetores LI. Seja π o plano determinado por A, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer de π:

$$X = (x, y, z) = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p),$$

$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a + \mu m, y_0 + \lambda b + \mu n, z_0 + \lambda c + \mu p),$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemplos

Exemplo 1: Sejam $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 1, 0)$. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π determinado por A, B e C.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 1) = (1, -1, 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 0) - (1, 2, 1) = (2, -1, -1).$$

$$X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(2, -1, -1).$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemplo 2: $A = (1, 0, 3) \in \pi$? Encontre um ponto do plano π.

Equação geral do plano

Seja π o plano determinado por $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$.

$$X = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ é LD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(sp - tn)(x - x_0) + (tm - rp)(y - y_0) + (rn - sm)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Equação Geral do Plano:

$$\boxed{\text{ax+by+cz+d=0}}$$

Exercício 1: Encontre uma equação geral do plano determinado por $A = (1, 1, 0)$, $\vec{u} = (0, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x + 2y - 4z - 1 = 0$$

$$x - 2y + 4z + 1 = 0.$$

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

$\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são vetores diretores do plano.

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

$\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são vetores diretores do plano.

$$\overrightarrow{AP} = (4, 1, -1) - (2, 4, 1) = (2, -3, -2)$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8x - 6y + z + 39 = 0.$$

Posição relativa entre reta e plano

Considere uma reta r e um plano π. Podemos ter:

- r é paralela a π.
- r está contida em π.
- r é transversal a π (ou concorrente com π).

Sejam $A \in r$ e $\vec{u}$ um vetor diretor de r. Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de π.

- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ LD e A NÃO pertence a π então r é paralela a π.
- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ LD e $A \in \pi$ então r está contida em π.
- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ é LI então r é transversal a π.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \quad X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \quad X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

$\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \ \ x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \ \ X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$.

$\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_2 = (2,2,0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \; x-1=2y=2z$ e
$\pi: \; X=(3,0,1)+\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,0)$.

$\vec{u}=(2,1,1)$, $\vec{v}_1=(1,0,1)$ e $\vec{v}_2=(2,2,0)$.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M=0$.
Seja $A=(1,0,0)\in r$.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \quad X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$.

$\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_2 = (2,2,0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$.
Seja $A = (1,0,0) \in r$.
Como A não pertence a π então r é paralela a π.

Exemplo 2: Encontre m para que $r: \; X = (1,0,0) + t(m,2,m)$ seja transversal ao plano $\pi: \; x + my + z = 0$.

Exemplo 2: Encontre m para que $r: \; X = (1,0,0) + t(m,2,m)$ seja transversal ao plano $\pi: \; x + my + z = 0$.

$\vec{u} = (m,2,m)$. Sejam $A = (1,0,-1)$, $B = (0,1,-m)$ e $C = (-m,1,0)$ pontos de π. $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (-1,1,-m+1)$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (-m-1,1,1)$.

$$M = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ -1 & 1 & -m+1 \\ -m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 4m^2$. Então a reta é tranversal ao plano para todo $m \neq 0$.

Vetor normal a um plano

Definição: Um vetor não nulo $\vec{\eta} \in V^3$ é um vetor normal a um plano π se for ortogonal a todo vetor paralelo a π.

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de π. Todo vetor $\vec{v}$ paralelo a π é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Isto é, existem escalares α e β tais que $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Se $\vec{\eta}$ é ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ então

$$\vec{\eta} \cdot \vec{v} = \vec{\eta} \cdot (\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\,\vec{\eta} \cdot \vec{v}_1 + \beta\,\vec{\eta} \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

Proposição: Um vetor $\vec{\eta} \in V^3$ é normal a um plano π se for ortogonal aos vetores diretores de π.

Proposição: $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ é normal a π.

Proposição: Se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral do plano π então $\vec{\eta} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π.

Prova: Seja $\vec{v} = (m, n, p)$ um vetor paralelo a π. Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π ($\Rightarrow$ $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$) . Então $A + \vec{v} = (x_0 + m, y_0 + n, z_0 + p)$ é um ponto de π, logo satisfaz a equação:

$$0 = a(x_0 + m) + b(y_0 + n) + c(z_0 + p) + d =$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 + d + am + bn + cp = am + bn + cp$$

$$\vec{\eta} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (m, n, p) = am + bn + cp = 0.$$

Um ponto e um vetor normal determinam um plano: seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\vec{\eta} = (a, b, c)$ um vetor não nulo. O plano π que passa por A e $\vec{\eta}$ é normal tem equação:

$$X = (x, y, z) \in \pi \; \Leftrightarrow \; \overrightarrow{AX} \cdot \vec{\eta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

fazendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ temos que $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação de π.

Exemplos

Exemplo 1: Seja π o plano dado por $2x - 5y + z = 0$. Então $\vec{\eta} = (2, -5, 1)$ é um vetor normal a π.

Exemplo 2: Seja π o plano dado pelas equações

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Então $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, -1)$ são vetores diretores de π. Logo $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ é normal a π:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 5, 1)$$

Exemplo 3: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $A = (1, 2, 1)$ e $\vec{\eta} = (3, 3, -1)$ é um vetor normal:

$$3(x-1) + 3(y-2) - (z-1) = 3x + 3y - z - 8 = 0.$$

Posição relativa entre plano e plano:

(a) Dois planos são paralelos ou coincidentes se têm vetores normais paralelos.

(b) Dois planos são transversais se têm vetores normais LI.

Exemplos:

1. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $x - 2y + z - 3 = 0$ são paralelos.
2. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $x + 2y + z - 2 = 0$ são transversais.
3. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $2x - 4y + 2z - 4 = 0$ são coincidentes.

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 10
Perpendicularismo e ortogonalidade

Roberta Wik Atique

Exercício

Obtenha uma equação geral do plano π que contém $s : x - y - z + 1 = 0 = 3y - z$ e é paralelo a $r : X = (2,0,2) + \lambda(1,1,1)$.

Resolução:

$$s : \begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = \mu \\ z = 3\mu \end{cases} .$$

Um vetor normal ao plano é $(4,1,3) \wedge (1,1,1) = (-2,-1,3)$.
Como o plano contém s, o ponto $(-1,0,0)$ pertence ao plano:

$$-2(x+1) - (y-0) + 3(z-0) = 0 \ \Rightarrow \ -2x - y + 3z - 2 = 0.$$

Definição: Sejam r e s duas retas e π um plano.

1. r e s são perpendiculares se forem concorrentes e seus vetores diretores forem ortogonais.
2. r e s são ortogonais se forem reversas e seus vetores diretores forem ortogonais.
3. r é perpendicular a π se seu vetor diretor for paralelo ao vetor normal de π.
4. Dois planos são perpendiculares se seus vetores normais são ortogonais.

Exercícios

Exercício 1: Verifique se

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1) = A + \lambda\vec{u}$$

$$s : X = (2, 4, 4) + \mu(-1, 1, -1) = B + \mu\vec{v}$$

são ortogonais ou perpendiculares.

Exercícios

Exercício 1: Verifique se

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1) = A + \lambda\vec{u}$$

$$s : X = (2, 4, 4) + \mu(-1, 1, -1) = B + \mu\vec{v}$$

são ortogonais ou perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 1) \cdot (-1, 1, -1) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

Exercícios

Exercício 1: Verifique se

$$r : X = (1,2,3) + \lambda(1,2,1) = A + \lambda\vec{u}$$

$$s : X = (2,4,4) + \mu(-1,1,-1) = B + \mu\vec{v}$$

são ortogonais ou perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,2,1) \cdot (-1,1,-1) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} = (2,4,4) - (1,2,3) = (1,2,1).$$

Exercícios

Exercício 1: Verifique se

$$r : X = (1,2,3) + \lambda(1,2,1) = A + \lambda\vec{u}$$

$$s : X = (2,4,4) + \mu(-1,1,-1) = B + \mu\vec{v}$$

são ortogonais ou perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,2,1) \cdot (-1,1,-1) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} = (2,4,4) - (1,2,3) = (1,2,1).$$

Como $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LD então r e s são concorrentes e portanto perpendiculares.

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta
$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta
$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Seja
$X = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ um ponto de r. Então
$\overrightarrow{PX} = (\lambda, 2 - \lambda, 0) - (2, 6, 1) = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1)$ é ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 0)$, vetor diretor de r.

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta
$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Seja
$X = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ um ponto de r. Então
$\overrightarrow{PX} = (\lambda, 2 - \lambda, 0) - (2, 6, 1) = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1)$ é ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 0)$, vetor diretor de r.

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{u} = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1) \cdot (1, -1, 0) = \lambda - 2 + 4 + \lambda = 2\lambda + 2 = 0.$$

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta
$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Seja
$X = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ um ponto de r. Então
$\overrightarrow{PX} = (\lambda, 2 - \lambda, 0) - (2, 6, 1) = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1)$ é ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 0)$, vetor diretor de r.

$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{u} = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1) \cdot (1, -1, 0) = \lambda - 2 + 4 + \lambda = 2\lambda + 2 = 0.$

Portanto $\lambda = -1$.

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Seja

$X = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ um ponto de r. Então $\overrightarrow{PX} = (\lambda, 2 - \lambda, 0) - (2, 6, 1) = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1)$ é ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 0)$, vetor diretor de r.

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{u} = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1) \cdot (1, -1, 0) = \lambda - 2 + 4 + \lambda = 2\lambda + 2 = 0.$$

Portanto $\lambda = -1$. $s : X = P + \mu\overrightarrow{PX} = (2, 6, 1) + \mu(-3, -3, -1)$.

Exercícios

Exercício 4: Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : 2x + y - z = 2.$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é $\vec{\eta} = (2, 1, -1)$. Logo

Exercícios

Exercício 4: Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : 2x + y - z = 2.$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é $\vec{\eta} = (2, 1, -1)$. Logo

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, -1).$$

Exercícios

Exercício 5: Obtenha uma equação geral do plano π que contém $P = (0, 1, -1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é um vetor $\vec{u}$ diretor da reta.

Exercício 5: Obtenha uma equação geral do plano π que contém $P = (0, 1, -1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é um vetor $\vec{u}$ diretor da reta.

$$\vec{u} = (1, -2, 1) \wedge (2, -3, 1) = (1, 1, 1).$$

Exercícios

Exercício 5: Obtenha uma equação geral do plano π que contém $P = (0, 1, -1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é um vetor $\vec{u}$ diretor da reta.

$$\vec{u} = (1, -2, 1) \wedge (2, -3, 1) = (1, 1, 1).$$

Logo uma equação geral do plano é

$$1(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z + 1) = 0$$

$$x + y + z = 0.$$

Exercícios

Exercício 6: (a) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (1, 4, 2)$ sobre o plano $\pi : x - y + z = 2$.
(b) Obtenha o ponto simétrico de P em relação a π.
(c) Calcule a distância de P a π.

Resolução:

(a) Considere a reta que passa por P e é perpendicular a π:

Exercício 6: (a) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (1, 4, 2)$ sobre o plano $\pi : x - y + z = 2$.
(b) Obtenha o ponto simétrico de P em relação a π.
(c) Calcule a distância de P a π.

Resolução:

(a) Considere a reta que passa por P e é perpendicular a π:

$$X = (1, 4, 2) + \lambda(1, -1, 1).$$

Queremos encontrar o ponto de interseção da reta com o plano: $Q = (1 + \lambda, 4 - \lambda, 2 + \lambda) \in \pi$,

Exercícios

Exercício 6: (a) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (1, 4, 2)$ sobre o plano $\pi : x - y + z = 2$.
(b) Obtenha o ponto simétrico de P em relação a π.
(c) Calcule a distância de P a π.

Resolução:

(a) Considere a reta que passa por P e é perpendicular a π:

$$X = (1, 4, 2) + \lambda(1, -1, 1).$$

Queremos encontrar o ponto de interseção da reta com o plano: $Q = (1 + \lambda, 4 - \lambda, 2 + \lambda) \in \pi$,

$$1 + \lambda - (4 - \lambda) + (2 + \lambda) = 2,$$

$$3\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad Q = (2, 3, 3)$$

(b) Qual é o valor do parâmetro λ que dá o ponto simétrico de P? Por que?

(b) Qual é o valor do parâmetro λ que dá o ponto simétrico de *P*? Por que?

$$\lambda = 2$$

(b) Qual é o valor do parâmetro λ que dá o ponto simétrico de P? Por que?

$$\lambda = 2$$

$$P' = (3, 2, 4)$$

ou

(b) Qual é o valor do parâmetro λ que dá o ponto simétrico de P? Por que?

$$\lambda = 2$$

$$P' = (3, 2, 4)$$

ou

$$P' = P + 2\overrightarrow{PQ} = (1, 4, 2) + 2[(2, 3, 3) - (1, 4, 2)] = (3, 2, 4)$$

(c)

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 11
Distâncias

Roberta Wik Atique

Seja $S = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$.

Distância entre dois pontos

Sejam $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos:

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Distância entre ponto e reta

Sejam P um ponto e $r : X = A + \lambda\vec{u}$ uma reta, $P \notin r$. Seja B outro ponto de r. A distância de P a r é altura do triângulo ABP relativa ao lado AB:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$

Distância entre ponto e plano

Sejam P um ponto e π um plano, $P \notin \pi$. Seja A um ponto de π e $\vec{\eta}$ um vetor normal ao plano. A distância de P a π é a norma da projeção de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{\eta}$:

$$\boxed{d(P,\pi) = \|\text{proj}_{\vec{\eta}}\overrightarrow{AP}\| = |\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{\eta}|}{\|\vec{\eta}\|}}$$

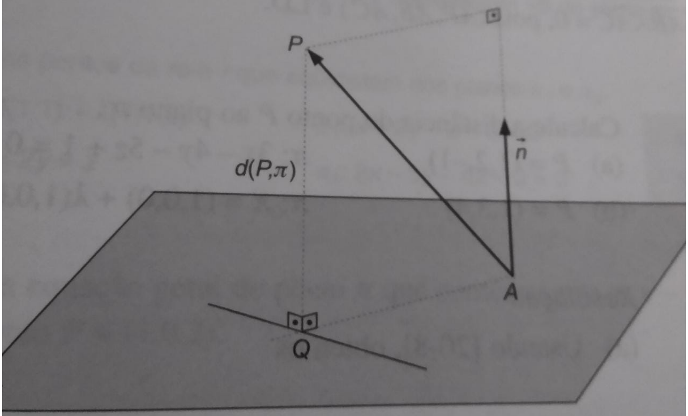


Figura 20-8

$\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_1, y_1, z_1)$,

$A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \;\Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

$\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_1, y_1, z_1)$,

$A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \ \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

$$d(P, \pi) = |\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{\eta}\|} = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_1, y_1, z_1)$,

$A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \ \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$

$$d(P, \pi) = |\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{\eta}\|} = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$
$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_1, y_1, z_1)$,

$A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \;\Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

$$d(P,\pi) = |\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{\eta}\|} = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_1, y_1, z_1)$,

$A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \ \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$

$$d(P,\pi) = |\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{\eta}\|} = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$
$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} =$$
$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Distância entre duas retas

Sejam $r : X = A + \lambda\vec{u}$ e $s : X = B + \mu\vec{v}$ duas retas.

1. Se r e s são concorrentes então $d(r, s) = 0$.
2. Se r e s são paralelas então $d(r, s) = d(A, s)$.
3. Se r e s são reversas então existe um único plano π que contém r e é paralelo a s. Este plano contém A e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor normal. Então $d(r, s) = d(B, \pi)$:

$$\boxed{d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}}$$

Distância entre reta e plano

Sejam $r : X = A + \lambda\vec{u}$ uma reta e π um plano.

1. Se r está contida em π então $d(r, \pi) = 0$.
2. Se r e π são transversais então $d(r, \pi) = 0$.
3. Se r e π são paralelos então $d(r, \pi) = d(A, \pi)$.

Distância entre planos

Sejam α e π dois planos.

1. Se α e π são transversais então $d(\alpha, \pi) = 0$.
2. Se α e π são paralelos então $d(\alpha, \pi) = d(A, \pi)$, para qualquer ponto $A \in \alpha$.

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 12
Ângulos

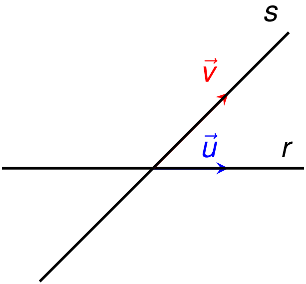
Roberta Wik Atique

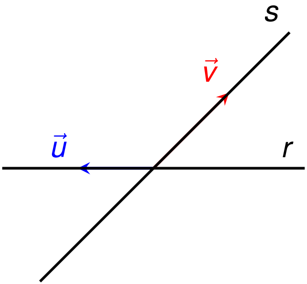
Ângulo entre duas retas

Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente.

(a) Caso r e s paralelas. Então o ângulo entre r e s é zero.

(b) Caso r e s concorrentes. O ângulo entre r e s é o menor ângulo formado por elas. Seja θ o ângulo entre r e s. Então $0 < \theta \leq \pi/2$.





Seja α o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se $0 < \alpha \leq \pi/2$ então $\theta = \alpha$ e $\cos\theta = \cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ então $\theta = \pi - \alpha$ e $\cos\theta = -\cos\alpha = -\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

(c) Caso r e s reversas. Seja s' uma reta paralela a s e concorrente com r. Então o ângulo entre r e s é o ângulo entre r e s'.

Definição: Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente. O ângulo θ entre r e s é dado por (notação $\theta =$ang(r, s)):

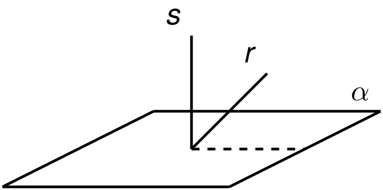
$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

Ângulo entre reta e plano

Sejam r uma reta com vetor diretor $\vec{u}$ e α um plano com vetor normal $\vec{\eta}$.

(a) Caso r paralela a α ou contida em α. Então o ângulo entre r e α é zero.

(b) Caso r e α transversais. Seja s uma reta perpendicular a α passando pelo ponto de interseção de r e α (e portanto $\vec{\eta}$ é um vetor diretor de s). O ângulo entre r e α é $\frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, s)$.



Seja $\varphi =$ang(r, s).

Definição: Sejam r uma reta com vetor diretor $\vec{u}$ e α um plano com vetor normal. $\vec{\eta}$. O ângulo θ entre r e α é dado por (notação $\theta =$ang(r, α)):

$$\boxed{\sin\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{\eta}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{\eta}\|}}$$

pois $\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi$.

Ângulo entre dois planos

Definição: Sejam α_1 e α_2 dois planos com vetores normais $\vec{\eta}_1$ e $\vec{\eta}_2$ respectivamente. Então o ângulo θ entre α_1 e α_2 é dado por:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2|}{\|\vec{\eta}_1\| \|\vec{\eta}_2\|}}$$

SMA0300-Geometria Analítica - Aula 13
Cônicas

Roberta Wik Atique

Elipse

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e $a > c$ um número real. Elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$. F_1 e F_2 são chamados focos.

Equação Reduzida: Suponha $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Seja $b^2 = a^2 - c^2$. A equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Prova

Seja $P = (x, y)$ um ponto da elipse: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Elevando ao quadrado:

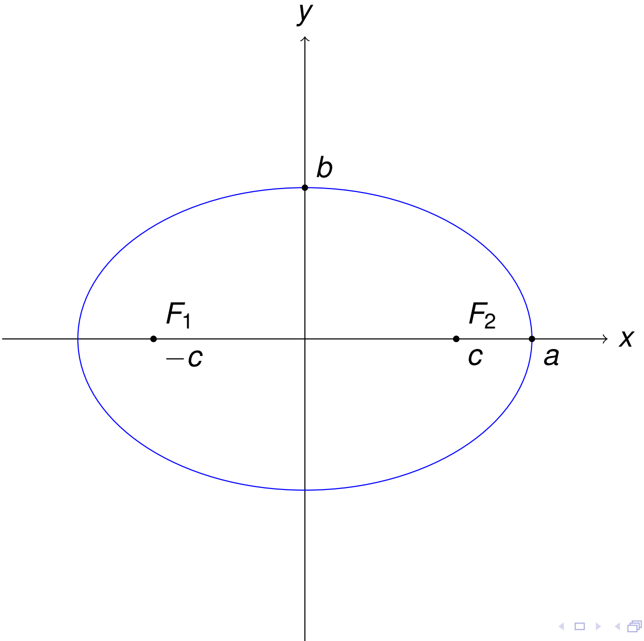
$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2$$

$$2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2c^2$$

Dividindo por 2 e elevando novamente ao quadrado temos

$$(x+c)^2(x-c)^2+y^2(x+c)^2+y^2(x-c)^2+y^4 = (2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

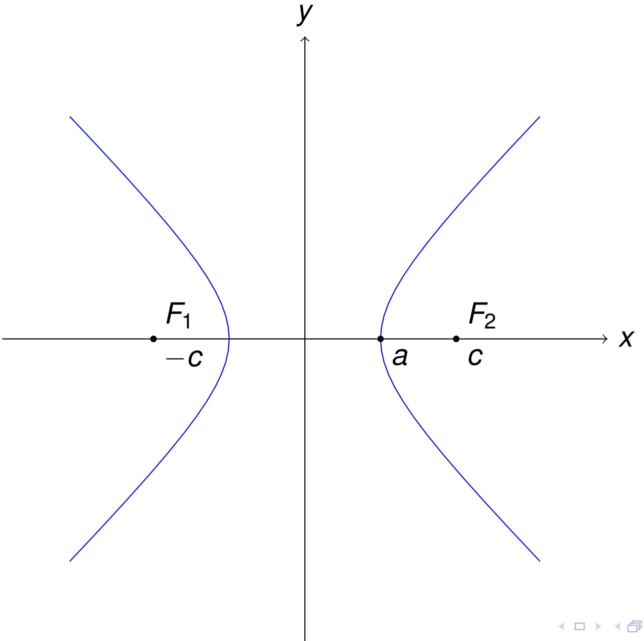

y
b
F_1
F_2
x
$-c$
c
a

Hipérbole

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e $a < c$ um número real positivo. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$. F_1 e F_2 são chamados focos.

Equação Reduzida: Suponha $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Seja $b^2 = c^2 - a^2$. A equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



y
x
F_1
F_2
$-c$
a
c

Parábola

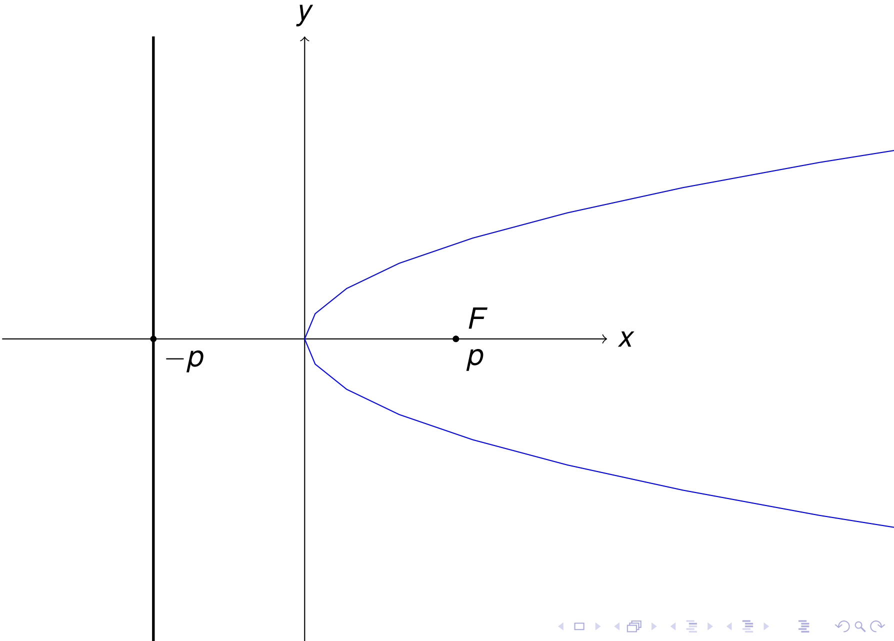
Definição: Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a r. Parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de r e F. F é chamado foco e r é chamada diretriz.

Equação Reduzida: Suponha $r : x + p = 0$ e $F = (p, 0)$. A equação reduzida da parábola é

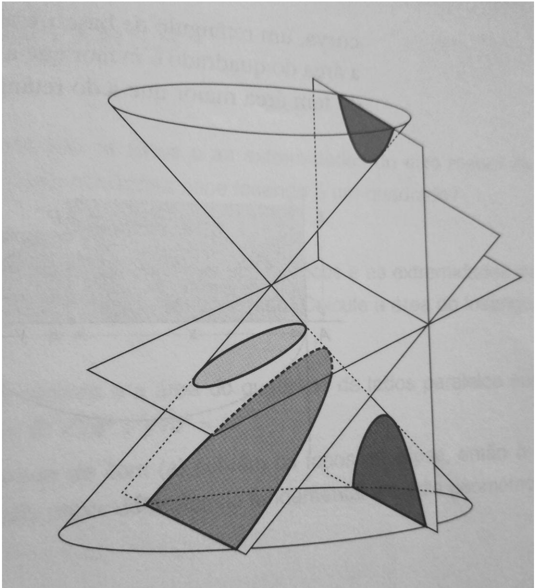
$$y^2 = 4px.$$

Prova: Seja $P = (x, y)$, $d(P, r) = d(P, F)$:

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \;\Rightarrow (x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2.$$


y
F
x
−p
p

Seções cônicas



Cônica

Definição: Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos de E^2 que satisfazem uma equação do segundo grau em 2 variáveis:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Uma cônica é obtida da interseção de um cone (duplo) com um plano e pode ser:

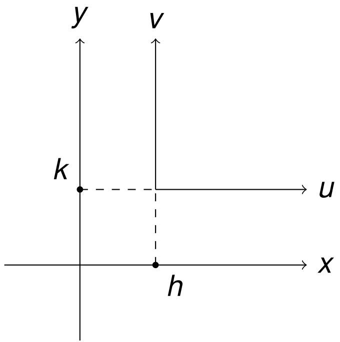
1. Elipse,
2. Circunferência,
3. Ponto,
4. Vazio,
5. Hipérbole,
6. Duas retas concorrentes,
7. Parábola
8. Duas retas paralelas,
9. Uma reta.

- Tipo Elíptico: $b^2 - 4ac < 0$ (1-4).
- Tipo Hiperbólico: $b^2 - 4ac > 0$ (5,6).
- Tipo Parabólico: $b^2 - 4ac = 0$ (7-9).

Reconhecimento de cônicas

Definição: Uma translação é uma mudança de coordenadas em E^2 do tipo:

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$



Translação e eliminação dos termos lineares

Dada a cônica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

vamos fazer uma translação $x = u + h$, $y = v + k$:

$$a(u+h)^2+b(u+h)(v+k)+c(v+k)^2+d(u+h)+e(v+k)+f = 0$$

$$a(u^2 + 2hu + h^2) + b(uv + ku + hv + hk) + c(v^2 + 2kv + k^2)+$$

$$+d(u+h)+e(v+k)+f = au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u+$$

$$+(2ck + bh + e)v + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f = 0$$

Queremos encontrar h e k tais que

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ 2ck + bh + e = 0 \end{cases}$$

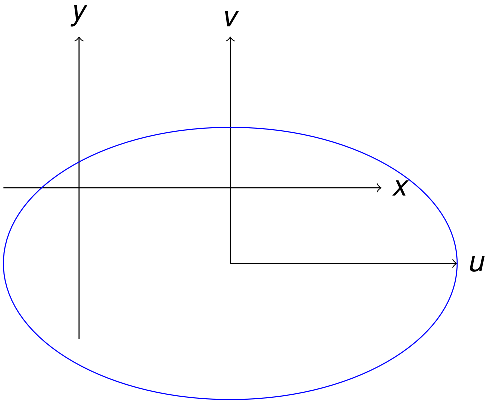
Exemplo: Reconheça a cônica: $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$.

$$\begin{cases} 2.2h + 0.k - 8 = 0 & \rightarrow \quad 4h - 8 = 0 \\ 2.3k + 0.h + 6 = 0 & \rightarrow \quad 6k + 6 = 0 \end{cases}$$

Logo $h = 2$ e $k = -1$. A nova equação é:

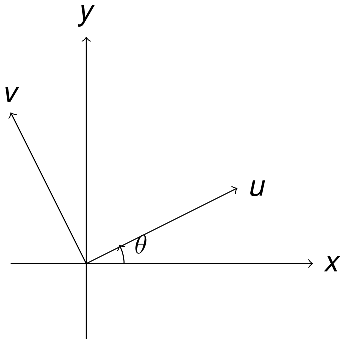
$$2u^2 + 3v^2 + 2.2^2 + 3.(-1)^2 - 8.2 + 6.(-1) - 7 = 2u^2 + 3v^2 - 18 = 0$$

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{6} = 1$$

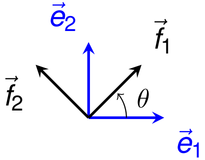


Definição: Uma rotação de um ângulo θ é uma mudança de coordenadas em E^2 do tipo:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$



Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ uma base ortonormal de E^2 e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ uma base obtida da base E através de uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo θ.



Temos $\vec{f}_1 = \|\vec{f}_1\| \cos\theta \, \vec{e}_1 + \|\vec{f}_1\| \sin\theta \, \vec{e}_2 = \cos\theta \, \vec{e}_1 + \sin\theta \, \vec{e}_2$ e $\vec{f}_2 = -\sin\theta \, \vec{e}_1 + \cos\theta \, \vec{e}_2$. Se

$$\vec{w} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 = (u\cos\theta - v\sin\theta)\vec{e}_1 + (u\sin\theta + v\cos\theta)\vec{e}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

então

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \quad y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

rotação e eliminação do termo misto

$$a(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\sin\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta) +$$

$$+ c(u\sin\theta + v\cos\theta)^2 + d(u\cos\theta - v\sin\theta) + e(u\sin\theta + v\cos\theta) + f = 0$$

$$a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$$

$$\begin{cases} a' = a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta \\ b' = (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta \\ c' = a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ d' = d\cos\theta + e\sin\theta \\ e' = -d\sin\theta + e\cos\theta \\ f' = f \end{cases}$$

$$b' = 0 \quad \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \text{ ou } \theta = \pi/4 \ (a = c)$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin 2\theta} \end{cases}$$

Usando $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obtemos

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cotg}^2 2\theta}}.$$

Exemplo: Reconheça a cônica: $4x^2 + 3\sqrt{3}xy + y^2 - 1 = 0$.

Temos $\tan 2\theta = 3\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$. Logo $2\theta = \pi/3$ e $\sin 2\theta = \sqrt{3}/2$.

$$\begin{cases} a' + c' = 5 \\ a' - c' = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 6 \end{cases}$$

$$a' = 11/2, \quad c' = -1/2$$

$$\frac{11}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 = 1$$

que é uma hipérbole.

Exemplo: Reconheça a cônica:
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$
Translação:

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 = 14h + 6k + 28 \\ 2ck + bh + e = 0 = -2k + 6h + 12 \end{cases}$$

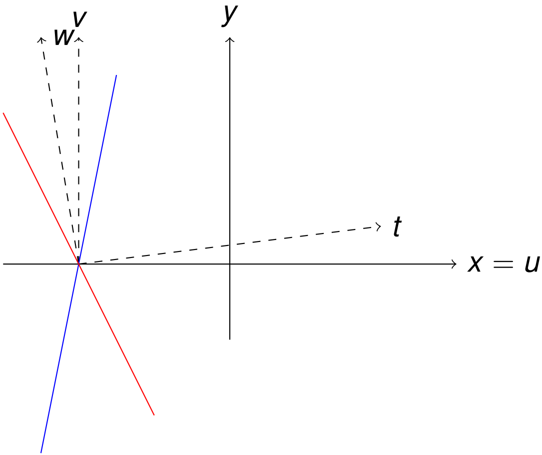
$\Rightarrow h = -2,\ k = 0.$ Nova equação depois da translação:
$7u^2 + 6uv - v^2 + f' = 0$ onde
$f' = 7(-2)^2 + 6(-2).0 - 0 + 28(-2) + 12.0 + 28 = 28 - 56 + 28 = 0$
$\Rightarrow 7u^2 + 6uv - v^2 = 0.$

Rotação: $\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 2\theta}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 6 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin 2\theta} = 6/(3/5) = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow a' = 8$ e $c' = -2$. Nova equação depois da rotação: $8t^2 - 2w^2 = 0 \Rightarrow 2(2t + w)(2t - w) = 0$. Temos duas retas concorrentes: $w = 2t$ e $w = -2t$.


v
w
y
t
$x = u$

Exemplo: Reconheça a cônica:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$$

.

Translação:

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 = 32h - 24k - 38 & \Rightarrow \quad 4h - 3k - 19/4 = 0 \\ 2ck + bh + e = 0 = 18k - 24h - 34 & \Rightarrow \quad -4h + 3k - 17/3 = 0 \end{cases}$$

Logo o sistema é impossível. Não há translação que elimine os termos lineares.

Rotação: $\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-24}{7} \Rightarrow$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 2\theta}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+49/576}} = \frac{24}{25}$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 25 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin 2\theta} = -24/(24/25) = -25 \end{cases}$$

$\Rightarrow a' = 0$ e $c' = 25$. Temos $\cos 2\theta = -7/25 \Rightarrow$
$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} = 9/25$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} = 16/25$.

$$\begin{cases} d' = d\cos\theta + e\sin\theta = -38.3/5 - 34.4/5 = -250/5 = -50 \\ e' = -d\sin\theta + e\cos\theta = 38.4/5 - 34.3/5 = 50/5 = 10 = \end{cases}$$

Nova equação depois da rotação: $25v^2 - 50u + 10v + 71 = 0$.

Completando o quadrado em v temos

$$25v^2 - 50u + 10v + 71 = 25(v^2 + \frac{10}{25}v) - 50u + 71 =$$

$$25(v^2 + \frac{2}{5}v) - 50u + 71 = 25[(v + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25}] - 50u + 71$$

$$25(v + \frac{1}{5})^2 - 50u + 70 = 25(v + \frac{1}{5})^2 - 50(u - \frac{7}{5}) = 0$$

Escrevendo $t = u - \frac{7}{5}$ e $w = v + \frac{1}{5}$ obtemos: $25w^2 - 50t = 0$ ou $2t = w^2$